Blok 3 - Vaardigheden

bladzijde 174

1a $3x+1=-3x+6$
$6x=5$
$x=\frac{5}{6}$

b $7-3k=2(k+5)$
$7-3k=2k+10$
$-5k=3$
$k=-\frac{3}{5}$

c $4c-9=6c+12$
$-2c=21$
$c=-10\frac{1}{2}$

d $3(2r-7)=33$
$6r-21=33$
$6r=54$
$r=9$

e $2t+5=20+2t$
$5=20$???
Geen oplossing.

f $4(10-b)=-8(b+4)$
$40-4b=-8b-32$
$4b=-72$
$b=-18$

g $3-2(x-5)=2x+5(x-1)$
$3-2x+10=2x+5x-5$
$-9x=-18$
$x=2$

h $\frac{1}{3}x+2\frac{1}{2}=\frac{5}{6}(6x+\frac{1}{5})$
$\frac{1}{3}x+2\frac{1}{2}=5x+\frac{1}{6}$
$-4\frac{2}{3}x=-2\frac{1}{3}$
$14x=7$
$x=\frac{1}{2}$

2a $f(x)=0$ dus $(x-2)(x+2)=0$

b Is overbodig want als een product 0 is weet je dat tenminste één van de factoren 0 moet zijn.

c $(x-2)(x+2)=0$
$x=2$ of $x=-2$

d $f(x)=5$ dus $(x-2)(x+2)=5$

e Als een product 5 is kun je vrijwel niets zeggen over de factoren.

f $(x-2)(x+2)=5$
$x^2-4=5$
$x^2=9$
$x=3$ of $x=-3$

3a $x^2 + 2x = 0$

$x(x+2) = 0$

$x = 0$ of $x = -2$

b $(x+4)(x-4) = x(x+8)$

$x^2 - 16 = x^2 + 8x$

$8x = -16$

$x = -2$

c Je weet dat een factor 0 moet zijn.

$(2x+8)(\frac{1}{3}x - 1) = 0$

$2x + 8 = 0$ of $\frac{1}{3}x - 1 = 0$

$x = -4$ of $x = 3$

4a A: $(x+2)(0,2x-8) = 0$

$x + 2 = 0$ of $0,2x - 8 = 0$

$x = -2$ of $x = 40$

D: $x(x+3)(1\frac{1}{2}x - 6) = 0$

$x = 0$ of $x = -3$ of $x = 4$

H: $(5x+1)(-2x-3) = 0$

$(5x+1) = 0$ of $(-2x-3) = 0$

$5x = -1$ of $-2x = 3$

$x = -\frac{1}{5}$ of $x = -1\frac{1}{2}$

b B: $(2x-5)(2x+5) = 24$

$4x^2 - 25 = 24$

$4x^2 = 49$

$(2x)^2 = 49$

$2x = \pm 7$

$x = \pm 3\frac{1}{2}$

C: $(2x+3)^2 + 2x = 3$

$4x^2 + 12x + 9 + 2x = 3$

$4x^2 + 14x + 6 = 0$

$2x^2 + 7x + 3 = 0$

$(2x+1)(x+3) = 0$

$x = -\frac{1}{2}$ of $x = -3$

E: $(2x-1)^2 = x^2 + 1$

$4x^2 - 4x + 1 = x^2 + 1$

$3x^2 - 4x = 0$

$x(3x-4) = 0$

$x = 0$ of $x = 1\frac{1}{3}$

F: $(x+7)^2=(x-3)(x+5)$
$x^2+14x+49=x^2+2x-15$
$12x=-64$
$x=-5\frac{1}{3}$

G: $(-4x+1)(4x+1)=17$
$-16x^2+1=17$
$-16x^2=16$
$x^2=-1$
Geen oplossing.

