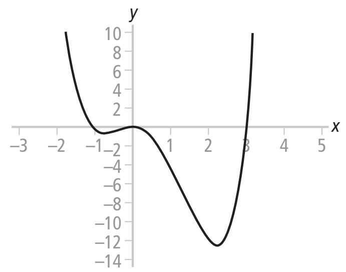
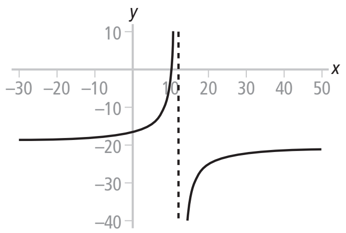
# Extra oefening bij hoofdstuk 1

**1a** Een goede vensterinstelling voor de functie $f$ is :
$X_{\text{min}} = -3$ en $X_{\text{max}} = 5$ en $Y_{\text{min}} = -15$ en $Y_{\text{max}} = 10$ .
Voor de functie $g$ $X_{\text{min}} = -30$ en $X_{\text{max}} = 30$ en $Y_{\text{min}} = -40$ en $Y_{\text{max}} = 10$ .

**b**




**c** Verticale asymptoot $x = 12$ , horizontale asymptoot $y = -20$ .

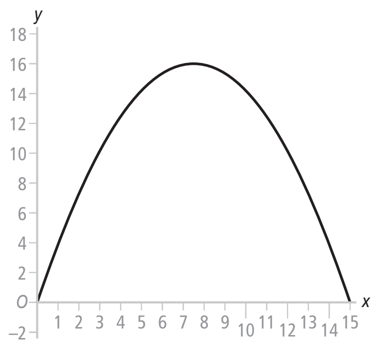
**2** Bij de functie $f$ mag $x = 3$ niet worden ingevuld, dus $D_f = \langle \leftarrow,\ 3\rangle \cup \langle 3,\ \rightarrow \rangle$
en omdat de breuk geen 0 kan worden is de uitkomst nooit 2, dus
$B_f = \langle \leftarrow,\ 2\rangle \cup \langle 2,\ \rightarrow \rangle$
De functie $g$ is een parabool, dus $D_g = \mathbb{R}$ , met de rekenmachine kun je vinden dat de top van deze parabool het punt $\left(1\frac{1}{3}, 7\frac{1}{3}\right)$ is, dus $B_g = \left[7\frac{1}{3},\ \rightarrow\right\rangle$ .
De functie $h$ is een wortelfunctie. Onder het wortelteken moet een getal groter of gelijk aan nul staan. Je kunt zien of met de rekenmachine bepalen dat dan $x \leq 80$ moet zijn.
$D_h = \langle \leftarrow,\ 80]$ $B_h = [0,\ \rightarrow\rangle$ .

**3a** $PQ = f(x) = -\frac{1}{2}x + 8 \Rightarrow P(x, -\frac{1}{2}x + 8)$ .

**b** Oppervlakte $\Delta OPQ = A(x) = \frac{1}{2} \cdot OQ \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (-\frac{1}{2}x + 8) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$ .

**c** $0 < x < 16$ .

**d**




**e** De top van de grafiek ligt tussen $x = 0$ en $x = 16$, dus maximale oppervlakte
$\Delta OPQ = A(8) = -\frac{1}{4} \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 = 16$ .

**4a** De noemer van de functie $f$ is altijd groter dan 0, dus de functie $f$ bestaat voor alle $x$.

**b** $x^2+4x-5=0 \Rightarrow (x+5)(x-1)=0 \Rightarrow x=-5$ of $x=1$. De verticale asymptoten van de grafiek van $g$ zijn dus $x=-5$ en $x=1$.

**c** Wanneer $x$ steeds grotere positieve of negatieve waarden aanneemt, zal bij beide functies de functiewaarden steeds dichter bij 0 komen. De horizontale asymptoot is dus bij beide functies $y = 0$.

**d** Met de rekenmachine kun je de top van de functie $f$ vinden, dit is $(-2,\ 24)$.
De top van de grafiek van de functie $g$ is $(-2,\ -2\frac{2}{3})$.
Dus $B_f = \langle 0,\ 24]$ en $B_g = \langle \leftarrow,\ -2\frac{2}{3}] \cup \langle 0,\ \rightarrow \rangle$

**5a** $9x - x^3 = x(9-x^2)$, hieraan kun je zien dat de functie $f$ nul wordt als $x=0$, $x=-3$ of $x=3$. Dus $D_f = \langle \leftarrow,\ -3] \cup [0,\ 3]$.

**b** Buiten deze intervallen staat er onder het wortelteken een negatief getal en dat kan niet.

**c** Met rekenmachine bepaal je dan de top en vind je: $B_f = [0;\ 3{,}22]$.

# Extra oefening bij hoofdstuk 2

**1a** Neem als vensterinstelling: $X_{min} = -25$ en $X_{max} = 25$ en $Y_{min} = -500$ en $Y_{max} = 100$ .

**b** $0,01x^4 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x^4 - 400x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 400) = 0 \Rightarrow x^2 = 0$ of $x^2 = 400 \Rightarrow$ de nulpunten zijn $x = 0, x = -20$ en $x = 20$ .

**c** Met de rekenmachine vind je: $(-14,14;\ -400), (0,\ 0)$ en $(14,14;\ -400)$

**2a** $8p + 3(-2p + 3) = 4 - (2 - 3p) \Rightarrow 8p - 6p + 9 = 4 - 2 + 3p \Rightarrow 2p + 9 = 2 + 3p \Rightarrow$
$-p = -7 \Rightarrow p = 7$

**b** $(3x - 4)^2 = 25 \Rightarrow 3x - 4 = -5$ of $3x - 4 = 5 \Rightarrow 3x = -1$ of $3x = 9 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$ of $x = 3$ .

**c** $x^3 - 12x^2 + 27x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 12x + 27) = 0 \Rightarrow x(x - 3)(x - 9) = 0 \Rightarrow$
$x = 0, x = 3$ of $x = 9$

**d** $-8x(x - 8) = 30 \Rightarrow -8x^2 + 64x - 30 = 0 \Rightarrow$

$$x = \frac{-64 + \sqrt{64^2 - 4 \cdot -8 \cdot -30}}{2 \cdot -8} = \frac{-64 + \sqrt{3136}}{-16} = \frac{-64 + 56}{-16} = \tfrac{1}{2} \text{ of}$$

$$x = \frac{-64 - \sqrt{64^2 - 4 \cdot -8 \cdot -30}}{2 \cdot -8} = \frac{-64 - \sqrt{3136}}{-16} = \frac{-64 - 56}{-16} = 7\tfrac{1}{2}$$

Dus $x = \frac{1}{2}$ of $x = 7\frac{1}{2}$

**e** $x^5 + 2x^4 = 4x^4 + 3x^3 \Rightarrow x^5 - 2x^4 - 3x^3 = 0 \Rightarrow x^3(x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow x^3(x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow$
$x = 0, x = 3$ of $x = -1$

**3a** $-3x^2 + 4 = -17 \Rightarrow -3x^2 = -21 \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow x = \sqrt{7}$ of $x = -\sqrt{7}$

**b** $5x\sqrt{3x - 1} = 4$ Met de rekenmachine. Plot $Y_1 = 5x\sqrt{(3x - 1)}$ en $Y_2 = 4$ en bepaal het snijpunt.
De oplossing is $x \approx 0,73$

**c** $\dfrac{3}{x + 1} = -4x^2 + 2x + 6$ Met de rekenmachine. Plot $Y_1 = \dfrac{3}{x + 1}$ en $Y_2 = -4x^2 + 2x + 6$ en bepaal de snijpunten. De oplossing is $x = -1,5$ , $x \approx -0,37$ of $x \approx 1,37$

**d** $-\sqrt{8x + 1} + 5 = 3\frac{1}{2} \Rightarrow -\sqrt{8x + 1} = -1\frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{8x + 1} = 1\frac{1}{2} \Rightarrow 8x + 1 = 2\frac{1}{4} \Rightarrow 8x = 1\frac{1}{4} \Rightarrow$
$x = \frac{5}{32}$

**e** $0,3x^3 - 8x^2 + x = 10$ Met de rekenmachine. Plot $Y_1 = 0,3x^3 - 8x^2 + x$ en $Y_2 = 10$ en bepaal het snijpunt. De oplossing is $x \approx 26,59$ .

**4a** Wanneer je de vensterinstelling aanpast, bijvoorbeeld door in te zoomen, dan zie je dat er twee snijpunten zijn.

**b** $-0,2x^2 + x - 3 = -1,01x + 2,05 \Rightarrow -0,2x^2 + 2,01x - 5,05 = 0 \Rightarrow$
De discriminant $D = 2,01^2 - 4 \cdot -0,2 \cdot -5,05 = 0,0001 > 0$ , dus twee oplossingen.
( $x = 5,05$ en $x = 5$ )

**5** Eerst de vergelijking en dan met een plot de ongelijkheid oplossen.

**a** $8x - 3 = 2x + 5 \Rightarrow 6x = 8 \Rightarrow x = 1\frac{1}{3}$ de oplossing is dan $\left[1\frac{1}{3},\ \rightarrow\right\rangle$

**b** $3x^2 - 2x - 9 = x + 9 \Rightarrow 3x^2 - 3x - 18 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 2) = 0 \Rightarrow$
$x = 3$ of $x = -2$ . De oplossing is dan $\left\langle \leftarrow, -2\right\rangle \cup \left\langle 3, \rightarrow\right\rangle$

**c** $\frac{1}{3}x^2 + 1\frac{1}{2}x = -1\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{3}x^2 + 1\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 9x + 9 = 0 \Rightarrow$

$x = \dfrac{-9 + \sqrt{9^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-9 + \sqrt{9}}{4} = \dfrac{-9 + 3}{4} = -1\frac{1}{2}$ of

$x = \dfrac{-9 - \sqrt{9^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-9 - \sqrt{9}}{4} = \dfrac{-9 - 3}{4} = -3$ de oplossing wordt dan $\left[-3,\ -1\frac{1}{2}\right]$

**d** $1 + 7\sqrt{1 - 2x} = 15 \Rightarrow 7\sqrt{1 - 2x} = 14 \Rightarrow \sqrt{1 - 2x} = 2 \Rightarrow 1 - 2x = 4 \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = -1\frac{1}{2}$.
De oplossing wordt dan (let op het randpunt ! ) $\left\langle -1\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$.

# Oefentoets bij de hoofdstukken 1 en 2

**1a** Met de instellingen $X_{\min} = -15$ en $X_{\text{MAX}} = 15$ en $Y_{\min} = -200$ en $Y_{\max} = 200$ krijg je de grafiek zo in beeld.

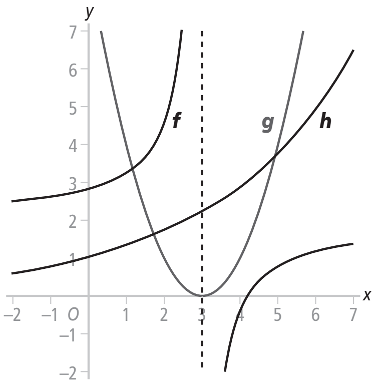
**b** Plot de grafiek van de functie $f$. Met de rekenmachine vind je de toppen $(-4,\ 128)$ en $(4,\ -128)$.

**c** Plot ook nog de grafiek van $y = 95$ en bepaal met de rekenmachine de snijpunten. Je vindt: $x \approx -5{,}56$, $x \approx -2{,}20$ en $x \approx 7{,}76$.

