Hoofdstuk 8 - De afgeleide

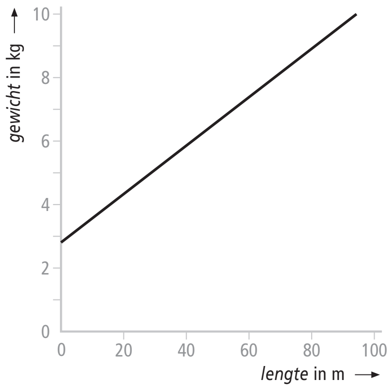
Voorkennis: Lineaire functies

bladzijde 214

V-1a 100 meter snoer weegt $10,8-2,8=8$ kg

b

lengte in m	0	20	40	60	80	100
gewicht in kg	2,8	4,4	6,0	7,6	9,2	10,8



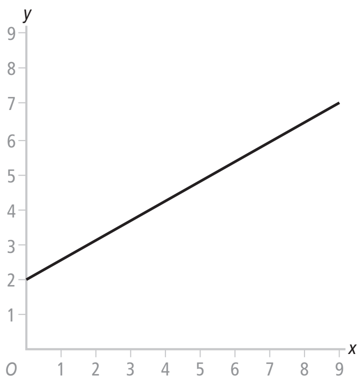
c 100 m weegt 8 kg dus 1 m weegt 0,08 kg

d $\dfrac{6,2-4,8}{0,08}=42,5$ meter

e startgetal = 2,8 hellingsgetal = 0,08

V-2a $x=0 \quad y=0,5\cdot 0+2=2$ Dus $(0, 2)$
$x=2 \quad y=0,5\cdot 2+2=3$ dus $(2,\ 3)$
$x=-2 \quad y=0,5\cdot -2+2=1$ dus $(-2,\ 1)$

b

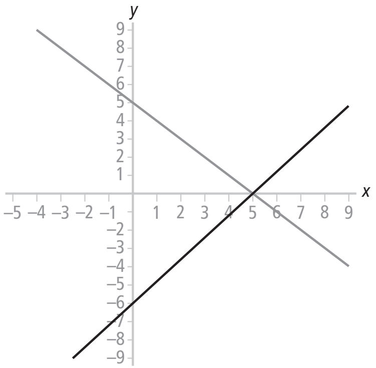


c $x=0 \quad y=2$
$x=6 \quad y=0,5\cdot 6+2=5$ De y-coördinaten verschillen dan 3.

d $y=2 \quad x=0$
$y=22$ dus $22=0,5x+2$ en $x=40$
$x=40$ het verschil in de x-coördinaat is dus $40-0=40$

V-3a

	$1,2x-6$	$-x+5$
$x=0$	-6	5
$x=1$	$-4,8$	4



b $1,2x - 6 = -x + 5$

$2,2x = 11$

$x = 5$

$y = 1,2 \cdot 5 - 6 = 0$ dus snijpunt $(5,\ 0)$

c lijn l: $y = 1,2x + 12$

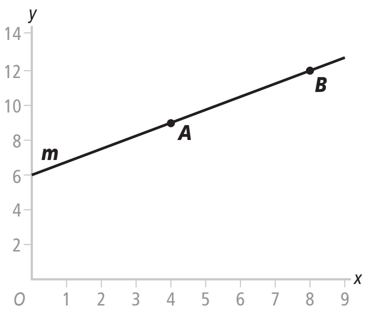
d lijn m: $y = -0,4x + b$

$14 = -0,4x + b$

startgetal $b = 22,8$

bladzijde 215

V-4a



b $y = \dfrac{12-9}{8-4}x + \dfrac{(8-4)9-(12-9)4}{8-4} = 0,75x + 6$.

V-5a $y = x + 6$

b $y = -7x + 23$

c $y = 3$

d $y = -2x - 34$

V-6a $y = 4x + b$

$-7 = 4 \cdot 10 + b$ dus $b = -47$

$y = 4x - 47$

b $y = -0,5x + b$

$5 = -0,5 \cdot -3 + b$ dus $b = 3,5$

$y = -0,5x + 3,5$

c $y = -\frac{2}{3}x + b$

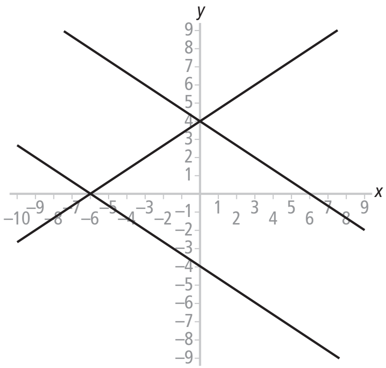
$-3 = -\frac{2}{3} \cdot 2 + b$ dus $b = -1\frac{2}{3}$

$y = -\frac{2}{3}x - 1\frac{2}{3}$

V-7a 20 cm in 6 uur dus $\frac{20}{6} \cdot 8 = 26\frac{2}{3}$ cm in 8 uur
De kaars was dus $26\frac{2}{3}$ cm lang.

b $l = -\frac{20}{6}t + 26\frac{2}{3} = -3\frac{1}{3}t + 26\frac{2}{3}$

V-8a



b $y = -\frac{2}{3}x - 4$

c Zie opdracht a. $y = -\frac{2}{3}x + 4$

d $y = \frac{3}{2}x - 6$

V-9a $-3y = -2x + 18$
$y = \frac{2}{3}x + 6$
hellingsgetal lijn l is $\frac{2}{3}$
hellingsgetal lijn m is -2

b snijpunt met de y-as: $x = 0$ $y = -6$ dus $(0, -6)$
snijpunt met de x-as: $y = 0$ $0 = \frac{2}{3}x - 6$ geeft $x = 9$ dus $(9, 0)$

c snijpunt met de y-as: $x = 0$ $y = 10$ dus $(0, 10)$
snijpunt met de x-as: $y = 0$ $0 = 10 - 2x$ geeft $x = 5$ dus $(5, 0)$

d $\frac{2}{3}x - 6 = 10 - 2x$
$2\frac{2}{3}x = 16$
$x = 6$ dus $y = 10 - 2 \cdot 6 = -2$
snijpunt (6, –2)