H: $(5x+1)(-2x-3)=0$
$5x+1=0$ of $-2x-3=0$
$5x=-1$ of $-2x=3$
$x=-\frac{1}{5}$ of $x=-1\frac{1}{2}$

I: $(x-2)(x+2)=(\frac{1}{2}x+1)^2-4$
$x^2-4=\frac{1}{4}x^2+x+1-4$
$\frac{3}{4}x^2-x-1=0$
$3x^2-4x-4=0$
$(3x+2)(x-2)=0$
$x=-\frac{2}{3}$ of $x=2$

J: $(0,5x+2)^2-2x=20$
$0,25x^2+2x+4-2x=20$
$0,25x^2=16$
$x^2=64$
$x=8$ of $x=-8$

bladzijde 175

5a $f(1)=(1-1)(\frac{1}{2}+2)=0$ en $g(1)=(1-1)^2=0$
b $(1-x)(\frac{1}{2}x+2)=(1-x)^2$
c $\frac{1}{2}x+2-\frac{1}{2}x^2-2x=1-2x+x^2$
$-1\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1=0$
$3x^2-x-2=0$
$(3x+2)(x-1)=0$
$x=-\frac{2}{3}$ of $x=1$
d $\frac{1}{2}x+2=1-x$
$1\frac{1}{2}x=-1$
$x=-\frac{2}{3}$
e Hij deelt door $1-x$ maar dit mag alleen als $1-x\neq 0$
Hij mist zo de oplossing $x=1$

6a Methode 3

b **1**: $(x-4)^2=1$

$x-4=1$ of $x-4=-1$

$x=5$ of $x=3$

2: $(0,4x+3)^2=100$

$0,4x+3=10$ of $0,4x+3=-10$

$0,4x=7$ of $0,4x=-13$

$x=17\frac{1}{2}$ of $x=-32\frac{1}{2}$

3: $(2x-6)^2=5$

$2x-6=\sqrt{5}$ of $2x-6=-\sqrt{5}$

$2x=6+\sqrt{5}$ of $2x=6-\sqrt{5}$

$x=3+\frac{1}{2}\sqrt{5}$ of $x=3-\frac{1}{2}\sqrt{5}$

4: $(\frac{1}{3}x+1)^2=2$

$\frac{1}{3}x+1=\sqrt{2}$ of $\frac{1}{3}x+1=-\sqrt{2}$

$x+3=3\sqrt{2}$ of $x+3=-3\sqrt{2}$

$x=-3+3\sqrt{2}$ of $x=-3-3\sqrt{2}$

bladzijde 176

7a $x(x-4)=45$

$x^2-4x-45=0$

$(x-9)(x+5)=0$

$x=9$ of $x=-5$

b $8+(3x-1)^2=23$

$(3x-1)^2=15$

$3x-1=\sqrt{15}$ of $3x-1=-\sqrt{15}$

$x=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{15}$ of $x=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{15}$

c $(2x+5)(x-1)=3(x-1)$

$x-1=0$ of $2x+5=3$

$x=1$ of $x=-1$

d $5x^2(x+3)=0$

$x=0$ of $x=-3$

e $x^2(2x-9)=7x^2$

$x^2=0$ of $2x-9=7$

$x=0$ of $x=8$

f $1-(x-4)^2=1$

$(x-4)^2=0$

$x=4$

g $(2x-5)^2=36$

$2x-5=6$ of $2x-5=-6$

$2x=11$ of $2x=-1$

$x=5\frac{1}{2}$ of $x=-\frac{1}{2}$

h $(x+2)^2=(3-2x)^2$

$x+2=3-2x$ of $x+2=-(3-2x)$

$x+2=3-2x$ of $x+2=-3+2x$

$3x=1$ of $-x=-5$

$x=\frac{1}{3}$ of $x=5$

i $(3x-4)(2x-3)=0$
$3x-4=0$ of $2x-3=0$
$x=1\frac{1}{3}$ of $x=1\frac{1}{2}$

8a $g(x)=5$
$(1-x)^2=5$
$1-x=\sqrt{5}$ of $1-x=-\sqrt{5}$
$x=1-\sqrt{5}$ of $x=1+\sqrt{5}$
Snijpunten: $(1-\sqrt{5}, 5)$ en $(1+\sqrt{5}, 5)$

b $h(x)=x+2$
$(\frac{1}{2}x+1)^2=x+2$
$\frac{1}{4}x^2+x+1=x+2$
$\frac{1}{4}x^2=1$
$x^2=4$
$x=2$ of $x=-2$
Snijpunten: $(-2, 0)$ en $(2, 4)$

c $g(0)=(1-0)^2=1$ en $h(0)=(0+1)^2=1$

d $g(x)=h(x)$
$(1-x)^2=(\frac{1}{2}x+1)^2$
$1-x=\frac{1}{2}x+1$ of $1-x=-\frac{1}{2}x-1$
$-1\frac{1}{2}x=0$ of $-\frac{1}{2}x=-2$
$x=0$ of $x=4$
Het tweede snijpunt is $(4, 9)$.

