# Hoofdstuk 7 - Periodieke functies

***Voorkennis: Goniometrische verhoudingen***

***bladzijde 192***

**V-1a** Overeenkomstige hoeken zijn gelijk.

**b** $\frac{7}{4} = 1,75$

**c** $PR = 1,75 \times AC = 1,75 \times 3 = 5,25$

$QR = 1,75 \times BC = 1,75 \times 2 = 3,50$

**V-2a** In deze driehoeken is $\angle A = \angle C$ en ook zijn de hoeken bij $U$ en $V$ gelijk.

**b** $CR = \frac{1}{2} \times AQ = \frac{1}{2} \times 8 = 4$

$PU = \frac{6}{8} \times QV = \frac{3}{4} \times 4 = 3$

**c** $AU = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$AV = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

$UV = AV - AU = \sqrt{80} - \sqrt{45} = 4\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = \sqrt{5}$

$CV = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

**V-3a** $\frac{QV}{AQ} = \frac{1}{2}$ ; tangens

**b** Met de rekenmachine: $\angle BAC = \tan^{-1} \frac{1}{2} \approx 27^\circ$

***bladzijde 193***

**V-4a** $\sin \angle A = \frac{BC}{AC}$

$\frac{BC}{4} = \sin 40^\circ$

$BC = 4 \sin 40^\circ \approx 2,57$

$\cos 40^\circ = \frac{AB}{AC}$

$AB = 4 \cos 40^\circ \approx 3,06$

**b** $\tan 36^\circ = \frac{AB}{BC}$

$BC = \frac{7}{\tan 36^\circ} \approx 9,63$

$\frac{AB}{AC} = \sin 36^\circ$

$AC = \frac{7}{\sin 36^\circ} \approx 11,91$

**c** $\tan 50^\circ = \frac{12}{AB}$

$AB = \frac{12}{\tan 50^\circ} \approx 10,07$

$\sin 50^\circ = \frac{12}{AC}$

$AC = \frac{12}{\sin 50^\circ} \approx 15,66$

**V-5a** $\cos \angle C = \dfrac{BC}{AC}$

$\dfrac{BC}{6} = \cos 38^\circ$

$BC = 6\cos 38^\circ \approx 4,728$

$CD = \sqrt{2^2 + BC^2} \approx 5,13$

**b** $\tan \angle D = \dfrac{BC}{BD}$

$\tan \angle D \approx \dfrac{4,728}{5,13} \Rightarrow \angle D \approx 43^\circ$

**c** $\sin 38^\circ = \dfrac{AB}{6}$

$AB = 6\sin 38^\circ \approx 3,69$

Oppervlakte $\approx \dfrac{5,96}{2} \times 4,728 \approx 13,5$

**V-6a** $AB = BC$ dus geldt $AB^2 + AB^2 = 2^2$

$2AB^2 = 4$

$AB^2 = 2$

$AB = \sqrt{2}$

**b** $\sin 45^\circ = \sin \angle A = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\cos 45^\circ = \cos \angle A = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\tan 45^\circ = \tan \angle A = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$

**c** $PS = \frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

$RS = \sqrt{PR^2 - PS^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$

**d** $\sin 60^\circ = \dfrac{RS}{PR} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\cos 60^\circ = \dfrac{PS}{PR} = \frac{1}{2}$

$\tan 60^\circ = \dfrac{SR}{PS} = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

**e** $\sin 30^\circ = \dfrac{PS}{PR} = \frac{1}{2}$

$\cos 30^\circ = \dfrac{RS}{PR} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\tan 30^\circ = \dfrac{PS}{RS} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

**f**

| $\alpha$ graden | sin $\alpha$ | cos $\alpha$ | tan $\alpha$ |
|---|---:|---:|---:|
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 30 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ |
| 45 | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | 1 |
| 60 | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ |
| 90 | 1 | 0 | bestaat niet |