V-10a $-2x + 3 = 9 - x$
$-x = 6$
$x = -6$ dus $y = -2 \cdot -6 + 3 = 15$
snijpunt (–6, 15)

b $x = 2(y - 3)$ substitueren in $y = 2(x - 3)$ geeft
$y = 2(2(y - 3) - 3)$
$y = 4y - 12 - 6$
$y = 6$ dus $x = 2(6 - 3) = 6$
snijpunt (6, 6)

c $y = \frac{1}{2}(4 - x)$ substitueren in $3(y - 2) + x = 5$ geeft
$3(\frac{1}{2}(4 - x) - 2) + x = 5$
$6 - 1\frac{1}{2}x - 6 + x = 5$
$x = -10$ dus $y = \frac{1}{2}(4 + 10) = 7$
snijpunt (–10, 7)

d $2x - y = 8$ geeft $y = 2x - 8$
$3(x - 2) + y - 4 = 0$ geeft $y = -3x + 10$
$2x - 8 = -3x + 10$
$x = 3,6$ dus $y = 2 \cdot 3,6 - 8 = -0,8$
snijpunt (3,6; –0,8)

V-11a $\frac{1}{2}(x-2)^2 = 2x-4$
$(x-2)^2 = 4x-8$
$x^2-4x+4 = 4x-8$
$x^2-8x+12 = 0$
$(x-6)(x-2) = 0$
$x = 6$ met $y = 2\cdot 6-4 = 8$
of $x = 2$ met $y = 2\cdot 2-4 = 0$
snijpunten (6, 8) en (2, 0)

b $f(4) = \frac{1}{2}(4-2)^2 = 2$ dus (4, 2) ligt op de grafiek van f.

c (4,2) ligt op de lijn $y = 2x-6$ want $2 = 2\cdot 4-6$
$\frac{1}{2}(x-2)^2 = 2x-6$
$(x-2)^2 = 4x-12$
$x^2-4x+4 = 4x-12$
$x^2-8x+16 = 0$
$(x-4)(x-4) = 0$
$x = 4$
Er is slechts één oplossing dus de lijn raakt de grafiek van f .

8.1 Toenamediagrammen

bladzijde 216

1a In het 6e-uur (dus van 5 uur tot 6 uur).

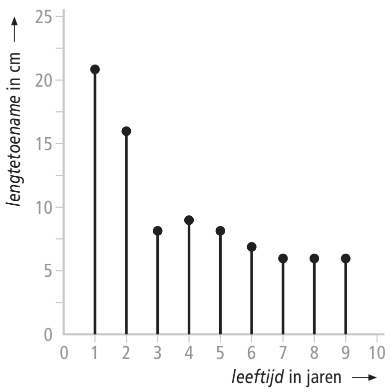
b In het 4e-uur (dus van 3 uur tot 4 uur) is de temperatuur 3,5 °C afgenomen.

c In dat uur is er een temperatuurdaling.

d 7 uur 2 °C
8 uur 2 + 2 = 4 °C (toename van 2 °C in het 8ste-uur)
9 uur 4 + 1 = 5 °C (toename van 1 °C in het 9e-uur))

bladzijde 217

2a



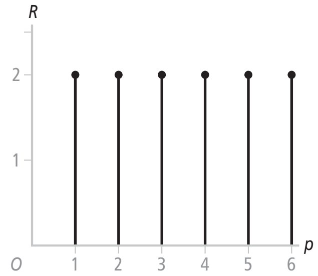
b De tabel en het toenamediagram aanvullen met de punten:

7	8	9
132	138	144

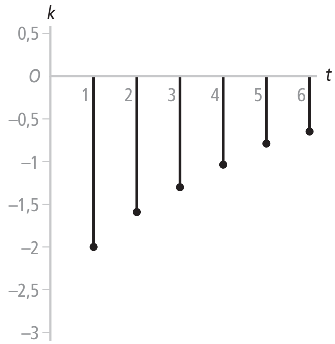
Zie opdracht a.

c $126+6+6+6+6 = 144$ cm

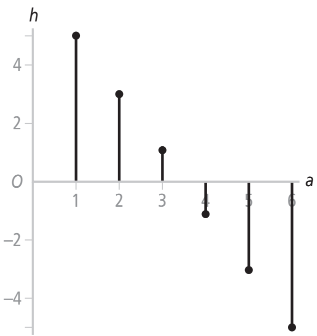
3a



b



c



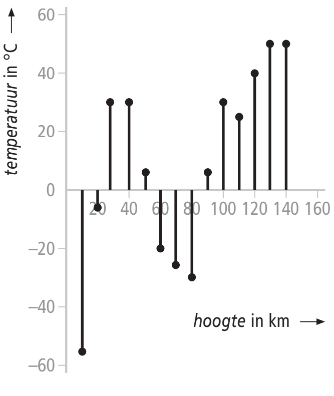
d De toename is per defenitie de toename over de voorgaande periode; hier is de stapgrootte 1 dus $t(x) = f(x) - f(x-1)$

e voor R: toename $= 2p + 1 - (2(p-1) + 1) = 2$

voor K: toename $= 10 \cdot 0,8^t - 10 \cdot 0,8^{t-1} = 10 \cdot 0,8^t(1 - \frac{1}{0,8}) = -2,5 \cdot 0,8^t$

voor h: toename $= -a^2 + 6a - (-(a-1)^2 + 6(a-1)) = -2a + 7$

4a



b De langste staaf is –55 °C.

c Een toename van 50 °C per 10 km.

$h = 140$ km $T = 130$ °C

$h = 200$ km $T = 130 + 6 \cdot 50 = 430$ °C

d De temperatuur heeft een maximum daar waar een toename overgaat in een afname; dus bij $h \approx 55$ km kan een maximum zijn.