**d** Plot de grafiek van $y = -125$. De snijpunten worden $x \approx -7{,}98$, $x \approx 3{,}49$ en $x \approx 4{,}49$. De oplossing van $f(x) < -125$ is dan $\langle \leftarrow,\ -7{,}98\rangle \cup \langle 3{,}49;\ 4{,}49\rangle$.

**e** $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 48x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 48) = 0 \Rightarrow x = 0$ of $x^2 = 48 \Rightarrow$ $x = 0$, $x = -\sqrt{48}$ of $x = \sqrt{48}$.

**2a**




**b** Verticale asymptoot $x = 3$, want voor $x = 3$ is de noemer gelijk aan 0, en horizontale asymptoot $y = 2$ want voor grote waarden van $x$ wordt de breuk zo goed als nul.

**c** $f(x) = 4 \Rightarrow 2 - \dfrac{5}{2x-6} = 4 \Rightarrow \dfrac{5}{2x-6} = -2 \Rightarrow 2x - 6 = -2\tfrac{1}{2} \Rightarrow 2x = 3\tfrac{1}{2} \Rightarrow x = 1\tfrac{3}{4}$

Dus $f(x) \le 4$ heeft oplossing $\langle \leftarrow,\ 1\tfrac{3}{4}] \cup \langle 3,\ \rightarrow\rangle$. Denk om de asymptoot !!

**d** Er zijn geen oplossingen voor $p = 2$, want dan zou de breuk gelijk moeten worden aan 0 en dat kan niet.

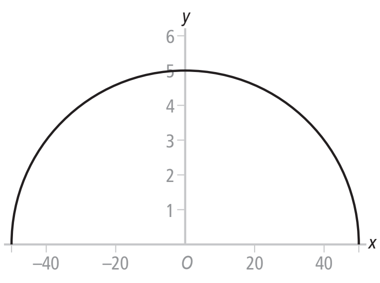
**e** Plot beide grafieken en bepaal met de rekenmachine de snijpunten. De snijpunten zijn: $(1{,}74;\ 1{,}58)$ en $(4{,}90;\ 3{,}62)$.

**f** $f(x) < g(x) < h(x)$ geldt vanaf de asymptoot tot het snijpunt van $g$ en $h$. Dus $\langle 3;\ 4{,}90\rangle$, maar de exponentiële functie $h(x)$ stijgt bij grote $x$ steeds sneller, dus $h$ en $g$ snijden elkaar nog een keer namelijk bij $x \approx 22{,}73$.
Dus $f < g < h$ voor $\langle 3;\ 4{,}90\rangle \cup \langle 22{,}73;\ \rightarrow\rangle$

**3a** $f(30) = \sqrt{25 - 0{,}01 \cdot 30^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$

**b** Er moet gelden $25 - 0{,}01x^2 \ge 0 \Rightarrow 0{,}01x^2 \le 25 \Rightarrow x^2 \le 2500 \Rightarrow -50 \le x \le 50$.
Dus $D_f = [-50,\ 50]$.

**c**



**d** $f(x)=3\frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{25-0,01x^2}=3\frac{1}{2} \Rightarrow 25-0,01x^2=12,25 \Rightarrow$
$-0,01x^2=-12,75 \Rightarrow x^2=1275 \Rightarrow$
$x=\sqrt{1275}$ of $x=-\sqrt{1275}$ .

**e** Plot beide grafieken en bereken het snijpunt. Lees het antwoord af uit de grafieken.
$f(x)>g(x) \Rightarrow \sqrt{25-0,01x^2}=0,075x \Rightarrow 25-0,01x^2=0,005625x^2 \Rightarrow 0,015625x^2=25 \Rightarrow$
$x^2=1600 \Rightarrow x=-40$ of $x=40$ . De oplossing van de ongelijkheid wordt dus:
$\left[-50,\ 40\right\rangle$

**4a** $-x+10=2 \Rightarrow -x=-8 \Rightarrow x=8 \Rightarrow C(8,\ 2)$ .
$x+3=2 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow D(-1,\ 2)$ .

**b** Nu is de $x$-coördinaat van $A$ en dus van $D$ gegeven. Je moet nu $x=1$ invullen in
$y=x+3 \Rightarrow y=1+3=4 \Rightarrow D(1,\ 4)$ .
$C$ heeft dus $y$-coördinaat 4 en ligt op $y=-x+10 \Rightarrow -x+10=4 \Rightarrow -x=-6 \Rightarrow x=6 \Rightarrow$
$C(6,\ 4)$ .
$B$ ligt recht onder $C \Rightarrow B(6,\ 0)$
Oppervlakte $ABCD = AB \times BC = 5 \times 4 = 20$ .

**c** Je moet nu $x=a$ invullen in $y=x+3 \Rightarrow y=a+3 \Rightarrow D(a,\ a+3)$ .
$C$ heeft dus $y$-coördinaat $a+3$ en ligt op
$y=-x+10 \Rightarrow -x+10=a+3 \Rightarrow -x=a-7 \Rightarrow x=7-a \Rightarrow C(7-a,\ a+3)$ .
$B$ ligt recht onder $C \Rightarrow B(7-a,\ 0)$ .

**d** $ABCD$ is een vierkant als
$AB=BC \Rightarrow 7-a-a=a+3 \Rightarrow -2a+7=a+3 \Rightarrow -3a=-4 \Rightarrow a=1\frac{1}{3}$

**e** $O(a)=$
$AB \times BC=(7-a-a)\times(a+3)=(7-2a)(a+3)=7a+21-2a^2-6a=-2a^2+a+21$

**f** Er moet gelden: $AB>0 \Rightarrow 7-2a>0 \Rightarrow 2a<7 \Rightarrow a<3\frac{1}{2}$ en
$BC>0 \Rightarrow a+3>0 \Rightarrow a>-3\frac{1}{2}$
Dus het domein van $O(x)$ is $\left\langle -3,\ 3\frac{1}{2}\right\rangle$ .

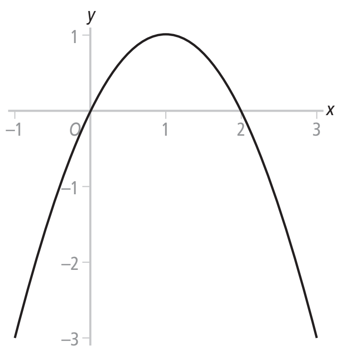
**g** Plot $O(x)$ en bepaal de top met de rekenmachine. Je vindt $(\frac{1}{4},\ 21\frac{1}{8})$ .
Voor $a=\frac{1}{4}$ is de oppervlakte maximaal $21\frac{1}{8}$ .

**5a** Bij al deze functies is de derde macht de hoogste macht van x, en zijn de andere machten twee en/of één en/of nul.

**b** Bij de functies $f$, $g$ en $h$ kun je de nulpunten exact bepalen, bij de functie $k$ niet.
$f(x)=0 \Rightarrow x^3+x^2=0 \Rightarrow x^2(x+1)=0 \Rightarrow x=0$ of $x=-1$ .
$g(x)=0 \Rightarrow 4x^3=0 \Rightarrow x=0$ .
$h(x)=0 \Rightarrow x(x-2)(x+4)=0 \Rightarrow x=0, x=2$ of $x=-4$ .

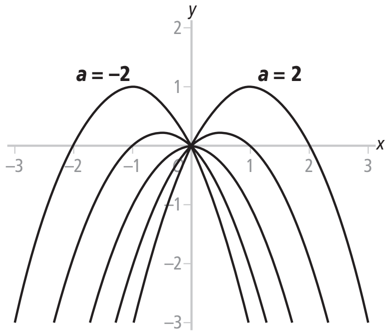
**c** $k(x)=0 \Rightarrow 1-x^2+x^3=0 \Rightarrow$ met de rekenmachine $x \approx -0,75$

**6a** $a=2 \Rightarrow f(x)=2x-x^2$. Top $(1,\ 1)$, nulpunten $x=0$ en $x=2$



**b** $a = -2 \Rightarrow f(x) = -2x - x^2$;
$a = -1 \Rightarrow f(x) = -x - x^2$;
$a = 0 \Rightarrow f(x) = -x^2$;
$a = 1 \Rightarrow f(x) = x - x^2$

**c**




Alle grafieken gaan door het punt $(0,\ 0)$

**d** $f(x) = ax - x^2 = 0 \Rightarrow x(a - x) = 0 \Rightarrow x = 0$ of $x = a$

**e** $f(x) = -2x - x^2 = 0 \Rightarrow -x(2 + x) = 0 \Rightarrow x = 0$ of $x = -2 \Rightarrow$ top voor $x = -1$. De top is $(-1,\ 1)$
$f(x) = -x - x^2 = 0 \Rightarrow -x(1 + x) = 0 \Rightarrow x = 0$ of $x = -1 \Rightarrow$ top voor $x = -\frac{1}{2}$. De top is $(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{4})$
$f(x) = -x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ top voor $x = 0$. De top is $(0,\ 0)$
$f(x) = x - x^2 = 0 \Rightarrow x(1 - x) = 0 \Rightarrow x = 0$ of $x = 1 \Rightarrow$ top voor $x = \frac{1}{2}$. De top is $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

**f** Nulpunten zijn $x = 0$ en $x = a$, dus de top daar tussen dus voor $x = \frac{1}{2}a$.
$f(\frac{1}{2}a) = a \cdot \frac{1}{2}a - (\frac{1}{2}a)^2 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2$ dus de top $(\frac{1}{2}a,\ \frac{1}{4}a^2)$.

**g** $\frac{1}{2}a = 30 \Rightarrow a = 60$

# Extra oefening bij hoofdstuk 3

**1a** Toename 13% per jaar $\Rightarrow$ groeifactor 1,13 per jaar.
Beginhoeveelheid 14307. Dus $f(t) = 14307 \cdot 1,13^t$ , $t$ in jaren.

**b** Rente 4,6% per jaar $\Rightarrow$ groeifactor 1,046 per jaar.
Inleg €2000,-. Dus $f(t) = 2000 \cdot 1,046^t$ , $t$ in jaren

**c** Afname 24% per 30 jaar $\Rightarrow$ groeifactor per 30 jaar 0,76.
Beginhoeveelheid 3000 ton. Dus $f(t) = 3000 \cdot 0,76^t$ $t$ in perioden van 30 jaar.
Of: groeifactor 0,76 per 30 jaar $\Rightarrow$ groeifactor $0,76^{(\frac{1}{30})} = 0,9909$ per jaar.
$f(t) = 3000 \cdot 0,9909^t$ met $t$ in jaren.

**d** Verdrievoudiging per dag $\Rightarrow$ groeifactor is 3 per dag.
beginhoeveelheid 3 miljoen. Dus $f(t) = 3 \cdot 3^t$ met $t$ in dagen en $f(t)$ in miljoenen.

**2a** $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$

**b** $(\frac{1}{5})^2 = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

**c** $(\frac{1}{7})^0 = 1$

**d** $5^3 \cdot (\frac{1}{5})^{-1} = 5^3 \cdot 5 = 5^4 = 625$

**3a** $a^{-4} \cdot a^3 = a^{-4+3} = a^{-1}$

**b** $(\frac{1}{5})^x \cdot 5^{(x+2)} = 5^{-x} \cdot 5^{x+2} = 5^{-x+x+2} = 5^2$

**c** $8^2 \cdot 2^{-2} = (2^3)^2 \cdot 2^{-2} = 2^6 \cdot 2^{-2} = 2^{6-2} = 2^4$

**d** $\left(\frac{1}{p^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^{-3} = (p^{-2}) \cdot (p^{-1})^{-3} = p^{-2} \cdot p^3 = p^{-2+3} = p$

**4a** $f(x) = b \cdot g^x$ door $(0, 5)$ $\Rightarrow f(0) = 5 \Rightarrow b \cdot g^0 = 5 \Rightarrow b \cdot 1 = 5 \Rightarrow b = 5$ .