9a $x^3=5x+4x^2$
$x^3-4x^2-5x=0$
$x(x^2-4x-5)=0$
$x(x-5)(x+1)=0$
$x=0$ of $x=5$ of $x=-1$

b $2x^3-9x^2+7x=0$
$x(2x^2-9x+7)=0$
$x(2x-7)(x-1)=0$
$x=0$ of $x=3\frac{1}{2}$ of $x=1$

c $3x^4+6x^3-9x^2=0$
$3x^2(x^2+2x-3)=0$
$3x^2(x+3)(x-1)=0$
$x=0$ of $x=-3$ of $x=1$

d $x^3-x^2-x=0$
$x(x^2-x-1)=0$
$x=0$ of $x^2-x-1=0$
$x=0$ of $x=\dfrac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot -1}}{2}$
$x=0$ of $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$
$x=0$ of $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$ of $x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$

10a $3-\sqrt{5x-1}=-2$

$\sqrt{5x-1}=5$

$5x-1=25$

$x=5\frac{1}{5}$

b $\frac{24}{1-2x}=6$

$1-2x=4$

$-2x=3$

$x=-1\frac{1}{2}$

c $2^{4t-3}=32$

$2^{4t-3}=2^5$

$4t-3=5$

$4t=8$

$t=2$

d $-4(5x+\sqrt{2})=8$

$5x+\sqrt{2}=-2$

$5x=-2-\sqrt{2}$

$x=-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\sqrt{2}$

e $\frac{1}{2}(x^2-12)^2=50$

$(x^2-12)^2=100$

$x^2-12=10$ of $x^2-12=-10$

$x^2=22$ of $x^2=2$

$x=\sqrt{22}$ of $x=-\sqrt{22}$ of $x=\sqrt{2}$ of $x=-\sqrt{2}$

f $\sqrt{3x^2+9}=4$

$3x^2+9=16$

$3x^2=7$

$x^2=\frac{7}{3}$

$x=\sqrt{\frac{7}{3}}$ of $x=-\sqrt{\frac{7}{3}}$

11a $(5x-3)(4-\sqrt{x})=0$

$5x-3=0$ of $4-\sqrt{x}=0$

$5x=3$ of $\sqrt{x}=4$

$x=\frac{3}{5}$ of $x=16$

b $(x+1)(x+5)=x^3+5$

$x^2+6x+5=x^3+5$

$x^3-x^2-6x=0$

$x(x^2-x-6)=0$

$x(x-3)(x+2)=0$

$x=0$ of $x=3$ of $x=-2$

c $\frac{1}{2}x-2(8-x)=\frac{1}{4}x$

$\frac{1}{2}x-16+2x=\frac{1}{4}x$

$2\frac{1}{4}x=16$

$9x=64$

$x=7\frac{1}{9}$

d $(\frac{1}{3}x - 6)^2 = 5$

$\frac{1}{3}x - 6 = \sqrt{5}$ of $\frac{1}{3}x - 6 = -\sqrt{5}$

$x - 18 = 3\sqrt{5}$ of $x - 18 = -3\sqrt{5}$

$x = 18 - 3\sqrt{5}$ of $x = 18 - 3\sqrt{5}$

e $\dfrac{2}{10x^2 - 6x} = -4$

$10x^2 - 6x = -\frac{1}{2}$

$20x^2 - 12x + 1 = 0$

$x = \dfrac{12 \pm \sqrt{64}}{40} = \dfrac{12 \pm 8}{40}$

$x = \frac{1}{2}$ of $x = \frac{1}{10}$

f $x^2(x - 6) = (x - 6)$

$x - 6 = 0$ of $x^2 = 1$

$x = 6$ of $x = 1$ of $x = -1$

g $(3 + \sqrt{x - 1})^2 = 100$

$(3 + \sqrt{x - 1}) = 10$ of $(3 + \sqrt{x - 1}) = -10$

$\sqrt{x - 1} = 7$ of $\sqrt{x - 1} = -13$(kan niet)