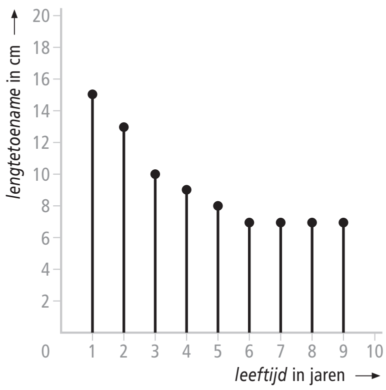
5a $15 + 13 + 10 + 9 + 8 = 55$ cm

b Je kent de lengte bij de geboorte nog niet.

c De toenames worden minder.

d Elyse was $112 - 8 - 9 - 10 - 13 - 15 = 57$ cm lang bij de geboorte.

e



8.2 Gemiddelde verandering

bladzijde 218

6a Nee, want Annika versnelt niet aan het einde van de race maar aan het begin van de race.

b De grafiek van Bea ligt aan het begin hoger dan die van Annika.

c gemiddelde snelheid is $\frac{4}{10} = 0,4$ km per minuut

d Bij 69 minuten over 40 km hoort een gemiddelde snelheid van $\frac{40}{69}$ km per minuut.

$s = \frac{40}{69} t$

7a $s(15) = 5,06$

$s(30) = 14,73$

$\Delta s = s(30) - s(15)$ is de afstand die Annika aflegde van $t = 15$ tot $t = 30$

b gemiddelde snelheid is $\dfrac{s(30) - s(15)}{30 - 15} = 0,64$ km per minuut

c van $t = 15$ tot $t = 20$: gemiddelde snelheid $\dfrac{s(20) - s(15)}{20 - 15} = \dfrac{7,92 - 5,06}{5} = 0,57$ km per minuut

van $t = 15$ tot $t = 16$: gemiddelde snelheid $\dfrac{s(16) - s(15)}{16 - 15} = \dfrac{5,59 - 5,06}{1} = 0,53$ km per minuut

d 0,5 km per minuut

bladzijde 219

8a $f(1)=(3-\frac{1}{2}\cdot 1)^2=6,25$

$f(4)=(3-\frac{1}{2}\cdot 4)^2=1$

b differentiequotiënt $=\dfrac{f(4)-f((1)}{4-1}=-1,75$

9a op $[0,\ 1]$ differentiequotiënt $=\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=3,5$ op

$[1,\ 4]$ differentiequotiënt $=\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=\dfrac{5}{6}$ op

$[4,\ 9]$ differentiequotiënt $=\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\dfrac{f(9)-f(4)}{9-4}=0,3$

b $f(1)=3,5$ en $f(9)=7,5$

helling van lijn l = differentiequotiënt op $[1, 9]=\dfrac{7,5-3,5}{9-1}=0,5$

10a $f(0)=0$ en $f(2)=0$

differentiequotiënt $=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{0-0}{2}=0$ klopt!

b Alle intervallen symmetrisch rond $x=1$ bijvoorbeeld:
$[0, 2]$; $[-1, 3]$; $[-2, 4]$ of $[1-a, 1+a]$ met $a>0$.

11a op $[1,\ 2]$ differentiequotiënt $=\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=\dfrac{0--3}{2-1}=3$ op

$[1,\ 3]$ differentiequotiënt $=\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{1--3}{3-1}=2$ op

$[1,\ 4]$ differentiequotiënt $=\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=\dfrac{0--3}{4-1}=1$

nee; ofschoon de intervallen groter worden toch worden de differentiequotiënten kleiner.

b op $[3;\ 3,5]$ differentiequotiënt $=\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\dfrac{f(3,5)-f(3)}{3,5-3}=\dfrac{0,75-1}{0,5}=-0,5$ op

$[3;\ 3,1]$ differentiequotiënt $=\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\dfrac{f(3,1)-f(3)}{3,1-3}=\dfrac{0,99-1}{0,1}=-0,1$ op

$[3;\ 3,05]$ differentiequotiënt $=\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\dfrac{f(3,05)-f(3)}{3,05-3}=\dfrac{0,9975-1}{0,05-1}=-0,05$ op

$[3;\ 3,01]$ differentiequotiënt $=\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\dfrac{f(3,01)-f(3)}{3,01-3}=\dfrac{0,9999-1}{0,01}=-0,01$

c Het differentiequotiënt lijkt nul te naderen.

De grafiek van f heeft een maximum voor $x=3$ en dus een horizontale raaklijn in $(3;\ 1,5)$.

12a maximum $A(1,\ 3\frac{1}{3})$ en minimum $B(3,\ 2)$

b helling van de lijn door A en $B=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2-3\frac{1}{3}}{3-1}=-\frac{2}{3}\approx-0,67$

c helling van de lijn door O en A $= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3\frac{1}{3} - 0}{1 - 0} = 3\frac{1}{3} \approx 3,33$

helling van de lijn door O en B $= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - 0}{3 - 0} = \frac{2}{3} \approx 0,67$

d

interval	[2, 3]	[2,5; 3]	[2,99; 3]	[3; 3,01]	[2,99; 3,01]
differentiequotiënt	$\frac{2 - 2\frac{2}{3}}{3 - 2} = -\frac{2}{3}$	$\frac{2 - 2{,}208}{3 - 2{,}5} \approx -0{,}42$	$\frac{2 - 2{,}0001}{0{,}01} = -0{,}01$	0,01	0

e helling is 0 in (3, 2); een horizontale raaklijn door het minimum

8.3 Hellingen benaderen

bladzijde 220

13a gemiddelde snelheid is $\frac{50}{30} = 1\frac{2}{3}$ km per minuut of 100 km per uur
b De helling van de grafiek van Carel is soms groter dan die van de grafiek van s .
c Op de intervallen [14, 18] en [22, 25] reed Carel sneller dan 100 km per uur.