**b** $f(x) = 5 \cdot g^x$ door $(1, 2)$ $\Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow 5 \cdot g^1 = 2 \Rightarrow g = \frac{2}{5} = 0,4 \Rightarrow f(x) = 5 \cdot 0,4^x$

**c** $h(x) = b \cdot g^x$ door $(1, 27)$ $\Rightarrow h(1) = b \cdot g = 27$ en door $(4, 8)$ $\Rightarrow h(4) = b \cdot g^4 = 8$ . Dus

$\begin{cases} b \cdot g = 27 \\ b \cdot g^4 = 8 \Rightarrow b \cdot g \cdot g^3 = 8 \end{cases}$ eerste in de tweede invullen geeft

$27 \cdot g^3 = 8 \Rightarrow g^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow g = \frac{2}{3}$ . $b \cdot (\frac{2}{3}) = 27 \Rightarrow b = 27 \cdot \frac{3}{2} = 40,5$ .

Dus $h(x) = 40,5 \cdot (\frac{2}{3})^x$ .

**5a** Fout want $2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24 \neq 2^7 = 128$ Wel juist is $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$

**b** Fout want $(3^2)^3 = 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 = 3^6 \neq 3^5$

**c** Fout want $15^{15} : 3^5 = \frac{15^{15}}{3^5} = \frac{(3 \cdot 5)^{15}}{3^5} = \frac{3^{15} \cdot 5^{15}}{3^5} = 3^{10} \cdot 5^{15} \neq 5^{10}$

**d** Fout want $7^4 \cdot 7 = 7^4 \cdot 7^1 = 7^{4+1} = 7^5$

**6a** $45\cdot 2,5^x = 1500$ Plot de grafieken $Y_1 = 45\cdot 2,5^x$ en $Y_2 = 1500$. Bepaal met de rekenmachine het snijpunt. Je vindt $x \approx 3,83$.

**b** $0,1^x < 4\cdot 0,2^x$. Plot de grafieken $Y_1 = 0,1^x$ en $Y_2 = 4\cdot 0,2^x$. Neem scherminstelling $X_{\text{min}} = -5, X_{\text{max}} = 5, Y_{\text{min}} = 0$ en $Y_{\text{max}} = 150$ Bepaal met de rekenmachine het snijpunt. Je vindt $x = 2$. De oplossing is dan $x > -2$.

**c** $0,5\cdot 2^x > 0,5^{2x}$. Met de rekenmachine kan, maar deze kan ook exact.
$0,5\cdot 2^x > 0,5^{2x} \Rightarrow (\frac{1}{2})\cdot 2^x > (\frac{1}{2})^{2x} \Rightarrow 2^{-1}\cdot 2^x > 2^{-2x} \Rightarrow 2^{-1+x} > 2^{-2x} \Rightarrow$
$-1 + x > -2x \Rightarrow 3x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$.

**d** $310\cdot 0,2^x = 915$. Plot de grafieken $Y_1 = 310\cdot 0,2^x$ en $Y_2 = 915$. Bepaal met de rekenmachine het snijpunt. Je vindt $x \approx -0,67$.

**7a** $125^x = 5 \Rightarrow (5^3)^x = 5 \Rightarrow 5^{3x} = 5^1 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

**b** $(\frac{1}{4})^x = 64 \Rightarrow (4^{-1})^x = 4^3 \Rightarrow 4^{-x} = 4^3 \Rightarrow -x = 3 \Rightarrow x = -3$

**c** $9^t = \frac{1}{27} \Rightarrow (3^2)^t = (\frac{1}{3^3}) \Rightarrow 3^{2t} = 3^{-3} \Rightarrow 2t = -3 \Rightarrow t = -1\frac{1}{2}$

**d** $(0,1)^{3t} = 0,01 \Rightarrow (0,1)^{3t} = (0,1)^2 \Rightarrow 3t = 2 \Rightarrow t = \frac{2}{3}$

**e** $25\cdot 5^t = \frac{1}{125} \Rightarrow 5^2\cdot 5^t = \frac{1}{5^3} \Rightarrow 5^{2+t} = 5^{-3} \Rightarrow 2 + t = -3 \Rightarrow t = -5$.

**f** $5\cdot(\frac{1}{9})^t = 135 \Rightarrow (\frac{1}{9})^t = 27 \Rightarrow (\frac{1}{3^2})^t = 3^3 \Rightarrow (3^{-2})^t = 3^3 \Rightarrow 3^{-2t} = 3^3 \Rightarrow -2t = 3 \Rightarrow t = -1\frac{1}{2}$

# Extra oefening bij hoofdstuk 4

**1a** Plot de grafieken: $Y_1 = 10 - 4x^3$ en $Y_2 = 3$ en bepaal het snijpunt. Je vindt $x \approx 1{,}21$.

**b** Plot de grafieken $Y_1 = 1{,}25x^{-4}$ en $Y_2 = 7{,}75$ en bepaal het snijpunt. Je vindt $x \approx -0{,}63$ en $x \approx 0{,}63$.

**c** Plot de grafieken $Y_1 = 12 - 4x^6$ en $Y_2 = 5$ en bepaal het snijpunt. Je vindt $x \approx -1{,}10$ en $x \approx 1.10$.
de oplossing is dan $\langle \leftarrow;\ -1{,}10\rangle \cup \langle 1{,}10;\ \rightarrow\rangle$

**d** Plot de grafieken $Y_1 = 1 + 2x^{-4}$ en $Y_2 = 3{,}6$ en bepaal het snijpunt. Je vindt $x \approx -0{,}94$ en $x \approx 0{,}94$ De oplossing is dan ( denk om de verticale asymptoot !) $\langle -0{,}94;\ 0\rangle \cup \langle 0;\ 0{,}94\rangle$.

**2a** $x^3 + 4 = 9 \Rightarrow x^3 = 5 \Rightarrow x = \sqrt[3]{5} \approx 1{,}71$

**b** $14 - 2x^4 = 10 \Rightarrow -2x^4 = -4 \Rightarrow x^4 = 2 \Rightarrow x = -\sqrt[4]{2} \approx -1{,}19$ of $x = \sqrt[4]{2} \approx 1{,}19$

**c** $2w^{-1\frac{1}{2}} + 3 = 9 \Rightarrow 2w^{-1\frac{1}{2}} = 6 \Rightarrow w^{-1\frac{1}{2}} = 3 \Rightarrow w = 3^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{9}} \approx 0{,}48$

**d** $5t^{-\frac{1}{2}} = 7 \Rightarrow t^{-\frac{1}{2}} = \frac{7}{5} = 1{,}4 \Rightarrow t = 1{,}4^{-2} = \frac{1}{1{,}96} \approx 0{,}51$

**e** $4x^6 > 3x^7 \Rightarrow$ eerst de vergelijking oplossen

$4x^6 = 3x^7 \Rightarrow 4x^6 - 3x^7 = 0 \Rightarrow x^6(4 - 3x) = 0 \Rightarrow x = 0$ of $x = 1\frac{1}{3}$ met de grafieken vind je de oplossing $\langle \leftarrow,\ 0\rangle \cup \langle 0,\ 1\frac{1}{3}\rangle$.

**f** $-\frac{1}{2}x^6 \geq -4x^3 \Rightarrow$ eerst de vergelijking oplossen

$-\frac{1}{2}x^6 = -4x^3 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^6 + 4x^3 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^3(x^3 - 8) = 0 \Rightarrow x = 0$ of $x = 2$.

De oplossing is dan $[0,\ 2]$.

**3a** Elke kubus heeft 6 zijvlakken. Door het tegen elkaar plaatsen vallen er 6 vlakken af voor de oppervlakte. Dus de oppervlakte is $O = (4 \cdot 6 - 6) \cdot r^2 = 18r^2\ \text{cm}^2$
De inhoud is $V = 4r^3\ \text{cm}^3$

**b** $O = 50 \Rightarrow 18r^2 = 50 \Rightarrow r^2 = \frac{50}{18} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{50}{18}} \approx 1{,}67\ \text{cm}$

De inhoud is dan $V = 4 \cdot (\sqrt{\frac{50}{18}})^3 = 4 \cdot \frac{50}{18} \cdot \sqrt{\frac{50}{18}} = 11\frac{1}{9}\sqrt{\frac{50}{18}} \approx 18{,}52\ \text{cm}^3$

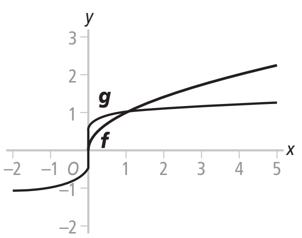
**c** $V = 100 \Rightarrow 4r^3 = 100 \Rightarrow r^3 = 25 \Rightarrow r = \sqrt[3]{25} \approx 2{,}92\ \text{cm}$

De oppervklakte is dan $O = 18 \cdot (\sqrt[3]{25})^2 = 18 \cdot \sqrt[3]{625} \approx 153{,}90\ \text{cm}^2$

**d** $O = V \Rightarrow 18r^2 = 4r^3 \Rightarrow 4r^3 - 18r^2 = 0 \Rightarrow 2r^2(2r - 9) = 0 \Rightarrow r = 0$ of $r = 4\frac{1}{2}$.

Het kan dus als $r = 4\frac{1}{2}$ cm .

**4a**




$D_f = [0, \rightarrow\rangle$ en $B_f = [0, \rightarrow\rangle$ en $D_g = \mathbb{R}$ en $B_g = \mathbb{R}$

**b** $x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{7}} \Rightarrow (x^{\frac{1}{2}})^{14} = (x^{\frac{1}{7}})^{14} \Rightarrow x^7 = x^2 \Rightarrow x^7 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^5 - 1) = 0 \Rightarrow$
$x = 0$ of $x^5 = 1 \Rightarrow x = 0$ of $x = 1$ .

**c** $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ en $g(x) = x^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{x}$

**d** $f(x) = 7 \Rightarrow \sqrt{x} = 7 \Rightarrow x = 49$

**e** $g(x) = -2 \Rightarrow \sqrt[7]{x} = -2 \Rightarrow x = (-2)^7 = -128$

**5a** $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2} = \frac{x^4}{x^2} - \frac{1}{x^2} = x^2 - x^{-2}$

**b** In de buurt van 0 is $x^2$ heel klein, de functie lijkt dan dus het meest op $x^{-2}$ .

**c** Voor grote waarden van $x$ is $x^{-2}$ juist heel klein.
De grafiek lijkt dan dus het meest op die van $x^2$

# Oefentoets bij de hoofdstukken 3 en 4

**1a** Toename met 1,4% per jaar, dus de groeifactor is 1,014 per jaar
$\Rightarrow C(t) = 1,253 \cdot 1,014^t$ in miljarden, t in jaren.

**b** 1 juli 2010 komt overeen met $t = 11,5 \Rightarrow C(11,5) = 1,253 \cdot 1,014^{11,5} = 1,407$ miljard inwoners.

**c** Opgelost moet worden $1,253 \cdot 1,014^t = 1,670$. Plot beide grafieken en bepaal het snijpunt. Je vindt $t \approx 20,7$. Dus in het jaar 2019 is de bevolking 1,670 miljard.