$x - 1 = 49$

$x = 50$

h $(3 - 2x)^2 = x^2$

$3 - 2x = x$ of $3 - 2x = -x$

$-3x = -3$ of $-x = -3$

$x = 1$ of $x = 3$

bladzijde 177

12a De functie bestaat niet als $x < -4$ het randpunt krijg je dus voor $x = -4$

$f(-4) = a\sqrt{0} - a = -a$ dus is het randpunt $(-4, -a)$.

b $(-3, 0)$ want $f(-3) = a\sqrt{1} - a = 0$

c $|PQ| = y_Q - y_P = f_2(12) - f_1(12) = (2\sqrt{16} - 2) - (\sqrt{16} - 1) = (8 - 2) - (4 - 1) = 6 - 3 = 3$

d De afstand van R tot de x-as is $|f_a(12)| = |(a\sqrt{16} - a)| = |4a - a| = |3a|$

Dus moet gelden $|3a| = 10$

$3a = 10$ of $3a = -10$

En is $a = 3\frac{1}{3}$ of $a = -3\frac{1}{3}$

13a $f_2(x) = 0$

$2x - x^2 = 0$

$x(2 - x) = 0$

$x = 0$ of $x = 2$

b $f_a(x) = 0$

$ax - x^2 = 0$

$x(a - x) = 0$

$x = 0$ of $x = a$

c Als $a = 2$ dan zijn de nulpunten $x = 0$ en $x = 2$ (zie opdracht a)
$x_{TOP} = 1$ en $y_{TOP} = f_2(1) = 1$, dus de top (1, 1).
Als $a = 6$ dan zijn de nulpunten $x = 0$ en $x = 6$ dus $x_{TOP} = 3$ en $y_{TOP} = f_6(3) = 9$,
top (3, 9).
Als $a = -11$ dan zijn de nulpunten $x = 0$ en $x = -11$ dus
$x_{TOP} = -5\frac{1}{2}$ en $y_{TOP} = f_{-11}(-5\frac{1}{2}) = 30\frac{1}{4}$, dus de top $(-5\frac{1}{2},\ 30\frac{1}{4})$

d De nulpunten zijn $x = 0$ of $x = a$ dus $x_{TOP} = \frac{1}{2}a$ en $y_{TOP} = f_a(\frac{1}{2}a) = \frac{1}{4}a^2$, de top is dus
$(\frac{1}{2}a,\ \frac{1}{4}a^2)$

e $a^2 - 64 > 0$
$a^2 > 64$
$a > 8$ of $a < -8$

f $f_a(x) = x + 1$
$ax - x^2 = x + 1$
$x^2 + x - ax + 1 = 0$
$x^2 + (1 - a)x + 1 = 0$
Precies één oplossing als $D = (1 - a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$
$(1 - a)^2 = 4$
$1 - a = 2$ of $1 - a = -2$
$a = -1$ of $a = 3$

14a Invullen van de coördinaten van $P(2, 4)$ in $y = a(x - 2) + 4$ geeft $4 = a(2 - 2) + 4$, dus
$4 = 4$

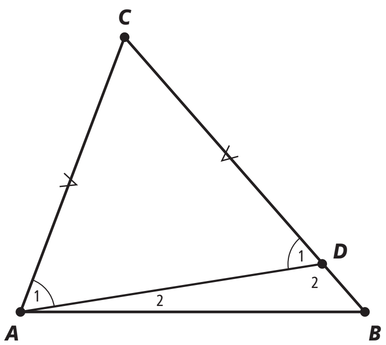
b $A(4, 0)$ invullen in $y = a(x - 2) + 4$ geeft $0 = a(4 - 2) + 4$, dus $a = -2$
$B(-2, 0)$ invullen in $y = a(x - 2) + 4$ geeft $0 = a(-2 - 2) + 4$, dus $a = 1$

c $f(x) = x(x - 2) + 4$
$-\frac{1}{2}(x - 4)(x + 2) = a(x - 2) + 4$
$(x - 4)(x + 2) = -2a(x - 2) - 8$
$x^2 - 2x - 8 = -2ax + 4a - 8$
$x^2 + 2ax - 2x - 4a = 0$
$x^2 + (2a - 2)x - 4a = 0$
Precies één oplossing als $D = (2a - 2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -4a = 0$
$4a^2 - 8a + 4 + 16a = 0$
$a^2 + 2a + 1 = 0$
$(a + 1)^2 = 0$
$a = -1$