14a helling van de raaklijn $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(1,001) - f(1)}{1,001 - 1} \approx 2$
b lijn l : $y = 2x + b$
$4 = 2 \cdot 1 + b$ dus $b = 2$
lijn l : $y = 2x + 2$

15a $Y1 = x^3 - 2x$
$Y2 = 10x - 16$
CALC intersect geeft: snijpunt $S(2,\ 4)$
b hellingsgetal = 10
c op [1,99; 2] $\frac{\Delta f}{\Delta x} \approx 9,94$

op [2; 2,01] $\frac{\Delta f}{\Delta x} \approx 10,06$

op [1,99; 2,01] $\frac{\Delta f}{\Delta x} \approx 10$

de helling van de grafiek van f in S is gelijk aan de helling van de raaklijn

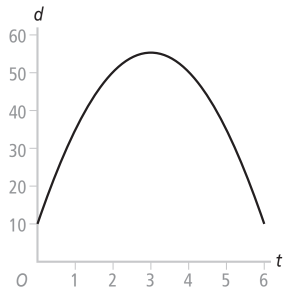
bladzijde 221

16 $Y1 = 6 / (X - 1)$
$Y2 = (Y1(X) - Y1(X - 0,001)) / 0,001$
vensterinstelling: xmin = 0; xmax = 3; ymin = –50; ymax = 20
helling van de grafiek in (7, 1) is $\approx -0,167$

17a voor (–2, 16) is de helling $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(2,001) - f(2)}{2,001 - 2} \approx 18$

b voor (–2, 8) is het hellingsgetal $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(-1,999) - f(-2)}{-1,999 - -2} \approx -6$

18a



b op de top is de raaklijn horizontaal dus hellingsgetal = 0

$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(3,001) - h(3)}{3,001 - 3} \approx 0$

8.4 Hellingen exact

bladzijde 222

19a

interval	differentiequotiënt	Δx
[2; 2,01]	4,01	0,01
[2; 2,001]	4,001	0,001
[2; 2,0001]	4,0001	0,0001
[2; 2,00001]	4,00001	0,00001

b Zie de tabel bij opdracht a.

c Hoe kleiner Δx des te nauwkeuriger is de benadering van het differentiequotiënt.

20a $f(3 + \Delta x) = (3 + \Delta x)^2 = 9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2$

b differentiequotiënt $= \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{3 + \Delta x - 3} = \frac{9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2 - 9}{\Delta x} = 6 + \Delta x$

Als Δx tot nul nadert dan gaat het differentiequotiënt naar 6.
De exacte helling is dus 6.

21a $f(2 + \Delta x) = 5(2 + \Delta x) + 3 = 13 + 5 \cdot \Delta x$

b $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{2 + \Delta x - 2} = \frac{13 + 5 \cdot \Delta x - (5 \cdot 2 + 3)}{\Delta x} = 5$

c De exacte helling in punt (2, 13) is dus 5.

d De grafiek van f is een lijn met helling 5.

bladzijde 223

22a $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(0,5 + \Delta x) - f(0,5)}{0,5 + \Delta x - 0,5} = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$

Dit nadert naar 1 als Δx naar 0 nadert.

b 0

c $2x - 2 = -4$

$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(-2+\Delta x) - f(-2)}{-2+\Delta x - -2} = \frac{2 \cdot -2 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$

Dit nadert naar –4 als Δx naar 0 nadert; klopt!

23a $Y2 = (Y1(X + 0,001) - Y1(X)) / 0,001$

of $Y2 = \text{numDeriv}(Y1, X, X)$

b $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$

24a $Y1 = x^3 - 3x^2$

$Y2 = (Y1(X + 0,001) - Y1(X)) / 0,001$

calc value $x = 1$ geeft $Y2(1) = -3$

b $x = 6$ geeft $f(6) = 108$ dus in $(6,\ 108)$ is de helling 72

$x = -4$ geeft $f(-4) = -112$ dus ook in $(-4,\ -112)$ is de helling 72

c $(0,\ 0)$ en $(2,\ -4)$

d helling = 0 Dus een horizontale raaklijn

bij het maximum (0,0) en bij het minimum (2, –4).

8.5 De afgeleide functie

bladzijde 224

25a steeds 2 erbij als x met 1 toeneemt

b $-4 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 = -20$

c $y = 2x$

d $7 = 2x$ dus $x = 3,5$ en $y = 3,5^2 = 12,25$ dus $(3,5;12,25)$

26a $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$

als Δx tot 0 nadert dan wordt $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 2x$ oftewel $f'(x) = 2x$

$f'(-5) = 2 \cdot -5 = -10$

b $f'(-7) = -14$ en $f'(7) = 14$

f is spiegelsymmetrisch om de lijn $x = 0$; de raaklijnen aan de grafiek van f zijn dat dan ook.

c $f'(2,9) = 2 \cdot 2,9 = 5,8$

27a 1

b $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{x + \Delta x - x}{x + \Delta x - x} = 1$ dus $f'(x) = 1$

$f'(-2) = 1$ en $f'(3) = 1$

c $f'(x) = 1$

28a $f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^3 = (x+\Delta x)(x+\Delta x)(x+\Delta x) =$
$(x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2)(x+\Delta x) = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$

b $f(x+\Delta x) - f(x) = (x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2)(x+\Delta x) = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 =$
$3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$

c $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$

d als Δx tot 0 nadert dan $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 3x^2$ dus $f'(x) = 3x^2$

bladzijde 225

29a $Y1 = X \wedge 4$
$Y2 = (Y1(X + 0,001) - Y1(X)) / 0,001$
$4 \cdot 3^3 = 108$ dus $f'(3) = 108$
$4 \cdot 2^3 = 32$ dus $f'(2)=32$
$4 \cdot 1^3 = 4$ dus $f'(1) = 4$ klopt!

b

$f(x)$	$f'(x)$
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^4	$4x^3$

c $f'(x) = 10x^9$

30a $f'(x) = 5x^4$
$g'(x) = 20x^{19}$

b $f'(1) = 5$

c $g'(-1) = -20$

d $5x^4 = 20$ dus $x^4 = 4$ dus $x = \sqrt{2}$ of $x = -\sqrt{2}$
met respectievelijk $y = 4\sqrt{2}$ en $y = -4\sqrt{2}$ dus $(\sqrt{2},\ 4\sqrt{2})$ en $(-\sqrt{2},\ -4\sqrt{2})$