**d** 1-1-2004 komt overeen met $t = 5$. De toename over het jaar 2004 vind je met
$C(6) - C(5) = 1,253 \cdot 1,014^6 - 1,253 \cdot 1,014^5 \approx 0,019$ miljard, dus 19 miljoen.

**e** Opgelost moet worden $1,014^t = 2$ met de rekenmachine geeft dit $t \approx 49,86$, dus na ongeveer 50 jaar.

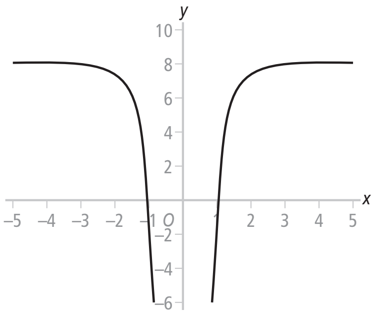
**f** Groeifactor per 32 jaar is 2, dus de groeifactor per jaar is $2^{(\frac{1}{32})} = 1,0219$.

Op 1 januari 1999 was de Indiase bevolking $835 \cdot \left(2^{(\frac{1}{32})}\right)^4 \approx 911$ miljoen

De formule $I(t) = 0,911 \cdot 1,0219^t$

**g** Plot beide grafieken en bepaal het snijpunt. Je vindt $t \approx 41,1$. Dus in het jaar 2040 hebben ze evenveel inwoners.

**2a**




$D_f = \langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$

**b** $f(x) = 6 \Rightarrow 8 - 10x^{-4} = 6 \Rightarrow 10x^{-4} = 2 \Rightarrow \frac{10}{x^4} = 2 \Rightarrow x^4 = 5 \Rightarrow x = -\sqrt[4]{5}$ of $x = \sqrt[4]{5}$

**c** De grafiek van $f$ heeft verticale asymptoot $x = 0$ en horizontale asymptoot $y = 8$.

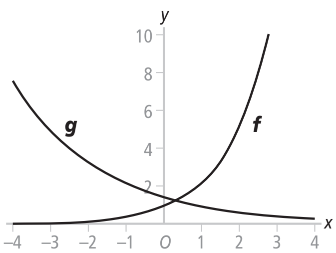
**d** $f(x) = 0 \Rightarrow 8 - 10x^{-4} = 0 \Rightarrow \frac{10}{x^4} = 8 \Rightarrow x^4 = 1,25 \Rightarrow x = -\sqrt[4]{1,25}$ of $x = \sqrt[4]{1,25}$.

**3a** $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = 3x^{\frac{2}{3}}$

**b** $g(x) = 3x^4 \cdot x^2 + 2(x^3)^2 = 3x^6 + 2x^6 = 5x^6$

**c** $h(x) = \dfrac{(2x^3)^2 \cdot x^{-4} \cdot x^{-\frac{1}{2}}}{(2x)^3} = \dfrac{4x^6 \cdot x^{-4} \cdot x^{-\frac{1}{2}}}{8x^3} = \dfrac{4x^{1\frac{1}{2}}}{8x^3} = \frac{1}{2}x^{-1\frac{1}{2}}$

**4a**




**b** $2,25 = 1,5^2 \Rightarrow 2,25^x = (1,5^2)^x = 1,5^{2x}$; $\frac{2}{3} = (\frac{3}{2})^{-1} = 1,5^{-1}$ dus
$f(x) = g(x) \Rightarrow 2,25^x = 1,5 \cdot (\frac{2}{3})^x \Rightarrow 1,5^{2x} = 1,5 \cdot 1,5^{-x} \Rightarrow 1,5^{2x} = 1,5^{1-x} \Rightarrow 2x = 1 - x \Rightarrow$
$3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

**c** $g(0)=1,5\cdot(\frac{2}{3})^0=1,5\Rightarrow g$ door het punt (0; 1,5) op de $y$-as, dus $h$ door het punt (2; 1,5).
$g(1)=1,5\cdot(\frac{2}{3})^1=1\Rightarrow g$ door het punt (1, 1), dus $h$ door het punt (1, 1).
$g(2)=1,5\cdot(\frac{2}{3})^2=\frac{2}{3}\Rightarrow g$ door het punt $(2,\frac{2}{3})$, dus $h$ door het punt $(0,\frac{2}{3})$

**d** $g(x)=1,5\cdot(\frac{2}{3})^x$ spiegelen in de verticale as geeft $k(x)=1,5\cdot(\frac{2}{3})^{-x}=1,5\cdot(\frac{3}{2})^x=1,5\cdot1,5^x$, vervolgens 2 naar rechts verschuiven geeft
$h(x)=1,5\cdot1,5^{x-2}=1,5^{x-1}=1,5^{-1}\cdot1,5^x=\frac{2}{3}\cdot1,5^x$
Dus $h(x)=\frac{2}{3}\cdot1,5^x$. Snijpunt met de verticale as, dus $x=0\Rightarrow h(0)=\frac{2}{3}$ Snijpunt met de verticale as is $(0,\frac{2}{3})$. De groeifactor van $h$ is 1,5

**e** $h(x)=\frac{2}{3}\cdot1,5^x$ zie hierboven.

**5a** $-0,7t^6+1=0\Rightarrow-0,7t^6=-1\Rightarrow t^6=\frac{10}{7}\Rightarrow t=-\sqrt[6]{1\frac{3}{7}}\approx-1,06$ of $t=\sqrt[6]{1\frac{3}{7}}\approx1,06$

**b** $2,4x^{-3}=8,2\Rightarrow x^{-3}=\dfrac{41}{12}\Rightarrow x^3=\dfrac{12}{41}\Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{12}{41}}\approx0,66$

**c** $2^x=1024=2^{10}\Rightarrow x=10$

**d** $1245-35\cdot p^{\frac{3}{5}}=732\Rightarrow-35\cdot p^{\frac{3}{5}}=-513\Rightarrow p^{\frac{3}{5}}=14\frac{23}{35}\Rightarrow p=\left(14\frac{23}{35}\right)^{\frac{5}{3}}=\sqrt[3]{\left(14\frac{23}{35}\right)^5}\approx87,78$

**e** $16^x=2^{x+7}\Rightarrow(2^4)^x=2^{x+7}\Rightarrow2^{4x}=2^{x+7}\Rightarrow4x=x+7\Rightarrow3x=7\Rightarrow x=2\frac{1}{3}$

**f** $4x^{-2}-3=-5\Rightarrow\dfrac{4}{x^2}=-2\Rightarrow$ geen oplossing want het linkerlid is altijd groter dan 0.

**g** $1=1,5^x\Rightarrow x=0$

**h** $4x^3=3x^7\Rightarrow4x^3-3x^7=0\Rightarrow x^3(4-3x^4)=0\Rightarrow$
$x=0$ of $x^4=1\frac{1}{3}\Rightarrow x=0$ of $x=-\sqrt[4]{1\frac{1}{3}}$ of $x=\sqrt[4]{1\frac{1}{3}}$

**6a** De walvis bevat bij leven 0,000001 mg per kilo, dus bevat de walvis 0,0244 mg $C_{14}$.

**b** Opgelost moet worden $(\frac{1}{2})^t=0,1$ met t in perioden van 5730 jaar.
met de rekenmachine geeft dit $t=3,3219$. Dus na $3,3219\cdot5730\approx19034$ jaar is er nog 10 % over.

**c** Toen de mammoet overleed was er $7500\cdot0,000001=0,0075$ mg aanwezig.
Er moet dus gelden $0,0075\cdot(\frac{1}{2})^t=0,0022\Rightarrow$ met de rekenmachine $t\approx1,7694$.
De mammoet is dus $1,7694\cdot5730\approx10140$ jaar geleden gestorven, dus ongeveer 10.000 jaar geleden.

**7a** Invullen van de gegevens geeft:
$1,5=0,006681\cdot G^{0,425}\cdot160^{0,725}\Rightarrow1,5=0,2647\cdot G^{0,425}\Rightarrow$
$G^{0,425}\approx5,666\Rightarrow G\approx5,666^{(\frac{1}{0,425})}\approx59$ kg

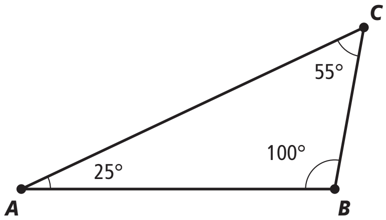
**b** $H=0,006681\cdot G^{0,425}\cdot180^{0,725}=0,2883\cdot G^{0,425}$ Dus $c\approx0,29$.

**c** $H_{hans}=0,006681\cdot75^{0,425}\cdot180^{0,725}=1,8064$
$H_{Frans}=1,8064=0,006681\cdot G^{0,425}\cdot150^{0,725}\Rightarrow G^{0,425}=7,15\Rightarrow G=7,15^{(\frac{1}{0,425})}\approx102$ kg.
Dus Frans weegt ongeveer 102 kg.

**d** Voor: $H_{voor}=0,006681\cdot90^{0,425}\cdot L^{0,725}=0,04523\cdot L^{0,725}$
Na: $H_{na}=0,006681\cdot72^{0,425}\cdot L^{0,725}=0,04113\cdot L^{0,725}$
Haar huidoppervlakte is dus met $\dfrac{0,04523-0,04113}{0,04523}\times100\%=9,1\%$ afgenomen.

# Extra oefening bij hoofdstuk 5

**1a**



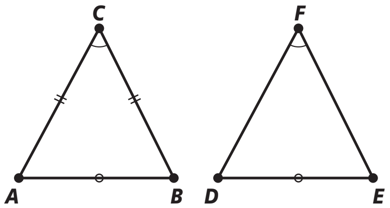

Er zijn meerdere mogelijkheden, het verschil zit hem in de afmetingen, de vorm blijft hetzelfde.

**b** Twee van de drie hoeken was genoeg geweest want de drie hoeken samen zijn altijd $180°$ .

**c** Ja, er is maar één driehoek mogelijk die voldoet aan deze gegevens.

**d** Wanneer je één van de gegevens weglaat ligt de driehoek niet meer eenduidig vast.

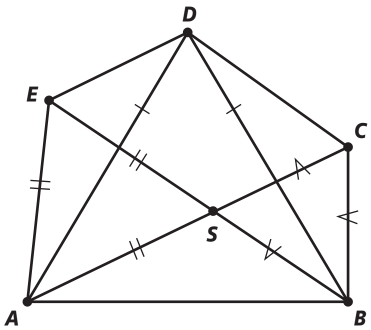
**2a**




**b** In een gelijkbenige driehoek zijn de basishoeken gelijk.
$\angle A = \angle B = \frac{1}{2}(180° - \angle C) = \frac{1}{2}(180° - \angle F) = \angle D = \angle E$ .