Verdieping - Bewijs uit het ongerijmde

bladzijde 178

1a



$$\left.\begin{array}{l}\angle A_1 = \angle D_1 \text{ want } |AC| = |CD| \\ \angle D_1 = \angle A_2 + \angle B \text{ (stelling van de buitenhoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A_1 = \angle A_2 + \angle B \Rightarrow$$

$$\angle A_1 + \angle A_2 = 2 \cdot \angle A_2 + \angle B \Rightarrow \angle A_{1,2} > \angle B$$

b De aanpak met punt D op BC werkt nu niet omdat je er dan vanuit gaat dat $|BC| > |AC|$ en dat moet je nu juist bewijzen.

c Wanneer $|BC| > |AC|$ niet geldt, dan blijven over $|BC| = |AC|$ en $|BC| < |AC|$.

d Gegeven $|BC| = |AC|$.
Dan is ΔABC gelijkbenig, dus $\angle A = \angle B$ en dat is in tegenspraak met $\angle A > \angle B$

e Gegeven $|BC| < |AC|$ Uit opdracht a volgt nu $\angle A < \angle B$ en dat is in tegenspraak met $\angle A > \angle B$.

f De conclusie moet dus wel zijn dat als $\angle A > \angle B$ dan is $|BC| > |AC|$.

g Bij een direkt bewijs ga je uit van het gegeven en bewijs je de veronderstelling, zoals bij opdracht a.
Bij een indirekt bewijs ga je uit van alle mogelijkheden en bewijst dat die allemaal, op één na, een tegenspraak opleveren. Die ene mogelijkheid moet dus wel juist zijn.

2a Gegeven: $|AD| = |DB|$ en $|CD| = \frac{1}{2} \cdot |AB|$
Dan geldt:

$$\left.\begin{array}{l}|CD| = \frac{1}{2} \cdot |AB| \Rightarrow |CD| = |AD| \Rightarrow \angle A = \angle ACD \\ |CD| = \frac{1}{2} \cdot |AB| \Rightarrow |CD| = |DB| \Rightarrow \angle B = \angle DCB\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A + \angle B = \angle ACD + \angle DCB = \angle C$$

$\angle A + \angle B + \angle C = 180° \Rightarrow \angle C + \angle C = 180° \Rightarrow \angle C = 90°$. Dit in tegenspraak met het stomp zijn van $\angle C$.

b Gegeven: $|AD| = |DB|$ en $|CD| > \frac{1}{2} \cdot |AB|$
Dan geldt:

$$\left.\begin{array}{l}|CD| > \frac{1}{2} \cdot |AB| \Rightarrow |CD| > |AD| \Rightarrow \angle A > \angle ACD \\ |CD| > \frac{1}{2} \cdot |AB| \Rightarrow |CD| > |DB| \Rightarrow \angle B > \angle DCB\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A + \angle B > \angle ACD + \angle DCB = \angle C$$

$\angle A + \angle B + \angle C = 180° \Rightarrow \angle C + \angle C < 180° \Rightarrow \angle C < 90°$ Dit in tegenspraak met het stomp zijn van $\angle C$.

c Conclusie: wanneer $\angle C$ stomp is dan is $|CD| < \frac{1}{2} \cdot |AB|$

3a Gegeven: $|AB| > |BF|$

Te bewijzen: $\angle F_{1,2} > 90°$.

$$\left.\begin{array}{l} |AB| > |BF| \Rightarrow \angle F_2 > \angle A_2 \\ |AE| = |EF| \Rightarrow \angle F_1 = \angle A_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \angle F_1 + \angle F_2 > \angle A_1 + \angle A_2 \Rightarrow \angle F_{1,2} > \angle A_{1,2} = 90°$$

b Gegeven: $|BC| > |BF|$

Te bewijzen: $\angle F_{3,4} > 90°$

$$\left.\begin{array}{l} |BC| > |BF| \Rightarrow \angle F_3 > \angle C_2 \\ |DC| = |DF| \Rightarrow \angle F_4 = \angle C_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \angle F_3 + \angle F_4 > \angle C_1 + \angle C_2 \Rightarrow \angle F_{3,4} > \angle C_{1,2} = 90°$$