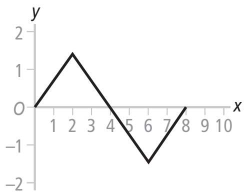
## *7.1 Periodieke beweging*

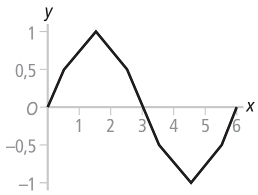
### *bladzijde 194*

**1a** 2 seconden per zijde dus is de periode 8 seconden

**b** De snelheid van de stip is constant en de zijden zijn rechte lijnstukken

**c**




**2a** De omtrek is $2\pi$ dus is de periode $2\pi$ seconden

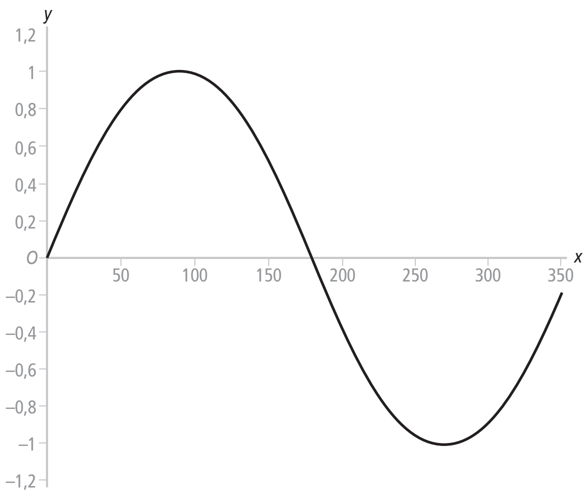
**b** $\frac{1}{4}\cdot 180^\circ = 45^\circ$ ; $1\frac{1}{6}\cdot 180^\circ = 210^\circ$

**c** $\frac{120}{180}\cdot \pi = \frac{2}{3}\pi$ seconden

### *bladzijde 195*

**3a** $\frac{90}{180}\pi = \frac{1}{2}\pi$

**b**



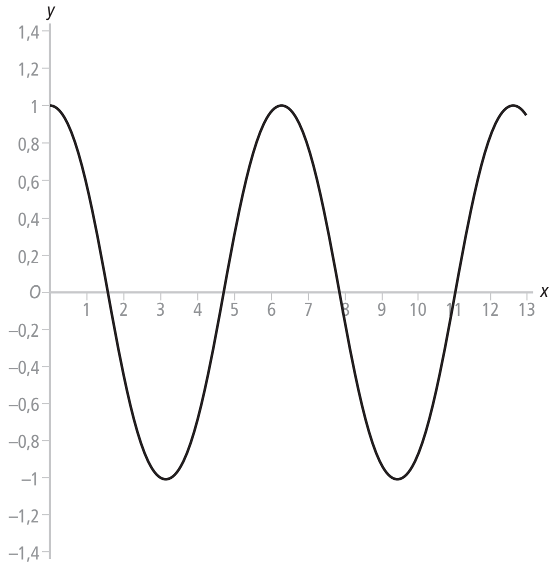

Neem $X$ van 0 tot 720 en $Y$ van –2 tot 2

**c** Neem $X$ van 0 tot $4\pi$ en $Y$ van –2 tot 2

**4**

| graden | 0 | 30 | 45 | $\frac{180}{\pi} \approx 57{,}3$ | 60 | 90 | 180 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| radialen exact | 0 | $\frac{1}{6}\pi$ | $\frac{1}{4}\pi$ | 1 | $\frac{1}{3}\pi$ | $\frac{1}{2}\pi$ | |
| radialen benaderd | 0 | 0,52 | 0,78 | 1,00 | 1,05 | 1,57 | 3,14 |

**5**




$y = \cos x$ is op tijdstip $x$ de afstand van de stip tot de verticale as.

### *7.2 Eigenschappen van sinusoïden*

***bladzijde 196***

**6a** 15.30 uur + 12.20 uur = 3.50 uur de volgende dag

**b** Steeds 5 kwartier voor en na de hoogste stand. Dus om 16.45 uur.

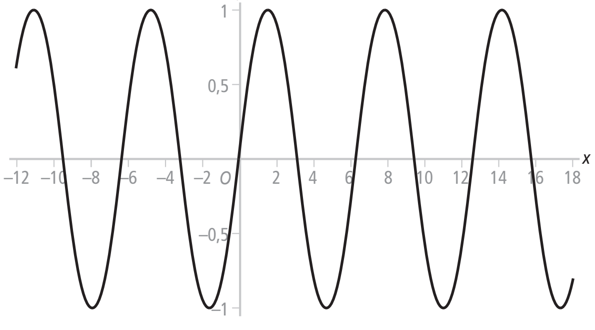
**7a** Dalend tot het laagste punt $(\pi, -1)$ en daarna stijgend tot het punt $(2\pi, 1)$ .