**c** Congruentiegeval HZH.

**3a**




Driehoek $ASE$ is gelijkzijdig $\Rightarrow \begin{cases} |AE| = |AS| \\ \angle EAD = 60° - \angle DAS \end{cases}$ ,

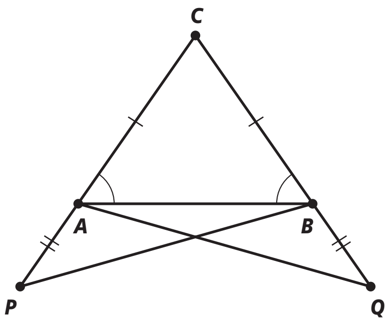
driehoek $ABD$ is gelijkzijdig $\Rightarrow \begin{cases} |AD| = |AB| \\ \angle SAB = 60° - \angle DAS \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} |AE| = |AS| \\ \angle EAD = \angle SAB = 60° - \angle DAS \\ |AD| = |AB| \end{array}\right\} \Rightarrow (ZHZ)\ \Delta ADE \cong \Delta ABS$$

**b** Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ADE \cong \Delta ABS \Rightarrow |DE| = |BS| \\ \Delta BSC \text{ is gelijkzijdig} \Rightarrow |BS| = |CS|\end{array}\right\} \Rightarrow |DE| = |CS|$$

**4a**




**b** $\Delta ABC$ is gelijkbenig $\Rightarrow \angle CAB = \angle CBA$

$|AP| = |BQ| \Rightarrow |CP| = |CQ|$

**c** $\Delta PBC$ en $\Delta QAC$

**d/e** Te bewijzen $|PB| = |QA|$

Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l}|CP| = |CQ| \\ \angle PCB = \angle QCA \\ |CB| = |CA|\end{array}\right\} \Rightarrow (ZHZ)\ \Delta CPB \cong \Delta CQA \Rightarrow |PB| = |QA|.$$

# Extra oefening bij hoofdstuk 6

**1a** $x^5 - 16x^4 = 0 \Rightarrow x^4(x-16) = 0 \Rightarrow x = 0$ of $x = 16$

**b** $(15-\sqrt{x})(2x+7) = (x^2-17)(15-\sqrt{x}) \Rightarrow 15-\sqrt{x} = 0$ of $2x+7 = x^2-17 \Rightarrow$
$\sqrt{x} = 15$ of $x^2-2x-24 = 0 \Rightarrow x = 225$ of $(x-6)(x+4) = 0 \Rightarrow$
$x = 225$ , $x = 6$ of $x = -4$

**c** $\dfrac{x}{5-x} = \dfrac{4x-3}{2x} \Rightarrow x \cdot 2x = (5-x)(4x-3) \Rightarrow 2x^2 = 20x - 15 - 4x^2 + 3x \Rightarrow$
$6x^2 - 23x + 15 = 0 \Rightarrow$

$$x = \frac{23+\sqrt{(-23)^2-4\cdot 6\cdot 15}}{2\cdot 6} = \frac{23+\sqrt{169}}{12} = \frac{23+13}{12} = 3 \text{ of}$$
$$x = \frac{23-\sqrt{(-23)^2-4\cdot 6\cdot 15}}{2\cdot 6} = \frac{23-\sqrt{169}}{12} = \frac{23-13}{12} = \tfrac{5}{6}.$$

De oplossingen zijn dus $x = 3$ of $x = \frac{5}{6}$

**d** $x^4 = (2x-1)^2 \Rightarrow x^2 = 2x-1$ of $x^2 = -(2x-1) \Rightarrow x^2-2x+1 = 0$ of $x^2+2x-1 = 0 \Rightarrow$
$x^2-2x+1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$ of

$$x^2+2x-1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2+\sqrt{4-4\cdot 1\cdot -1}}{2} = \frac{-2+\sqrt{8}}{2} = \frac{-2+2\sqrt{2}}{2} = -1+\sqrt{2} \text{ of}$$
$$x = \frac{-2-\sqrt{4-4\cdot 1\cdot -1}}{2} = \frac{-2-\sqrt{8}}{2} = \frac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1-\sqrt{2}$$

De oplossingen zijn dus $x = 1, x = -1+\sqrt{2}$ of $x = -1-\sqrt{2}$

**e** $x - 7\sqrt{x} + 12 = 0$ Stel $\sqrt{x} = a$ Je krijgt dan:
$a^2 - 7a + 12 = 0 \Rightarrow (a-3)(a-4) = 0 \Rightarrow a = 3$ of $a = 4$
$a = 3 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9$ en $a = 4 \Rightarrow \sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16$
De oplossingen zijn dus $x = 9$ of $x = 16$

**f** $\dfrac{8(4-x)}{6-\sqrt{x}} = (4-x)\sqrt{x} \Rightarrow 4-x = 0$ of $\dfrac{8}{6-\sqrt{x}} = \sqrt{x} \Rightarrow x = 4$ of $8 = \sqrt{x}\cdot(6-\sqrt{x}) \Rightarrow$

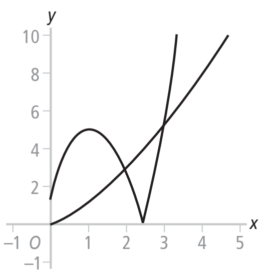
$x = 4$ of
$8 = 6\sqrt{x} - x$ Stel $\sqrt{x} = a$ Je krijgt dan:
$8 = 6a - a^2 \Rightarrow a^2 - 6a + 8 = 0 \Rightarrow (a-2)(a-4) = 0 \Rightarrow a = 2$ of $a = 4$
$a = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$ en $a = 4 \Rightarrow \sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16$
De oplossingen zijn dus $x = 4$ of $x = 16$

**2a** $D_f = D_g = [0, \rightarrow\rangle$

**b** $|x^2-6|\cdot\sqrt{x} = 0 \Rightarrow |x^2-6| = 0$ of $\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x^2 = 6$ of $x = 0 \Rightarrow$

$x = -\sqrt{6}$ (vervalt) of $x = \sqrt{6}$ of $x = 0$

**c**



**d** $\left|x^2-6\right|\sqrt{x}=x\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x}=0$ of $\left|x^2-6\right|=x \Rightarrow x=0$ of $x^2-6=x$ of $-x^2+6=x \Rightarrow$
$x^2-x-6=0 \rightarrow\Rightarrow (x-3)(x+2)=0 \Rightarrow x=3$ of $x=-2$ (vervalt) of
$x^2+x-6=0 \rightarrow\Rightarrow (x+3)(x-2)=0 \Rightarrow x=2$ of $x=-3$ (vervalt)
De snijpunten zijn dan $(0,\ 0)$, $(2,\ 2\sqrt{2})$ en $(3,\ 3\sqrt{3})$.

**e** Met de grafiek en de berekende snijpunten : $f(x) \le g(x) \Rightarrow x=0$ of $2 \le x \le 3$.

**3a** $\begin{cases} a^2-20b=1 \\ a-2b=1 \Rightarrow 2b=a-1 \end{cases}$ de tweede in de eerste invullen geeft

$a^2-10(a-1)=1 \Rightarrow a^2-10a+10=1 \Rightarrow a^2-10a+9=1 \Rightarrow (a-1)(a-9)=0 \Rightarrow a=1$ of $a=9$
$a=1 \Rightarrow 2b=0 \Rightarrow b=0$ en $a=9 \Rightarrow 2b=8 \Rightarrow b=4$
De oplossingen zijn dus $a=1$ en $b=0$ of $a=9$ en $b=4$.

**b** $\begin{cases} 2ab=3 \\ a+4b=7 \Rightarrow a=7-4b \end{cases}$ de tweede in de eerste invullen geeft

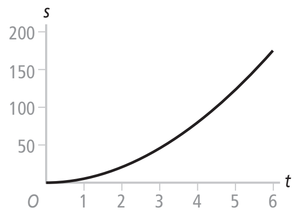
$2\cdot(7-4b)\cdot b=3 \Rightarrow 14b-8b^2=3 \Rightarrow 8b^2-14b+3=0 \Rightarrow$

$b=\dfrac{14+\sqrt{196-4\cdot 8\cdot 3}}{16}=\dfrac{14+\sqrt{100}}{16}=\dfrac{14+10}{16}=1\tfrac{1}{2}$ of

$b=\dfrac{14-\sqrt{196-4\cdot 8\cdot 3}}{16}=\dfrac{14-\sqrt{100}}{16}=\dfrac{14-10}{16}=\tfrac{1}{4}$

$b=1\tfrac{1}{2} \Rightarrow a=7-4\cdot 1\tfrac{1}{2}=1$ of $b=\tfrac{1}{4} \Rightarrow a=7-4\cdot\tfrac{1}{4}=6$
De oplossingen zijn dus $a=1$ en $b=1\tfrac{1}{2}$ of $a=6$ en $b=\tfrac{1}{4}$.

**4a**




**b** $s=4{,}9t^2 \Rightarrow t^2=\dfrac{s}{4{,}9} \Rightarrow t=\sqrt{\dfrac{s}{4{,}9}}$

**c** $t^2=\dfrac{\frac{1}{2}s}{g}$ klopt niet want $s=\tfrac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \dfrac{s}{\frac{1}{2}g}=t^2 \Rightarrow t^2=\dfrac{2s}{g}$

$g=\dfrac{2s}{t^2}$ klopt wel want $s=\tfrac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \dfrac{s}{\frac{1}{2}t^2}=g \Rightarrow g=\dfrac{2s}{t^2}$

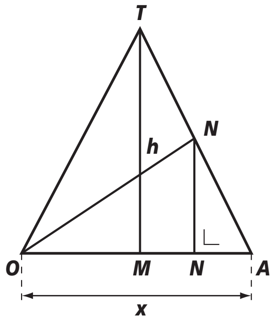
$\dfrac{gt^2}{s}=2$ klopt want $s=\tfrac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \dfrac{\frac{1}{2}gt^2}{s}=1 \Rightarrow \dfrac{gt^2}{s}=2$

$t=\sqrt{\dfrac{s}{2g}}$ klopt niet want $s=\tfrac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \dfrac{s}{\frac{1}{2}g}=t^2 \Rightarrow t^2=\dfrac{2s}{g} \Rightarrow t=\sqrt{\dfrac{2s}{g}}$

**5a** $TM^2+OM^2=OT^2 \Rightarrow h^2+3^2=5^2 \Rightarrow h^2=16 \Rightarrow h=4$
**b** $TM^2+OM^2=OT^2 \Rightarrow h^2+(\tfrac{1}{2}x)^2=5^2 \Rightarrow h^2=5^2-\tfrac{1}{4}x^2 \Rightarrow h=\sqrt{25-\tfrac{1}{4}x^2}$

**c** $h = \sqrt{25 - \frac{1}{4}x^2} = 4{,}5 \Rightarrow 25 - \frac{1}{4}x^2 = 20\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4}x^2 = 4\frac{3}{4} \Rightarrow x^2 = 19 \Rightarrow x = \sqrt{19}$

**d** $N$ is het midden van $AT$. Teken de lijn $NN'$ evenwijdig aan $TM$, dan is $N'$ het midden van $MA$, dus
$ON' = \frac{3}{4}x$. Ook geldt dan dat $NN' = \frac{1}{2}h$.




Dus $N'N^2 + ON'^2 = ON^2 \Rightarrow ON^2 = (\frac{1}{2}h)^2 + (\frac{3}{4}x)^2$

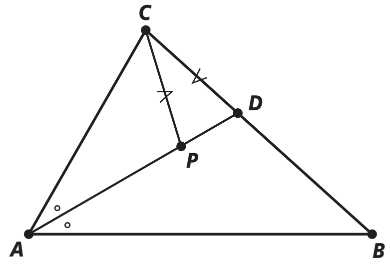
**e** Maak gebruik van het resultaat van opdracht b.
$ON^2 = (\frac{1}{2}h)^2 + (\frac{3}{4}x)^2 \Rightarrow 6^2 = (\frac{1}{2}\sqrt{25 - \frac{1}{4}x^2})^2 + (\frac{3}{4}x)^2 \Rightarrow 36 = \frac{1}{4}(25 - \frac{1}{4}x^2) + (\frac{3}{4}x)^2 \Rightarrow$

$6\frac{1}{4} - \frac{1}{16}x^2 + \frac{9}{16}x^2 = 36 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 = 29\frac{3}{4} \Rightarrow x^2 = 59\frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{59\frac{1}{2}}$

$h = \sqrt{25 - \frac{1}{4}(\sqrt{59\frac{1}{2}})^2} = \sqrt{25 - 14\frac{5}{8}} \Rightarrow h = \sqrt{10\frac{1}{8}}$

# Oefentoets bij de hoofdstukken 5 en 6

**1**




Gegeven: $\Delta ABC, \angle CAD = \angle DAB$ , $|CP| = |CD|$
Te bewijzen: $\Delta APC \sim \Delta ADB$
Bewijs:

$$\left.\begin{array}{r} |CP| = |CD| \Rightarrow \angle CPD = \angle CDP \Rightarrow \angle CPA = \angle BDA \\ \angle CAP = \angle DAB \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta APC \sim \Delta ADB$$

**2a** Te bewijzen: $\angle CED = \angle CDE$
Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l} |AC| = |CB| \\ \angle CAE = \angle CBD = 90^\circ \\ \angle ACE = \angle BCD \end{array}\right\} \Rightarrow (HZH)\ \Delta ACE \cong \Delta BCD \Rightarrow |CE| = |CD| \Rightarrow$$

$\Delta CED$ is gelijkbenig $\Rightarrow \angle CED = \angle CDE$ .