Uit opdracht a en b volgt dat $\angle F_{1,2,3,4} = \angle F_{1,2} + \angle F_{3,4} > 90° + 90° = 180°$

Dit is in tegenspraak met het gegeven dat D, E, en F op één lijn liggen.

c Gegeven $|AB| < |BF|$

$$\left.\begin{array}{l} |AB| < |BF| \Rightarrow \angle F_2 < \angle A_2 \\ |AE| = |EF| \Rightarrow \angle F_1 = \angle A_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \angle F_1 + \angle F_2 < \angle A_1 + \angle A_2 \Rightarrow \angle F_{1,2} < \angle A_{1,2} = 90° \text{ (1)}$$

$|AB| < |BF| \Rightarrow |BC| < |BF|$

$$\left.\begin{array}{l} |BC| < |BF| \Rightarrow \angle F_3 < \angle C_2 \\ |DC| = |DF| \Rightarrow \angle F_4 = \angle C_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \angle F_3 + \angle F_4 < \angle C_1 + \angle C_2 \Rightarrow \angle F_{3,4} < \angle C_{1,2} = 90° \text{ (2)}$$

Uit (1) en (2) volgt dat $\angle F_{1,2,3,4} = \angle F_{1,2} + \angle F_{3,4} < 90° + 90° = 180°$

Dit is in tegenspraak met het gegeven dat D, E, en F op één lijn liggen.

Het bovenstaande leidt tot de conclusie dat $|AB| = |BF|$

d

$$\left.\begin{array}{l} |AB| = |BF| \Rightarrow \angle A_2 = \angle F_2 \\ |AE| = |EF| \Rightarrow \angle A_1 = \angle F_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \angle EFB = \angle F_1 + \angle F_2 = \angle A_1 + \angle A_2 = 90°$$

e Dan moet je uitgaan van de mogelijkheden: $\angle EFB > 90°$, $\angle EFB = 90°$ en $\angle EFB < 90°$

f Te bewijzen $\angle EFB = 90°$

$$\left.\begin{array}{l} \angle EFB < 90° \Rightarrow \angle F_1 + \angle F_2 < 90° \\ \angle A_1 + \angle A_2 = 90° \\ \angle A_1 = \angle F_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \angle F_2 < \angle A_2 \Rightarrow |AB| < |BF| \text{ (1)}$$

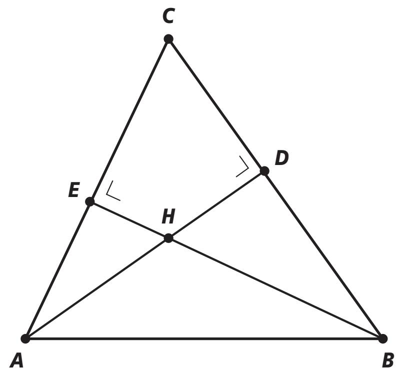
$$\left.\begin{array}{l} \angle EFB < 90° \Rightarrow \angle DFB > 90° \Rightarrow \angle F_3 + \angle F_4 > 90° \\ \angle C_1 + \angle C_2 = 90° \\ \angle C_1 = \angle F_4 \end{array}\right\} \Rightarrow \angle F_3 > \angle C_2 \Rightarrow |BC| > |BF| \text{ (2)}$$

(1) en (2) geeft $|AB| < |BF| < |BC|$. Dit is in tegenspraak met $|AB| = |BC|$

De aanname $\angle EFB > 90°$ leidt op dezelfde wijze tot de tegenspraak $|AB| > |BF| > |BC|$

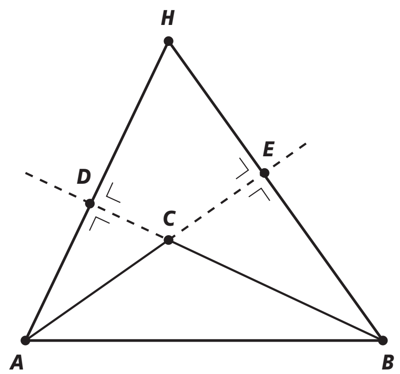
De conclusie is dus $\angle EFB = 90°$

4a



In vierhoek $HDCE$ geldt:
$\angle E + \angle D = 180°$ en $\angle E + \angle H + \angle D + \angle C = 360° \Rightarrow \angle EHD + \angle ACB = 180°$ (1)
$\angle EHD = \angle AHB$ overstaande hoeken (2)
(1) en (2) $\angle AHB + \angle ACB = 180° \Rightarrow \angle AHB = 180° - \angle ACB$