31a $f'(x) = 3x^2$ dus $f'(1) = 3$
$g'(x) = 6x^5$ dus $g'(1) = 6$
Dus loopt de grafiek van g in (1, 1) steiler dan de grafiek van f.

b $f'(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} = 0,75$

$g'(\frac{1}{2}) = 0,1875$

c $3x^2 = 6x^5$

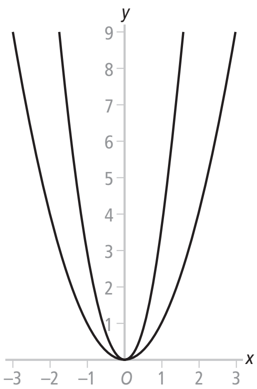
$x^3 = \frac{1}{2}$

$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx 0,794$

nderiv($x^3, x, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$)=1,89 en nderiv($x^6, x, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$)=1,89 klopt!

8.6 Differentiëren

bladzijde 226

32a


b vermenigvuldiging met 3 ten opzichte van de x-as.
c $Y1 = 2X$
$Y2 = (3(X + 0,001)^2 - 3X^2) / 0,001$
d $g'(1) = 6$
e $g'(2) = 12$
f $g'(x) = 6x$

33a Een translatie over +7 ten opzichte van de x-as (7 omhoog schuiven).
b $g'(x) = f'(x)$ immers een verticale translatie (verschuiving) beïnvloed de helling niet.
c $g'(x) = 2x$

34a optellen van de grafieken
b $t = 15$ dus $\frac{50}{60} + \frac{50}{30} = \frac{150}{60} = 2,5$ m/s
$t = 40$ dus $\frac{50}{60} + 0 = \frac{50}{60} \approx 0,83$ m/s
c $s(t) = b(t) + p(t)$
d $s'(t) = b'(t) + p'(t)$

bladzijde 227

35a $f'(x) = 20 \cdot 3x^2 = 60x^2$
b $f'(x) = 20 \cdot 5x^4 + 3x^2 = 100x^4 + 3x^2$
c $f'(x) = -15 \cdot 6x^5 = -90x^5$
d $g'((t) = 2,5 + 5 \cdot 2t^1 = 2,5 + 10t$
e $h'(p) = -2,5 \cdot 4p^3 = -10p^3$

36a $\frac{ds}{dt} = s'(t) = -3t^2$
b $\frac{ds}{dt} = s'(t) = (10^4 t^4)' = 10^4 \cdot 4t^3 = 4000t^3$
c $s = \frac{1}{2}t^8 - 3$ dus $s' = \frac{1}{2} \cdot 8t^7 = 4t^7$
d $s = t^2 + 10t + 25$ dus $s' = 2t + 10$

37a 0, 0 en 0 want het hellingsgetal van de lijn is 0
b $f'(x) = 0$
c $f'(x) = 5 \cdot 0x^{-1} = 0 \cdot x^{-1} = 0$ ja!

38a $s(3,5) = 3,5^3 - 4,5 \cdot 3,5^2 + 12 \cdot 3,5 = 29,75$ km
$\frac{29,75}{3,5} = 8,5$ kilometer per uur
b $s'(t) = 3t^2 - 4,5 \cdot 2t + 12$
$= 3t^2 - 9t + 12$
$s'(1) = 6$ kilometer per uur
$s'(2) = 6$ kilometer per uur
c Haar snelheid op $t = 1$ is gelijk aan haar snelheid op $t = 2$.
d $Y1 = 3t^2 - 9t + 12$
minimum bij $t = 1,5$; minimale snelheid = 5,25 km per uur

39a $Y1 = 0,5x^4 + 3$
$Y2 = -16x$
vensterinstelling: xmin = –5; xmax = 3; ymin = –80; ymax = 100
intersect geeft $x = -3,1$ of $x = -0,19$
b $f'(x) = 0,5 \cdot 4x^3 = 2x^3$
$-16 = 2x^3$
$x = -2$
$f(-2) = 0,5 \cdot (-2)^4 + 3 = 11$ dus $P(-2,\ 11)$
c P ligt op de lijn $y = 16x + p$ als $11 = -16 \cdot -2 + p$ dus als $p = -21$
controle: $Y2 = -16x - 21$ klopt!

8.7 Machtsfuncties en raaklijnen

bladzijde 228

40a $f'(x) = -1 \cdot x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$
b $Y1 = 1/x$ en $Y2 = nderiv(Y1, x, x)$ of $Y2 = (Y1(X + 0,001) - Y1(X)) / 0,001$ klopt!
c $-1 \cdot x^{-2} = -1 \cdot \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{-1}{x^2}$ klopt!
d in de buurt van $x = 0$ is de helling zeer groot (negatief)

41a $f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
b $Y1 = \sqrt{x}$ en $Y2 = nderiv(Y1, x, x)$ of $Y2 = (Y1(X + 0,001) - Y1(X)) / 0,001$ klopt!

42a $g(x) = x^2 - \dfrac{1}{x^2} = x^2 - x^{-2}$
$g'(x) = 2x - -2 \cdot x^{-3} = 2x + 2x^{-3}$
$g'(2) = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2^{-3} = 4 + \frac{1}{4} = 4\frac{1}{4}$
b $Y1 = x^2 + 1/x^2$ en $Y2 = 3\frac{3}{4}x - 3\frac{1}{4}$
c In geen enkele punt van de grafiek is de helling gelijk aan 0.