**b** $x = 0$ ; $x = \pm\ \pi$ ; $x = \pm\ 2\ \pi$;... enz

**c** $(\pm\frac{1}{2}\pi, 0)$ ; $(\pm 1\frac{1}{2}\pi, 0)$ ; $(\pm 2\frac{1}{2}\pi, 0)$; .....

***bladzijde 197***

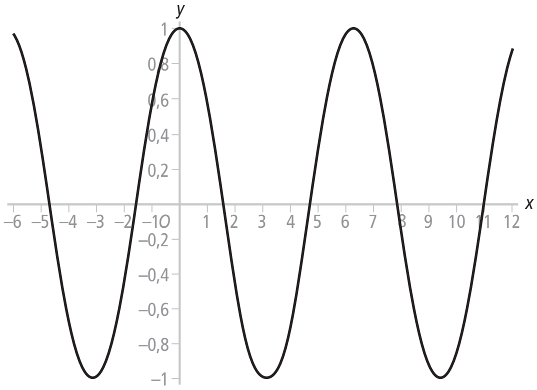
**8a**




10 snijpunten

**b** Naast $(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2})$ zijn de snijpunten $(2\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2})$ ; $(4\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2})$ ; $(-1\frac{5}{6}\pi, \frac{1}{2})$ ; $(-3\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2})$ ; $(\frac{5}{6}\pi, \frac{1}{2})$ ; $(2\frac{5}{6}\pi, \frac{1}{2})$ ; $(4\frac{5}{6}\pi, \frac{1}{2})$ $(-1\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2})$ en $(-3\frac{5}{6}\pi, \frac{1}{2})$

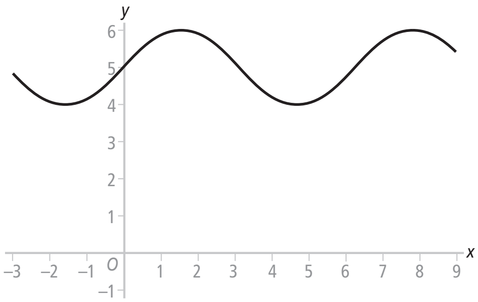
**9**




Nulpunten: $-\frac{1}{2}\pi$ ; $\frac{1}{2}\pi$ ; $-1\frac{1}{2}\pi$ ; $1\frac{1}{2}\pi$ ; $2\frac{1}{2}\pi$ en $3\frac{1}{2}\pi$

Toppen: $(-2\pi, 1)$ ; $(0, 1)$ ; $(2\pi, 1)$ ; $(4\pi, 1)$ ; $(-\pi, -1)$ ; $(\pi, -1)$ ; $(3\pi, -1)$

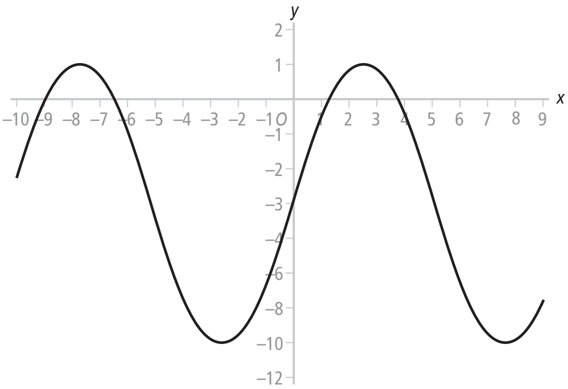
**10a**




**b** $(-1\frac{1}{2}\pi, 4)$; $(\frac{1}{2}\pi, 6)$ ; $(1\frac{1}{2}\pi, 4)$; $(2\frac{1}{2}\pi, 6)$

**c** $-\pi$, 0, $\pi$, $2\pi$, $3\pi$

**11**




Teken eerst de lijn $y = -3$ op $[-10, 10]$

Zet stippen op het begin, midden en einde van een periode, hier gaat de grafiek door de evenwichtsstand.

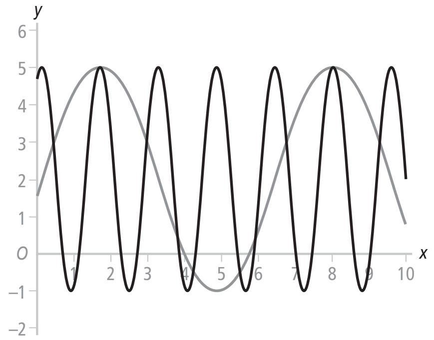
Op een kwart van een periode is de grafiek maximaal 1 $(= -3 + 4)$.

Op driekwart van een periode is de grafiek minimaal $-7$ $(= -3 - 4)$.