**b** $\angle CAB = \angle CBA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ACB) = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ECD) = \angle CED = \angle CDE$
Dus alle hoeken van $\Delta ABC$ en $\Delta EDC$ zijn gelijk $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta EDC$
Op dezelfde wijze is $\Delta BDC \sim \Delta AEC$

**3a** $(x^2 + x)(x^4 - x^3 + x^2) = x^6 - x^5 + x^4 + x^5 - x^4 + x^3 = x^6 + x^3$

**b** $a + b + \dfrac{2b(a+b)}{a-b} = \dfrac{(a+b)(a-b)}{a-b} + \dfrac{2ab + 2b^2}{a-b} = \dfrac{a^2 - b^2 + 2ab + 2b^2}{a-b} = \dfrac{a^2 + 2ab + b^2}{a-b}$

**c** $(x\sqrt{x} - 2x)(x^3 + 2x^2\sqrt{x} + 4x^2) = x^4\sqrt{x} + 2x^3 \cdot x + 4x^3\sqrt{x} - 2x^4 - 4x^3\sqrt{x} - 8x^3 =$
$x^4\sqrt{x} - 8x^3$

**d** $\dfrac{4x+5}{x^2+x+1} - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{(4x+5)(x-1)}{(x^2+x+1)(x-1)} - \dfrac{x^2+x+1}{(x^2+x+1)(x-1)} = \dfrac{(4x^2 - 4x + 5x - 5) - (x^2 + x + 1)}{(x^2+x+1)(x-1)} =$

$\dfrac{4x^2 + x - 5 - x^2 - x - 1}{(x^2+x+1)(x-1)} = \dfrac{3x^2 - 6}{(x^2+x+1)(x-1)}$

**4a** De uitspraken I, III en IV zijn juist. Uitspraak II is onjuist, want een gelijkbenig trapezium heeft ook één symmetrieas en is geen vlieger.

**b** De uitspraken I en IV zijn gelijkwaardig.
Gegeven: een vierhoek $ABCD$, $AC$ is symmetrieas
Te bewijzen: $|AB| = |AD|$ en $|BC| = |CD|$
Bewijs: ( Met $S_{AB}(P) = Q$ wordt bedoeld dat Q het spiegelbeeld is van punt P na spiegeling in de lijn AC).

$AC$ is symmetrieas $\Rightarrow \left.\begin{matrix} S_{AC}(D)=B \\ S_{AC}(A)=A \end{matrix}\right\} \Rightarrow S_{AC}(AD)=AB \Rightarrow |AD|=|AB|$

$AC$ is symmetrieas $\Rightarrow \left.\begin{matrix} S_{AC}(C)=C \\ S_{AC}(D)=B \end{matrix}\right\} \Rightarrow S_{AC}(CD)=CB \Rightarrow |CD|=|CB|$

Gegeven vierhoek $ABCD$ met $|AB|=|AD|$ en $|BC|=|CD|$
Te bewijzen: $AC$ is symmetrieas.
Bewijs:

$$\left.\begin{matrix} |AD|=|AB| \\ |CD|=|CD| \\ |AC|=|AC| \end{matrix}\right\} \Rightarrow (ZZZ)\Delta ACD \cong \Delta ACB \Rightarrow \angle DAC=\angle BAC \Rightarrow AC \text{ is deellijn} \Rightarrow$$

$S_{AC}(D)=B \Rightarrow AC$ is symmetrieas.

**c** Uitspraak III
Gegeven : vierhoek $ABCD$. $AC$ en $BD$ snijden elkaar in punt $S$. $|AS|=|CS|$ en $|BS|=|DS|$.
Te bewijzen: $ABCD$ is een parallellogram.
Bewijs;

$$\left.\begin{matrix} |AS|=|CS| \\ |BS|=|DS| \\ \angle ASB=\angle CSD \end{matrix}\right\} \Rightarrow (ZHZ)\ \Delta ASB \cong \Delta CSD \Rightarrow |AB|=|CD| \ (1)$$

$$\left.\begin{matrix} |AS|=|CS| \\ |BS|=|DS| \\ \angle ASD=\angle CSB \end{matrix}\right\} \Rightarrow (ZHZ)\ \Delta ASD \cong \Delta CSB \Rightarrow |AD|=|CB| \ (2)$$

Uit (1) en (2) volgt $ABCD$ is een parallellogram.

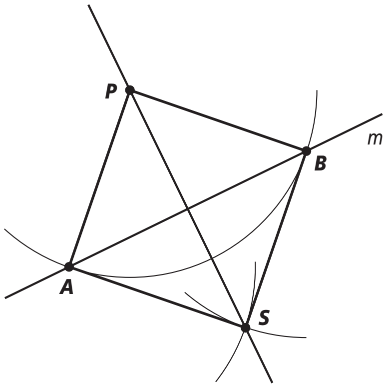
**5a** $\begin{cases} xy=2x \Rightarrow x=0 \text{ of } y=2 \\ x^2-xy+y^2=4 \end{cases}$ eerste invullen in de tweede vergelijking geeft:

$x=0 \Rightarrow 0^2-0\cdot y+y^2=4 \Rightarrow y^2=4 \Rightarrow y=-2 \text{ of } y=2$
$y=2 \Rightarrow x^2-2x+4=4 \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow x=0 \text{ of } x=2$
De oplossingen zijn dus $x=0$ en $y=-2$ , $x=0$ en $y=2$ , $x=2$ en $y=2$

**b** $\begin{cases} x+y=p \Rightarrow x=-y+p \\ x^2+2y^2=24 \end{cases}$ de eerste invullen in de tweede geeft:

$(-y+p)^2+2y^2=24 \Rightarrow y^2-2yp+p^2+2y^2=24 \Rightarrow 3y^2-2yp+p^2-24=0$
Het stelsel heeft precies één, oplossing als de dicriminant van de tweedegraads vergelijking gelijk is aan 0. Dus:
$(-2p)^2-4\cdot 3\cdot(p^2-24)=0 \Rightarrow 4p^2-12p^2+288=0 \Rightarrow -8p^2=-288 \Rightarrow p^2=36 \Rightarrow$
$p=-6$ of $p=6$
Invullen in de tweedegraads vergelijking:
$p=-6 \Rightarrow 3y^2+12y+12=0 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow x=-4$
$p=6 \Rightarrow 3y^2-12y+12=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow x=4$

**6a**




Uit de constructie volgt $|PA| = |AS| = |SB| = |BP| \Rightarrow PASB$ is een ruit $\Rightarrow PS \perp AB = m$

**b** In dat geval wordt PASB een vlieger want dan is $|PA| = |BP|$ vanwege de eerste stap en
$|AS| = |SB|$ vanwege de tweede stap. Ook bij een vlieger staan de diagonalen loodrecht op elkaar.

**7a** $\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x-1} = 6 \Rightarrow \dfrac{2(x-1)}{x(x-1)} - \dfrac{3x}{x(x-1)} = 6 \Rightarrow \dfrac{2x-2-3x}{x(x-1)} = 6 \Rightarrow \dfrac{-x-2}{x(x-1)} = 6 \Rightarrow$

$6x(x-1) = -x-2 \Rightarrow 6x^2 - 6x = -x-2 \Rightarrow 6x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow$

$x = \dfrac{5+\sqrt{25-4\cdot 6\cdot 2}}{12} = \dfrac{5+\sqrt{-23}}{12} \Rightarrow$ geen oplossing.

**b** $x(x-1) < |x+2|$ splitsen in twee ongelijkheden
$x < -2 \Rightarrow x(x-1) < -x-2 \Rightarrow x^2 - x < -x-2 \Rightarrow x^2 < -2 \Rightarrow$ geen oplossing
$x \geq -2 \Rightarrow x(x-1) < x+2 \Rightarrow x^2 - x < x+2 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 < 0$

$x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2+\sqrt{4+8}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{12}}{2} = \dfrac{2+2\sqrt{3}}{2} = 1+\sqrt{3}$ of

$x = \dfrac{2-\sqrt{4+8}}{2} = \dfrac{2-\sqrt{12}}{2} = \dfrac{2-2\sqrt{3}}{2} = 1-\sqrt{3}$

De oplossing wordt dan $1-\sqrt{3} < x < 1+\sqrt{3}$.

**c** $x + \sqrt{x+1} = 5 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 5 - x \Rightarrow x+1 = (5-x)^2 \Rightarrow$
$x+1 = 25 - 10x + x^2 \Rightarrow x^2 - 11x + 24 = 0 \Rightarrow$
$(x-3)(x-8) = 0 \Rightarrow x = 3$ of $x = 8$ Controle geeft $x = 8$ voldoet niet. de oplossing is dus $x = 3$.

**d** $|x| < |2x-2| - 4$
$x < 0 \Rightarrow -x < -(2x-2) - 4 \Rightarrow -x < -2x + 2 - 4 \Rightarrow x < -2$
$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow x < -(2x-2) - 4 \Rightarrow x < -2x + 2 - 4 \Rightarrow 3x < -2 \Rightarrow x < -\frac{2}{3}$ geen oplossing
$x > 1 \Rightarrow x < (2x-2) - 4 \Rightarrow x < 2x - 6 \Rightarrow -x < -6 \Rightarrow x > 6$
De oplossing is dus $x < -2$ of $x > 6$

**e** $\dfrac{2^{2-x}}{1+2^{2x}} = 2^{-x} \Rightarrow 2^{2-x} = 2^{-x}(1+2^{2x}) \Rightarrow 2^{2-x} = 2^{-x} + 2^{x} \Rightarrow$

$2^2 \cdot 2^{-x} = 2^{-x} + 2^{x} \Rightarrow 4 \cdot 2^{-x} = 2^{-x} + 2^{x} \Rightarrow 3 \cdot 2^{-x} = 2^{x} \Rightarrow$
$3 = 2^{2x} \Rightarrow 2x = {}^{2}\log 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot {}^{2}\log 3 = {}^{2}\log \sqrt{3}$

**8a** $V_{TOE} = V_B(\frac{C_1}{C_2} - 1) \Rightarrow V_{TOE} = 0,4(\frac{10}{8} - 1) = 0,4 \cdot 0,25 = 0,1$ liter toevoegen.