43a $f'(x) = 7 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(4) = 7 \cdot \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{4}} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$

b $y = 1\frac{3}{4}x + b$

$9 = 1\frac{3}{4} \cdot 4 + b$ dus $b = 2$

bladzijde 229

44a $f(1) = 0,5 \cdot 1^3 - 3 = -2,5$ dus $P(1;\ -2,5)$

$f'(x) = 0,5 \cdot 4x^3 = 2x^3$

$f'(1) = 2 \cdot 1^3 = 2$

$y = 2x + b$

$-2,5 = 2 \cdot 1 + b$ dus $b = -4,5$

vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f door P: $y = 2x - 4,5$

b $f(-1) = 0,5 \cdot (-1)^4 - 3 = -2,5$ dus $Q(-1;\ -2,5)$

$f'(-1) = 2 \cdot (-1)^3 = -2$

$y = -2x + b$

$-2,5 = -2 \cdot -1 + b$ dus $b = -4,5$

vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f door Q: $y = -2x - 4,5$

45a $f'(x) = 3x^2 - 12x - 15$

$f'(0) = -15$

$y = -15x + 6$

$0 = -15 \cdot 0 + b$ dus $b = 0$

vergelijking van de raaklijn: $y = -15x$

b $Y1 = x^3 - 6x^2 - 15x$ en $Y2 = -15x$

intersect geeft: $x = 6$ en $y = -90$ dus het punt $(6, -90)$

46a $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(1 + 0,001) - f(1)}{1 + 0,001 - 1} \approx 3,3$

b $y = 3,3x + b$

$-6 = 3,3 \cdot 1 + b$ dus $b = -9,3$

vergelijking van de raaklijn: $y = 3,3x - 9,3$

c $Y1 = 3 \wedge x - 9$ en $Y2 = 3,3x - 9,3$ klopt!

47a $Y1 = x \wedge 4 - 4x \wedge 3$ en $Y2 = -10x$

de lijn raakt de grafiek niet

b Opgelost moet dan worden $f'(x) = -10 \Rightarrow 4x^3 - 12x^2 = -10$ en dit heeft 3 oplossingen.

Er zijn dus 3 raaklijnen aan dfe grtafiek van f evenwijdig met $y = -10x$.

c $f'(x) = 4x^3 - 4 \cdot 3x^2 = 4x^3 - 12x^2$

$f'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 - 12 \cdot (-1)^2 = -4 - 12 = -16$

$y = -16x + b$

$5 = -16 \cdot -1 + b$ dus $b = -11$

vergelijking van de raaklijn: $y = -16x - 11$

48a $f\,'(x) = 1 - 4 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

$0 = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

$\sqrt{x} = 2$ dus $x = 4$

b Een nulpunt van $f\,'$ komt overeen met de x-coördinaat van een top van de grafiek van *f*, dit kan een maximum of een minimum zijn.
Hier dus een minimum van de grafiek van f.

8.8 Gemengde opdrachten

bladzijde 230

49a $d(0) = 0$ en $d(3,5) = 3,5^2 = 12,25$

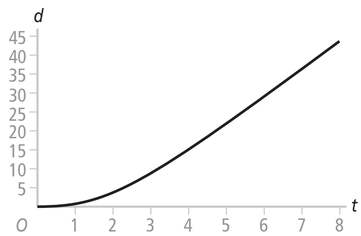
gemiddelde snelheid: $\dfrac{12,25 - 0}{3,5 - 0} = 3,5$ m/s

b $d\,'(t) = 2t$ dus $d\,'(1) = 2$ m/s en $d\,'(2) = 4$ m/s en $d\,'(3) = 6$ m/s en $d\,'(3,5) = 7$ m/s

c 7 m/s

d $d(3,5) = 12,25$ meter, de formule wordt dan
$d = 7t + 12,25 - 7 \cdot 3,5 = 7t - 12,25$. Dus $a = 7$ en $b = -12,25$

e



50a $r(4) = 7$ en $r(6) = 8,35$

gemiddelde snelheid: $\dfrac{8,35 - 7}{6 - 4} = 0,675$ cm/s

b $r\,'(t) = 3 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{3}{2}\dfrac{1}{\sqrt{t}}$

$r\,'(4) = \frac{3}{2}\dfrac{1}{\sqrt{4}} = \frac{3}{4} = 0,75$ cm/s

c $O(4) = \quad (r(4))^2 = 49 \quad \approx 153,93804 \text{ cm}^2$

d $O(4,001) = \quad (1 + 3\sqrt{4,001})^2 \approx 153,97103 \text{ cm}^2$

$\dfrac{O(4,001) - O(4)}{4,001 - 4} \approx 32,99 \approx 33 \text{ cm}^2/\text{s}$

51a $f(5) = 10 \cdot 5^2 = 250$ en $g(5) = 5^3 = 125$

afstand $CD = 250 - 125 = 125$

b CD wordt kleiner bij een verschuiving naar links
CD wordt groter bij een verschuiving naar rechts

c $a\,'(x) = 10 \cdot 2x^1 - 3x^2 = 20x - 3x^2$

d $a\,'(x) = 0$

$0 = 20x - 3x^2$

$x(20 - 3x) = 0$

$x = 0$ (vervalt) of $x = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$

bladzijde 231

52a $O(x) = 90 \cdot 50 - 4x^2 = 4500 - 4x^2$

b $I(x) = \text{lengte} \times \text{breedte} \times \text{hoogte}$

$I(x) = (90 - 2x)(50 - 2x)x$

$I(x) = 4x^3 - 280x^2 + 4500x$

domein $\langle 0,\ 25 \rangle$

c $I\,'(x) = 12x^2 - 560x + 4500$

$0 = 12x^2 - 560x + 4500$

$x = 10,31$ of $x = 36,35$ (vervalt; buiten het domein)

Dus voor $x \approx 10,31$ is de inhoud maximaal.

53a De kosten stijgen zeer sterk naarmate de volledige bescherming wordt benadert.

b Betere bescherming geeft minder diefstal maar ondanks alle bescherming zal er nog wel wat gestolen worden.

c De zeer hoge kosten van ver doorgevoerde bescherming staan niet meer in verhouding tot de kleine vermindering van de diefstallen.

d Noem $T(x) = S(x) + B(x)$

$T(x) = 42000 - 800x + 4x^2 + 0,1x^3$

$= 0,1x^3 + 4x^2 - 800x + 42000$

$T\,'(x) = 0,3x^2 + 8x - 800$

$T\,'(x) = 0$ als $x = 40$

e $T(0) = 42000$ en $T(40) = 22800$

Het bedrijf bespaart 42000-22800=19200 euro.