b



Wanneer $\angle C$ stomp is snijden de hoogtelijnen elkaar buiten de driehoek.
$\angle E + \angle D = 180°$ en $\angle E + \angle H + \angle D + \angle C = 360° \Rightarrow \angle DHE + \angle DCE = 180°$ (1)
$\angle DCE = \angle ACB$ overstaande hoeken (2)
(1) en (2) $\angle DHE + \angle ACB = 180° \Rightarrow \angle AHB + \angle ACB = 180° \Rightarrow \angle AHB = 180° - \angle ACB$

c De enige mogelijkheid die nog over blijft is $\angle C = 90°$
In dat geval vallen C en H samen.
Maar ook dan geldt: $\angle AHB = 90° = 180° - 90° = 180° - \angle ACB$.
Het vermoeden is dus juist voor elke driehoek.

Verdieping - Transversalen

bladzijde 180

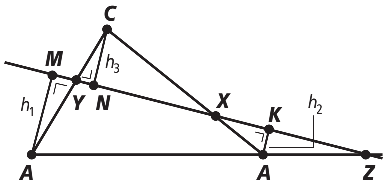
1a -

b -

c -

d Wanneer je goed gemeten hebt vind je dat beide producten gelijk zijn.

2a



b
$$\left.\begin{array}{l}\angle CXN = \angle BXK \\ \angle CNX = \angle BKX = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta CNX \sim \Delta BKX \Rightarrow \frac{CX}{BX} = \frac{CN}{BK} = \frac{h_3}{h_2}$$

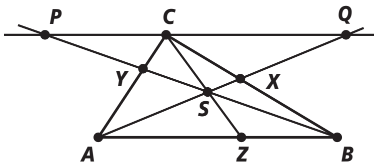
$$\left.\begin{array}{l}\angle CYN = \angle AYM \\ \angle CNY = \angle ANY = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta CNY \sim \Delta AMY \Rightarrow \frac{CY}{AY} = \frac{CN}{AM} = \frac{h_3}{h_1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle BZK = \angle AZM \\ \angle BKZ = \angle AMZ = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BKZ \sim \Delta AMZ \Rightarrow \frac{BZ}{AZ} = \frac{BK}{AM} = \frac{h_2}{h_1}$$

c Uit het bovenstaande volgt:

$$\frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|AY|} \cdot \frac{|AZ|}{|BZ|} = \frac{h_2}{h_3} \cdot \frac{h_3}{h_1} \cdot \frac{h_1}{h_2} = 1$$

3a



b
$$\left.\begin{array}{l}\angle AXB = \angle QXC \text{ (overstaande hoeken)} \\ \angle XAB = \angle XQC \text{ (Z-hoeken)}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AXB \sim \Delta QXC \Rightarrow \frac{|BX|}{|CX|} = \frac{|AB|}{|QC|}$$

c
$$\left.\begin{array}{l}\angle CYP = \angle AYB \text{ (overstaande hoeken)} \\ \angle PCY = \angle BAY \text{ (Z-hoeken)}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta CPY \sim \Delta ABY \Rightarrow \frac{|CP|}{|AB|} = \frac{|CY|}{|AY|}$$

d
$$\left.\begin{array}{l}\angle ASZ = \angle QSC \text{ (overstaande hoeken)} \\ \angle SAZ = \angle SQC \text{ (Z-hoeken)}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AZS \sim \Delta QCS \Rightarrow \frac{|AZ|}{|QC|} = \frac{|ZS|}{|CS|} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle BSZ = \angle PSC \text{ (overstaande hoeken)} \\ \angle ZBS = \angle CPS \text{ (Z-hoeken)}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BZS \sim \Delta PCS \Rightarrow \frac{|BZ|}{|PC|} = \frac{|ZS|}{|CS|} \quad (2)$$

$$(1) \text{ en } (2) \Rightarrow \frac{|ZS|}{|CS|} = \frac{|AZ|}{|QC|} = \frac{|BZ|}{|PC|}$$

e $\frac{|AZ|}{|QC|}=\frac{|BZ|}{|PC|}\Rightarrow\frac{|AZ|}{|BZ|}=\frac{|CQ|}{|PC|}$