**b** Eindvolume is dan 0,5 liter zoutoplossing.

**c** $V_{EIND} = V_B + V_{TOE} = V_B + V_B(\frac{C_1}{C_2} - 1) = V_B\left(1 + \frac{C_1}{C_2} - 1\right) = V_B \cdot \frac{C_1}{C_2}$

**9a** $\angle CAB = \angle CBA$
$|AD| = |CD| \Rightarrow \angle ACD = \angle CAD = \frac{1}{2}\angle CAB$
$\angle ACB + \angle CAB + \angle ABC = 180° \Rightarrow \angle ACD + \angle CAB + \angle CAB = 180° \Rightarrow$
$\frac{1}{2}\angle CAB + \angle CAB + \angle CAB = 180° \Rightarrow 2\frac{1}{2}\angle CAB = 180° \Rightarrow \angle CAB = 72° \Rightarrow$
$\frac{1}{2}\angle CAB = \angle ACD = \angle C = 36°$

**b** $\angle ADB = 180° - \angle DAB - \angle DBA = 180° - 36° - 72° = 72°$

$$\left.\begin{array}{l}\angle CAB = \angle ABD = 72° \\ \angle ABC = \angle BDA = 72°\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta BDA$$

**c** $\angle ADB = \angle ABD = 72° \Rightarrow \Delta BDA$ is gelijkbenig $\Rightarrow |AB| = |AD| = q$
Gegeven was $|AD| = |CD| \Rightarrow |CD| = q$ en $|AC| = |BC| \Rightarrow |BC| = p$
$|BD| = |BC| - |CD| = p - q$ (1)

Ook geldt: $\Delta ABC \sim \Delta BDA \Rightarrow \frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BA|} \Rightarrow \frac{q}{|BD|} = \frac{p}{q} \Rightarrow p \cdot |BD| = q^2 \Rightarrow |BD| = q^2$ (2)

Uit (1) en (2) volgt $|BD| = p - q = \frac{q^2}{p}$

**d** $p - q = \frac{q^2}{p} \Rightarrow p(p-q) = q^2 \Rightarrow p^2 - pq = q^2 \Rightarrow p^2 - pq - q^2 = 0$ Dit is op te vatten als een tweedegraads vergelijking met variabele p en geeft dan:

$$p = \frac{q + \sqrt{q^2 - 4q^2}}{2} = \frac{q + \sqrt{5q^2}}{2} = \frac{q + q\sqrt{5}}{2} = q\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\right) \Rightarrow \frac{p}{q} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

# Extra oefening bij hoofdstuk 7

**1a** Periode is 24 $\Rightarrow \dfrac{2\pi}{b} = 24 \Rightarrow b = \dfrac{2\pi}{24} = \frac{1}{12}\pi$

**b** Het amplitude is 3

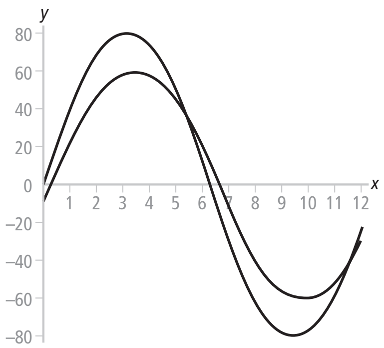
**c** Op het interval $\left[0,\ 24\right\rangle$ zijn er 2 snijpunten dus op het interval $\left[0,\ 60\right]$ zijn er $\dfrac{60}{24} \cdot 2 = 5$ snijpunten.

**d** De toppen zitten bij $x = 0, x = 12$ enz. De toppen zijn:
$(0,\ -3),(12,\ 3),(24,\ -3),(36,\ 3),(48,\ -3),(60,\ 3)$

**2a** De periode is $\dfrac{2\pi}{0,5} = 4\pi \approx 12,57$ uur, dus 754 minuten = 12 uur en 34 minuten.

**b** Het getijdeverschil is $2 \times 80 = 160$ cm.

**c**




**d** De formule voor Den Helder wordt dan: $h_{DH} = 60\sin(0,5(t - \frac{1}{3}))$ .

**3a** De periode is $\dfrac{2\pi}{\pi} = 2$ seconden.

**b** Plot de grafiek en de lijnen $y = 2,5$ en $y = -2,5$ en bepaal de snijpunten.
Je vindt: $t = 0,17$ ; $t = 0,83$ ; $t = 1,17$ en $t = 1,83$ op de eerste periode.
De andere snijpunten zijn dan steeds een periode verder, dus:
$t = 2,17$ ; $t = 2,83$ ; $t = 3,17$ ; $t = 3,83$ ; $t = 4,17$ ; $t = 4,83$ ; $t = 5,17$ ; $t = 5,83$ ; $t = 6,17$ ; $t = 6,83$; $t = 7,17$ ; $t = 7,83$ ; $t = 8,17$ ; $t = 8,83$ ; $t = 9,17$ en $t = 9,83$.

**4a** Plot de grafiek van *f* en de lijn $y = 2$ op het interval $\left[-\pi,\ 3\pi\right]$ en bepaal de snijpunten. je vindt: $x = -2,09; x = 0; x = 4,19$ en $x = 2$

**b** Plot de grafiek van *f* en de lijn $y = 4$ op het interval $\left[-\pi,\ 3\pi\right]$ en bepaal de snijpunten. je vindt: $x = -\pi; x = 1,05; x = \pi; x = 7,33$ en $x = 3\pi$ . De oplossing van de ongelijkheid is dan : $\left\langle 1,05; \pi\right\rangle \cup \left\langle 7,33;\ 3\pi\right\rangle$.

**5a** Plot de grafiek van $Y_1 = 2\sin(3x - 1)$ op het domein $\left[-\pi,\ 2\pi\right]$
en bepaal met je rekenmachine de nulpunten. Je vindt:
$x = -2,81; x = -1,76; x = -0,71; x = 0,33; x = 1,38; 2,43$ ; $x = 3,47; x = 4,52$; en $x = 5,57$
De oplossing van de ongelijkheid wordt dan:
$\left[-\pi;\ -2,81\right\rangle \cup \left\langle -1,76;\ -0,71\right\rangle \cup \left\langle 0,33;\ 1,38\right\rangle \cup \left\langle 2,43; 3,47\right\rangle \cup \left\langle 4,52; 5,57\right\rangle$

**b** Plot de grafiek van $Y_1 = 3 + \sin(x + 5)$ en $Y_2 = 3,2$ op het domein $\left[-\pi,\ 2\pi\right]$ en bepaal met je rekenmachine de nulpunten. Je vindt: $x = -2,06; x = 1,48; x = 4,22$
De oplossing van de ongelijkheid wordt: $\left\langle -2,06;\ 1,48\right\rangle \cup \left\langle 4,22;\ 2\pi\right]$.

**c** Plot de grafiek van $Y_1 = 2 - 3\cos 4x$ en $Y_2 = 4$ op het domein $\left[-\pi,\ 2\pi\right]$ en bepaal met je rekenmachine de nulpunten. Je vindt: $x = -2,56; x = -2,14; x = -1; x = -0,58; x = 0,58; x = 1$ ; $x = 2,14; x = 2,56; x = 3,72; x = 4,14; x = 5,29$ en $x = 5,71$
De oplossing van de ongelijkheid wordt dan:
$\left[-\pi,\ -2,56\right\rangle \cup \left\langle -2,14;\ -1\right\rangle \cup \left\langle -0,58;\ 0,58\right\rangle \cup \left\langle 1;2,14\right\rangle \cup \left\langle 2,56;3,72\right\rangle \cup$
$\left\langle 4,14;5,29\right\rangle \cup \left\langle 5,71;2\pi\right]$

**d** $1 < 4 - 3\sin x \Rightarrow 3\sin x < 3 \Rightarrow \sin x < 1 \Rightarrow$ oplossing $\left[-\pi,\ \tfrac{1}{2}\pi\right\rangle \cup \left\langle \tfrac{1}{2}\pi, 2\pi\right]$

# Extra oefening bij hoofdstuk 8

**1a** De hoogte vind je door te kijken bij $t = 0$ . De toren is dus 105 meter.

**b** Plot de grafiek en bepaal het maximum, je vindt dat de maximale hoogte 125 meter is na 2 seconden.

**c** Het differentiequotiënt op $\left[4;4,1\right]$ is $\dfrac{h(4,1)-h(4)}{0,1} = \dfrac{102,95-105}{0,1} = \dfrac{-2,05}{0,1} = -20,5$ m/s

Het differentiequotiënt op $\left[4;\ 4,01\right]$ is $\dfrac{h(4,01)-h(4)}{0,01} = \dfrac{104,7995-105}{0,01} = \dfrac{-0,2005}{0,01} = -20,05$ m/s

**d** $h(t) = -5t^2 + 20t + 105 \Rightarrow h'(t) = -10t + 20$
$h'(4) = -10 \cdot 4 + 20 = -20$ m/s. Het antwoord is negatief omdat er sprake is van een snelheid omlaag. de uitkomsten van opdracht c zijn dus een goede benadering. hoe kleiner het interval hoe beter de benadering.

**2a** $f(x) = 4x^2 + x \Rightarrow f'(x) = 8x + 1$

| *x* | –6 | –5 | –4 | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *helling=f'(x)* | –431 | –249 | –127 | –53 | –15 | –1 | 1 | 3 | 17 |

| 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|
| 55 | 129 | 251 | 433 |

**b** Zoals uit bovenstaande tabel blijkt is de helling –127 voor $x = -4$ , dus in het punt (–4, 124).

**c** Helling gelijk aan 2, dat wil zeggen dat de hellingsfunctie,
$f'(x) = 2 \Rightarrow 2x^3 + 1 = 2 \Rightarrow 2x^3 = 1 \Rightarrow x^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx 0,79$ .

**3a** $f(x) = 4x^2 + 5 \Rightarrow f'(x) = 8x \Rightarrow f'(1) = 8$

**b** $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f'(x) = 8x \Rightarrow \left(\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{x=2} = 16$

**c** $f'(x) = -1 \Rightarrow 8x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{8}$

**d** Helling gelijk aan $12 \Rightarrow f'(x) = 12 \Rightarrow 8x = 12 \Rightarrow x = 1\frac{1}{2}$ .
$f(1\frac{1}{2}) = 4 \cdot (1\frac{1}{2})^2 + 5 = 9 + 5 = 14$
Dus in het punt $(1\frac{1}{2}\ ,\ 14)$ is de helling gelijk aan 12.

**e** De raaklijn in het punt $(2,\ 21)$ is van de vorm $y = ax + b$
$a = f'(2) = 16 \Rightarrow y = 16x + b$ .
De lijn gaat door het punt $(2,\ 21)$ , dus $21 = 16 \cdot 2 + b \Rightarrow b = -11$
De raaklijn is : $y = 16x - 11$

**4a** $f(x) = 30x^7 \Rightarrow f'(x) = 210x^6$

**b** $f(x) = 30 + x^7 \Rightarrow f'(x) = 7x^6$

**c** $f(x) = -28x^2 - 18 \Rightarrow f'(x) = -56x$

**d** $g(t) = 15t - 3 \Rightarrow g'(t) = 15$

**e** $h(u) = \frac{1}{2}u^6 + 2^3 \Rightarrow h'(u) = 3u^5$

**f** $j(x) = \sqrt{7} \Rightarrow j'(x) = 0$

**5a** $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + 4\frac{1}{2}$ snijpunt met de $y$-as: $f(0) = 4\frac{1}{2}$ dus $B(0,\ 4\frac{1}{2})$
Snijpunt met de $x$-as: $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{6}x^3 + 4\frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{6}x^3 = -4\frac{1}{2} \Rightarrow x^3 = -27 \Rightarrow x = -3$
Het snijpunt met de $x$-as is dus $A(-3,\ 0)$

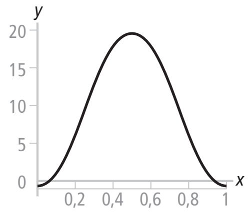
**b** $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$ Dus de helling in $B$ is 0.
$f'(-3) = \frac{1}{2} \cdot (-3)^2 = 4\frac{1}{2}$ . dus de helling in $A$ is $4\frac{1}{2}$ .