ICT - Gemiddelde verandering

bladzijde 232

I-1a De 16 km lange wandeling duurde 4 uur

b De gemiddelde snelheid was 4 km/uur

c

tijdsinterval	0 - 1	1 - 2	2 - 3	3 - 4
toename tijd	1	1	1	1
toename afstand	7	1	1	7
gemiddelde snelheid	7	1	1	7

d

tijdsinterval	0 - 0,5	0,5 - 1	1 - 1,5	1,5 - 2
toename tijd	0,5	0,5	0,5	0,5
toename afstand	4,625	2,375	0,875	0,125
gemiddelde snelheid	9,25	4,75	1,75	0,25

tijdsinterval	2 - 2,5	2,5 - 3	3 - 3,5	3,5 - 4
toename tijd	0,5	0,5	0,5	0,5
toename afstand	0,125	0,875	2,375	4,625
gemiddelde snelheid	0,25	1,75	4,75	9,25

e Ab was 2 keer sneller dan de gemiddelde snelheid

Ab was 2 keer gelijk snel aan zijn gemiddelde snelheid

I-2a maximale hoogte op $t = 3$

b $h(0) = 2$ en $h(1) = 27$

gemiddelde snelheid: $\dfrac{h(1) - h(0)}{1 - 0} = \dfrac{27 - 2}{1} = 25$ m/s

c $h(2) = 42$ en $h(3) = 47$ en $h(4) = 42$

gemiddelde snelheid op [2, 3]: $\dfrac{h(3) - h(2)}{3 - 2} = \dfrac{47 - 42}{1} = 5$ m/s

gemiddelde snelheid op [4, 3]: $\dfrac{h(4) - h(3)}{4 - 3} = \dfrac{42 - 47}{1} = -5$ m/s

gemiddelde snelheid op [2, 4]: $\dfrac{h(4) - h(2)}{4 - 2} = \dfrac{42 - 42}{2} = 0$ m/s

d gemiddelde snelheid op [0, 2]: $\dfrac{h(2) - h(0)}{2 - 0} = \dfrac{42 - 2}{2} = 20$ m/s

bladzijde 233

I-3a $f(1) = 9\sqrt{1} - 1 = 8$ en $f(9) = 9\sqrt{9} - 9 = 18$

b differentiequotiënt op[1, 9]: $\dfrac{f(9) - f(1)}{9 - 1} = \dfrac{18 - 8}{8} = \frac{10}{8} = 1\frac{1}{4}$

I-4a $f(0) = 8\sqrt{0} - 2 \cdot 0 = 0$
$f(0) = 8\sqrt{1} - 2 \cdot 1 = 6$
$f(0) = 8\sqrt{4} - 2 \cdot 4 = 8$
$f(0) = 8\sqrt{9} - 2 \cdot 9 = 6$
$f(0) = 8\sqrt{16} - 2 \cdot 16 = 0$

b differentiequotiënt op [0, 1]: $\dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \dfrac{6 - 0}{1} = 6$

differentiequotiënt op [1, 4]: $\dfrac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \dfrac{8 - 6}{3} = \frac{2}{3}$

differentiequotiënt op [4, 9]: $\dfrac{f(9) - f(4)}{9 - 4} = \dfrac{6 - 8}{5} = -\frac{2}{5}$

differentiequotiënt op [9, 16]: $\dfrac{f(16) - f(9)}{16 - 9} = \dfrac{0 - 6}{7} = -\frac{6}{7}$

Het teken (+ of -) van het differentiequotiënt geeft aan of de grafiek op het interval stijgt (+) of daalt (-). De grootte van het differentiequotiënt geeft de gemiddelde verandering van de functie op het interval.

c $f(2) = 8\sqrt{2} - 2 \cdot 2 = 7{,}31$ en $f(1{,}1) = 8\sqrt{1{,}1} - 2 \cdot 1{,}1 = 6{,}19$

differentiequotiënt op [1, 2]: $\dfrac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 1{,}31$

differentiequotiënt op [1; 1,1]: $\dfrac{f(1{,}1) - f(1)}{1{,}1 - 1} = 1{,}9$

De lijn geeft het gemiddelde verloop van de grafiek over het interval.

I-5a $H(1) = 1$ en $H(2) = 8$ en $H(3) = 27$ en $H(4) = 64$

differentiequotiënt op [1, 2]: $\dfrac{H(2) - H(1)}{2 - 1} = 7$

differentiequotiënt op [1, 3]: $\dfrac{H(3) - H(1)}{3 - 1} = 13$

differentiequotiënt op [1, 4]: $\dfrac{H(4) - H(1)}{4 - 1} = 21$

b De grafiek van H is toenemend stijgend.

c $H(1,1) = 1,331$ en $H(1,01) = 1,030301$

differentiequotiënt op [1; 1,1]: $\dfrac{H(1,1) - H(1)}{1,1 - 1} = 3,31$

differentiequotiënt op [1; 1,01]: $\dfrac{H(1,01) - H(1)}{1,01 - 1} = 3,03$

d $H(1,001) = 1,003003001$ en $H(1,0001) = 1,000300030$

differentiequotiënt op [1; 1,001]: $\dfrac{H(1,001) - H(1)}{1,001 - 1} = 3,003$

differentiequotiënt op [1; 1,0001]: $\dfrac{H(1,0001) - H(1)}{1,0001 - 1} = 3,0003$

Voor steeds kleinere intervallen Δx nadert het differentiequotiënt op $\left[1, 1 + \Delta x\right]$ tot 3.