Bewijs stelling: uit het voorgaande volgt:

$$\frac{|BX|}{|XC|}\cdot\frac{|CY|}{|YA|}\cdot\frac{|AZ|}{|ZB|}=\frac{|AB|}{|CQ|}\cdot\frac{|CP|}{|AB|}\cdot\frac{|CQ|}{|CP|}=1$$

bladzijde 181

4a Gegeven $\frac{|BX|}{|XC|}\cdot\frac{|CY|}{|YA|}\cdot\frac{|AZ|}{|ZB|}=1 \quad (1)$

AX, BY en CZ^* gaan door één punt T.

Uit de stelling van Ceva volgt dan $\frac{|BX|}{|XC|}\cdot\frac{|CY|}{|YA|}\cdot\frac{|AZ^*|}{|Z^*B|}=1 \quad (2)$

$\Rightarrow (1)$ en (2) $\frac{|AZ|}{|ZB|}=\frac{|AZ^*|}{|Z^*B|}$

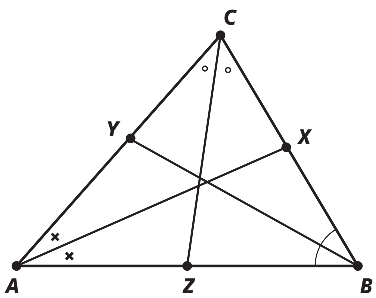
b $\frac{|AZ|}{|ZB|}=\frac{|AZ^*|}{|Z^*B|}\Rightarrow\frac{p}{r+q}=\frac{p+q}{r}\Rightarrow pr=(p+q)(r+q)\Rightarrow pr=pr+pq+qr+q^2\Rightarrow$

$pq+rq+q^2=0\Rightarrow q(p+r+q)=0\Rightarrow q=0$ of $p+r+q=0\Rightarrow$
$q=0$: Z en Z^* vallen samen of $AB=0$ (kan niet want dan is er geen driehoek).
Dus vallen Z en Z^* samen
In het tweede geval, dat Z rechts van Z^* ligt gaat het bewijs op dezelfde wijze.

5a Zwaartelijnen delen de overstaande zijden middendoor. Dus voor de zwaartelijnen AX, BY en CZ geldt: $AZ=ZB\Rightarrow\frac{AZ}{ZB}=1$, $BX=XC\Rightarrow\frac{BX}{XC}=1$ en $CY=YA\Rightarrow\frac{CY}{YA}=1$

Dus geldt: $\frac{|BX|}{|XC|}\cdot\frac{|CY|}{|YA|}\cdot\frac{|AZ|}{|ZB|}=1\cdot1\cdot1=1\Rightarrow$ De zwaartelijnen gaan door één punt.

b



Volgens de naast de opgave gegeven stelling geldt dus: $\frac{|AZ|}{|ZB|}=\frac{|AC|}{|BC|}$

en $\frac{|BX|}{|XC|}=\frac{|AB|}{|AC|}$ en $\frac{|CY|}{|YA|}=\frac{|BC|}{|AB|}$

c Uit opdracht b volgt dan: $\frac{|BX|}{|XC|}\cdot\frac{|CY|}{|YA|}\cdot\frac{|AZ|}{|ZB|}=\frac{|AB|}{|AC|}\cdot\frac{|BC|}{|AB|}\cdot\frac{|AC|}{|BC|}=1\Rightarrow$

de drie bissectrices gaan door één punt (stelling van Ceva)

6a Te bewijzen: $|BZ| = |BX|$
Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l} |MZ| = |MX| \\ \angle MZB = \angle MXB = 90^\circ \\ |MB| = |MB| \end{array}\right\} \Rightarrow \text{(zzr) } \Delta MZB \cong \Delta MXB \Rightarrow |BZ| = |BX|$$

b Op dezelfde wijze bewijs je dat $|AZ| = |AY|$ en $|CY| = |CX|$

c Er geldt dus: $\frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|AZ|}{|ZB|} = \frac{|BZ|}{|XC|} \cdot \frac{|CX|}{|YA|} \cdot \frac{|AY|}{|ZB|} = 1 \Rightarrow$

de drie lijnen AX, BY en CZ gaan door één punt (stelling van Ceva)