**c** $y = 4\frac{1}{2}x + 13\frac{1}{2}$ heeft helling $4\frac{1}{2}$ , dezelfde helling als in $A$.
De lijn gaat ook door $A(-3,0)$ , want $4\frac{1}{2} \cdot -3 + 13\frac{1}{2} = 0$

**d** Raaklijn in punt B heeft helling 0 en is dus horizontaal, de lijn gaat door $B(0,\ 4\frac{1}{2})$ .
Die raaklijn is dus de lijn $y = 4\frac{1}{2}$ .

# Oefentoets bij de hoofdstukken 7 en 8

**1a**




**b** Plot tevens de lijn $Y_2 = 5$ en bepaal de snijpunten. Je vindt $j = 0,1795$ en $j = 0,8205$. Het groeiseizoen duurt dus $0,8205 - 0,1795 = 0,641$ deel van een jaar dat is $0,641 \cdot 365 \approx 234$ dagen.

**c** Op dezelfde wijze als bij opdracht b duurt het groeiseizoen nu 0,6082 deel van een jaar en dat is ongeveer 222 dagen. het groeiseizoen is nu 12 dagen korter.

**2a** Functie *f*: amplitude 2 en periode $2\pi$.
Functie *g*: amplitude 2 en periode $\frac{2}{3}\pi$.
Functie *h*: amplitude 1 en periode $2\pi$.

**b** De grafiek van de functie *f* ontstaat uit die van $y = \sin x$ door vermenigvuldiging met 2 ten opzichte van de *x*-as, gevolgd door een verschuiving 1 omhoog.

**c** $f(x) = 1 + 2\sin x$.

**d** De grafiek van de functie *g* ontstaat uit die van $y = \cos x$ door vermenigvuldiging met $\frac{1}{3}$ ten opzichte van de *y*-as, gevolgd door een vermenigvuldiging met 2 ten opzichte van de *x*-as.

**e** $g(x) = 2\cos 3x$

**f** De evenwichtsstand van de grafiek van de functie *h* is $y = 2$. amplitude 1 en periode $2\pi$. Ook is er nog een verschuiving naar links van $\frac{1}{3}\pi$.
$h(x) = 2 + \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$

**g** $h(x) = 1$ dat zijn de minima. De punten op het interval $[0,\ 20]$ zijn
$(1\frac{1}{6}\pi,\ 1)$ ; $(3\frac{1}{6}\pi,\ 1)$ en $(5\frac{1}{6}\pi,\ 1)$ .

**3a** Plot de grafieken van $Y_1 = 3 - 4\cos 2x$ en $Y_2 = 1$ en bepaal de snijpunten. Je vindt $x = 0,52; x = 2,62; x = 3,67$ en $x = 5,76$.

**b** Plot de grafieken van $Y_1 = 3 + 2\sin 2x$ en $Y_2 = 2$ en bepaal de snijpunten. Je vindt $x = 1,83; x = 2,88; x = 4,97$ en $x = 6,02$. De oplossing van de ongelijkheid wordt dan
$[0;\ 1,83\rangle \cup \langle 2,88;\ 4,97\rangle \cup \langle 6,02;\ 2\ \ ]$

**c** $\sin x \cdot \cos 2x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$ of $\cos 2x = 0 \Rightarrow$
$x = 0; x = \pi; x = 2\pi; x = \frac{1}{4}\pi; x = \frac{3}{4}\pi; x = 1\frac{1}{4}\pi; x = 1\frac{3}{4}\pi$

**d** $\sin x \cdot (1 + \cos 2x) = 0 \Rightarrow \sin x = 0$ of $\cos 2x = -1 \Rightarrow$
$x = 0; x = \pi; x = 2\pi; x = \frac{1}{2}\pi; x = 1\frac{1}{2}\pi$
De oplossing van de ongelijkheid wordt:
$\langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle \cup \langle \frac{1}{2}\pi, \pi\rangle \cup \langle \pi, 1\frac{1}{2}\pi\rangle \cup \langle 1\frac{1}{2}\pi, 2\pi\rangle$

**4a** $f(x) = a\sin(bx)$ en *f* heeft amplitude 5, dan is $a = 5$ of $a = -5$. de periode is
$\Rightarrow b = \dfrac{2\pi}{\pi} = 2$.

**b** $f(x) = a\sin(bx)$ en *f* heeft amplitude $\pi$, dan is $a = \pi$ of $a = -\pi$. de periode is
$5 \Rightarrow b = \dfrac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$

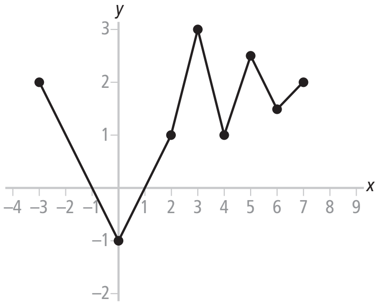
**c** $f(x) = a\sin(bx)$ en *f* heeft periode $4 \Rightarrow b = \dfrac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$. Dus $f(x) = a\sin(\frac{1}{2}\pi x)$.
Door het punt $(1, -4) \Rightarrow a\sin(\frac{1}{2}\pi) = -4 \Rightarrow a = -4$ .
Dus $a = -4$ en $b = \frac{1}{2}\pi$

# Oefentoets bij de hoofdstukken 7 en 8

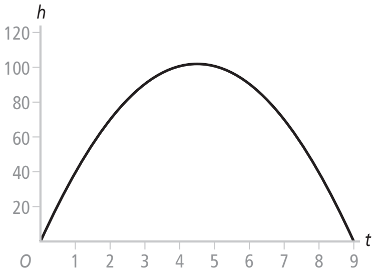
**5** Maak eerst een tabel.

| $x$ | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2 | 1 | 0 | –1 | 0 | 1 | 3 | 1 | $2\frac{1}{2}$ | $1\frac{1}{2}$ | 2 |

Teken nu de punten in een assenstelsel en verbind deze.




**6a**




Voor $t = 0$ en $t = 9$ wordt de functiewaarde 0, dus $0 \le t \le 9$

**b** De functie is een bergparabool. De top ligt dus midden tussen de nulpunten, dus voor $t = 4\frac{1}{2}$ .

$h(4\frac{1}{2}) = 45 \cdot 4\frac{1}{2} - 5 \cdot (4\frac{1}{2})^2 = 101{,}25$ meter is de maximum hoogte.

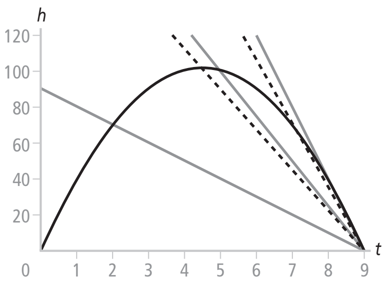
**c** De steen valt omlaag van $t = 4\frac{1}{2}$ tot $t = 9$ . De gemiddelde snelheid in die tijd is.

$\frac{h(9) - h(4{,}5)}{4{,}5} = \frac{0 - 101{,}25}{4{,}5} = -22{,}5$ , dus de gemiddelde snelheid is 22,5 m/s.

**d** $\left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)_{[2,9]} = \frac{h(9) - h(2)}{7} = \frac{0 - 70}{7} = -10$ ; $\left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)_{[5,9]} = \frac{h(9) - h(5)}{4} = \frac{0 - 100}{4} = -25$

$\left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)_{[7,9]} = \frac{h(9) - h(7)}{2} = \frac{0 - 70}{2} = -35$ ; $\left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)_{[8,9]} = \frac{h(9) - h(8)}{1} = \frac{0 - 40}{1} = -40$

**e**




**f** De steen komt na 9 seconden op de grond.

$h'(x) = 45 - 10t$ . De snelheid warmee de steen op de grond komt is dan

$h'(9) = 45 - 10 \cdot 9 = -45$ m/s.

**7a** $f(x)=\frac{2}{3}x^9-10x\sqrt{x}=\frac{2}{3}x^9-10x^{1\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=6x^8-15x^{\frac{1}{2}}=6x^8-15\sqrt{x}$

**b** $g(x)=(x+1)(x^2-x+1)=x^3-x^2+x+x^2-x+1=x^3+1 \Rightarrow g'(x)=3x^2$

**c** $h(x)=\left(\frac{2}{x}-x\right)\left(\frac{1}{x}+x^2\right)=(2x^{-1}-x)(x^{-1}+x^2)=2x^{-2}+2x-1-x^3 \Rightarrow$

$h'(x)=-4x^{-3}+2-3x^2 \Rightarrow h'(x)=-\frac{4}{x}-3x^2+2$

**d** $k(x)=\frac{x^2\sqrt{x}-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}=x^2-1+x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow k'(x)=2x-\frac{1}{2}x^{-1\frac{1}{2}}=2x-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

**8a** Na 5 kwartier heeft hij $s(5)=0,5\cdot 5^2-0,01\cdot 5^4=6,25$ km gelopen.
De gemiddelde snelheid is dan $\frac{4}{5}\cdot 6,25=5$ km/u.

**b** $s'(t)=v(t)=t-0,04t^3$

**c** Beginsnelheid : $v(0)=0$ km/kwartier = 0 km/uur
Eindsnelheid: $v(5)=5-0,04\cdot 5^3=0$ km/kwartier = 0 km/uur.
De maximale snelheid; plot $Y_1=t-0,04t^3$ en bepaal met je rekenmachne het maximum.
Je vindt maximale snelheid 1,92 km/kwartier = 7,7 km/u.

**9a** De opbrengst is eerst lager dan de kosten, maar de opbrengst stijgt sneller dan de kosten. Nadat de productie voldoende is gestegen zijn de kosten lager dan de opbrengst. Op een gegeven moment daalt de opbrengst weer en worden de kosten uiteindelijk hoger dan de opbrengst.

**b** De helling geeft de snelheid waarmee de kosten en de opbrengst stijgen aan. wanneer die hellingen gelijk zijn stijgen zij dus even snel. Dat is het geval bij een productie van ongeveer 10 à 11 tuinkabouters.

**c** De winst is het verschil tussen de opbrengst en de kosten. Dus waar dat verschil het grootst is is de winst het grootst.

**d** De winst is eerst negatief, dus verlies. daarna neemt de winst toe en vervolgens weer af om tenslotte weer in verlies te eindigen. Maximale winst zal er zijn als beide grafieken even sterk stijgen, dus bij een productie van 10 à 11 tuinkabouters.

**e** Voor de opbrengst geldt : Opbrengst = verkochte hoeveelheid x prijs.
Dus $O=q\cdot p=q(12-0,5q)$

**f** $O=q(12-0,5q)$ en $K=0,1q^2+10$ . Voor de winstfunctie geldt dus:
$W=q(12-0,5q)-(0,1q^2+10)=12q-0,5q^2-0,1q^2-10=-0,6q^2+12q-10$
$W'(q)=-1,2q+12$ . De winst is maximal als
$W'(q)=0 \Rightarrow -1,2q+12=0 \Rightarrow 1,2q=12 \Rightarrow q=10$ Er is dus inderdaad maximale winst bij een productie en verkoop van 10 tuinkabouters per dag.