I-6a klopt!

b $f(1) = -9$ en $f(1,001) = -8,99399700$ en $f(1,0001) = -8,999399970$

differentiequotiënt op [1; 1,001]: $\dfrac{f(1,001) - f(1)}{1,001 - 1} = 6,003$

differentiequotiënt op [1; 1,0001]: $\dfrac{f(1,0001) - f(1)}{1,0001 - 1} = 6,0003$

c $y = 9x - 6,75$

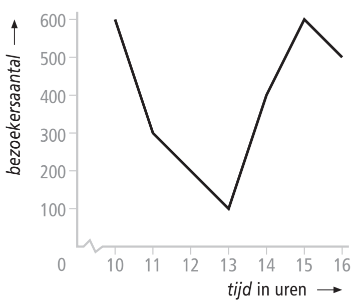
d $y = -24x - 48$

Test jezelf

bladzijde 236

T-1

t in uren	10	11	12	13	14	15	16
bezoekersaantal	600	300	200	100	400	600	500



T-2a $R(13) = 2665$ en $R(15) = 2985$ en $R(16) = 3088$
toename van de omzet van 13 naar 15 machines is 320 duizend euro
toename van de omzet van 13 naar 16 machines is 423 duizend euro

b op [13, 15]: $\dfrac{\Delta R}{\Delta Q} = \dfrac{R(15) - R(13)}{15 - 13} = 160$ duizend euro per machine

op [13, 16]: $\dfrac{\Delta R}{\Delta Q} = \dfrac{R(16) - R(13)}{16 - 13} = 141$ duizend euro per machine

c $R(17) = 3145$ en $R(18) = 3150$ en $R(19) = 3097$

op [16, 17]: $\dfrac{\Delta R}{\Delta Q} = \dfrac{R(17) - R(16)}{17 - 16} = 57$ duizend euro per machine

op [16, 18]: $\dfrac{\Delta R}{\Delta Q} = \dfrac{R(18) - R(16)}{18 - 16} = 31$ duizend euro per machine

op [16, 19]: $\dfrac{\Delta R}{\Delta Q} = \dfrac{R(19) - R(16)}{19 - 16} = 3$ duizend euro per machine

T-3a $f(2 + \Delta x) - f(2) = \dfrac{1}{2 + \Delta x} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2 - (2 + \Delta x)}{(2 + \Delta x) \cdot 2} = -\dfrac{\Delta x}{(2 + \Delta x) \cdot 2}$

b $\dfrac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{2 + \Delta x - 2} = -\dfrac{1}{(2 + \Delta x) \cdot 2}$

c Als Δx naar 0 nadert dan is de exacte helling $-\frac{1}{4}$.

T-4 $Y1 = 0{,}2X^2 + 1{,}2$
$Y2 = \sqrt{\ }(5X - 11)$
$Y3 = nderiv(Y1, X, X)$ óf $Y3 = (Y1(X + 0{,}001) - Y1(X) / 0{,}001$
$Y4 = nderiv(Y2, X, X)$ óf $Y4 = (Y2(X + 0{,}001) - Y2(X)) / 0{,}001$
table geeft: $x = 3{,}043$

bladzijde 237

T-5a $f'(x) = 2x^3$
$f'(1) = 2$

b $f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^4 - 3 = -2\frac{1}{2}$

$y = 2x + b$

$-2\frac{1}{2} = 2 \cdot 1 + b$ dus $b = -4{,}5$

raaklijn door P: $y = 2x - 4{,}5$

c $f'(x) > -2$
$2x^3 < -2$
$x < -1$

T-6a $f'(x) = 0{,}2 - 2x^{19}$

b $s'(t) = 32t$

c $H(m) = m^3 + 5m^2 - 5m - 25$ dus $H'(m) = 3m^2 + 10m - 5$

d $h(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ dus $h'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

T-7a $N(t) = 5t - 5t^{-1} + 5t^{-2}$ dus $N'(t) = 5 + 5t^{-2} - 10t^{-3} = 5 + \dfrac{5}{t^2} - \dfrac{10}{t^3}$

b $A(u) = 10u^{\frac{1}{2}} - 98 + 12u^{-\frac{1}{2}}$ dus $A'(u) = 5u^{-\frac{1}{2}} - 6u^{-1\frac{1}{2}} = \dfrac{5}{\sqrt{u}} - \dfrac{6}{u\sqrt{u}}$

c $g(x) = 3x^{-4} + 5x^{-6}$ dus $g'(x) = -12x^{-5} - 30x^{-7} = -\dfrac{12}{x^5} - \dfrac{30}{x^7}$

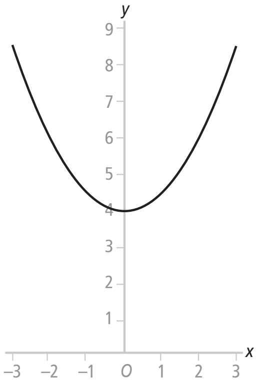
T-8a $s'(t) = -3t + 15$ dus $s'(0) = 15$ m/s

b $s'(2) = 9$ m/s en $s'(4) = 3$ m/s

c $s'(t) = 0$ als $t = 5$

$s(5) = 37,5$ dus 12,5 m voor het verkeerslicht

T-9a



b 2

c De lijn $y = ax$ is raakt aan de grafiek. Beide moeten door het raakpunt gaan

$\Rightarrow\ ax = \frac{1}{2}x^2 + 4$

In het raakpunt zijn de hellingen gelijk anders is het geen raaklijn $\Rightarrow a = f'(x)$

d $\frac{1}{2}x^2 + 4 = ax$ en $a = x$

Los dit stelsel vergelijkingen op door substitutie:

$\frac{1}{2}a^2 + 4 = a \cdot a$

$\frac{1}{2}a^2 = 4$

$a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ of $a = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$

T-10a $f(x) = \frac{1}{75}x^{15} + c$ met c in $\mathbb{R}$

Er zijn dus vele mogelijkheden.

b In $(a, f(a))$ is de grafiek van f noch stijgend noch dalend.

De grafiek van f heeft in $(a, f(a))$ een horizontale raaklijn en gaat in $(a, f(a))$ over van afnemend stijgend naar toenemend stijgend of van afnemend dalend naar toenemend dalend.