**12** $Q(3, 2)$ en $R(5, -2)$

**13a** Nee, je weet de periode niet.

**b** Vanwege het amplitude is (8, 5) een top, maar dan nóg zijn er meerdere mogelijkheden.

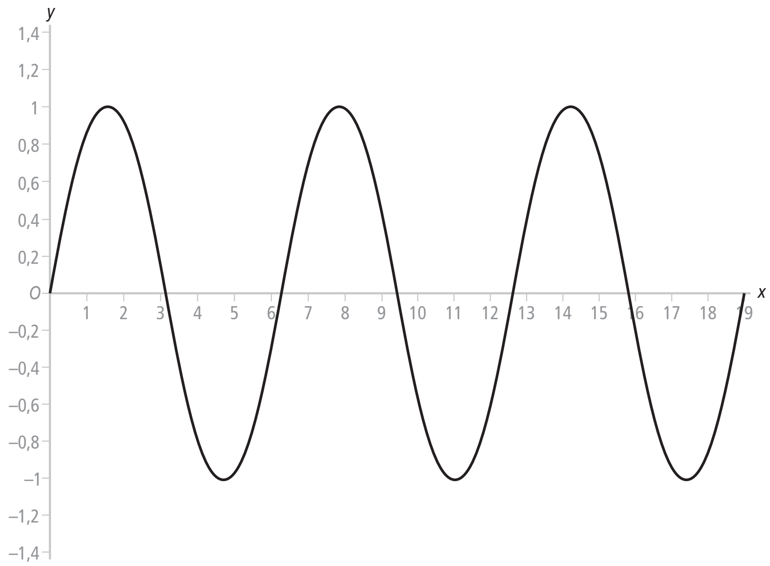



**14** De grafiek is puntsymmetrisch in (6, 0) dus ligt ook (7, –3) op de grafiek. Met symmetrie in de lijn $x = 9$ volgt dat ook (11, –3) op de grafiek ligt.
Dus vormen $x = 7$ en $x = 11$ de oplossing van $g(x) = -3$

### *7.3 Vergelijkingen oplossen*

***bladzijde 198***

**15a**




3 perioden

**b** Met calc-intersect: $x \approx 0,927$ en $x \approx 2,214$

**c** 6 keer

**d** $x \approx 0,927$ en $x \approx 2,214$
$x \approx 0,927 + 2\pi \approx 7,210$ en $x \approx 2,214 + 2\pi \approx 8,497$
$x \approx 0,927 + 4\pi \approx 13,493$ en $x \approx 2,214 + 4\pi \approx 14,780$

**16a** Plot $Y1 = \sin x$ en $Y2 = -0.9$ op $[0, 6\pi]$
Oplossingen: $x \approx 4,261$ ; $x \approx 5,163$ ; $x \approx 10,544$ ; $x \approx 11,446$ ; $x \approx 16,827$ ; $x \approx 17,729$

**b** Plot $Y1 = \sin x$ en $Y2 = 1$ op $[0, 4\pi]$
Oplossingen: $x = \frac{1}{2}\pi \approx 1,571$ ; $x = 2\frac{1}{2}\pi \approx 7,854$

**c** Plot $Y1 = \sin x$ en $Y2 = 0.6$ op $[-\pi, \pi]$
Oplossingen: $x \approx 0,644$ ; $x \approx 2,498$

**d** $Y1 = \cos x$ en $Y2 = 0.3$ op $[4\pi, 7\pi]$
Oplossingen: $x \approx 13,832$ ; $x \approx 17,583$ ; $x \approx 20,116$

**e** Plot $Y1 = \sin x$ en $Y2 = 0.5$ op $[8\pi, 9\pi]$
Oplossingen: $x = 8\frac{1}{6}\pi \approx 25,656$ ; $x = 8\frac{5}{6}\pi \approx 27,751$

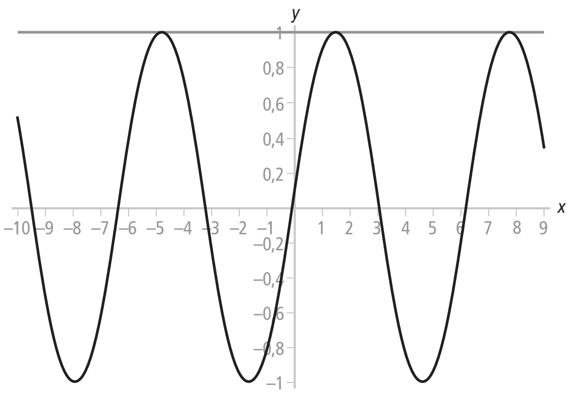
**17a** $(-18, 0)$; $(-6, 0)$; $(6, 0)$; $(18, 0)$; $(30, 0)$; $(42, 0)$

**b** Puntsymmetrie in $P(6, 0)$
Omdat $(2, 5)$ en $(10, -5)$ puntsymmetrisch zijn in $P$ is $f(10) = -f(2) = -5$

**c** Met symmetrie in $x = 6$ en $f(10) = -5$ vind je:
$(10, -5)$ , $(34, -5)$ , $(14, -5)$ , $(38, -5)$ , $(-14, -5)$ en $(-10, -5)$

***bladzijde 199***

**18a**




**b** De rekenmachine berekent een snijpunt door een bepaald rekenproces steeds te herhalen. Dit proces stopt als een bepaalde nauwkeurigheid (bijvoorbeeld 6 decimalen) is bereikt.

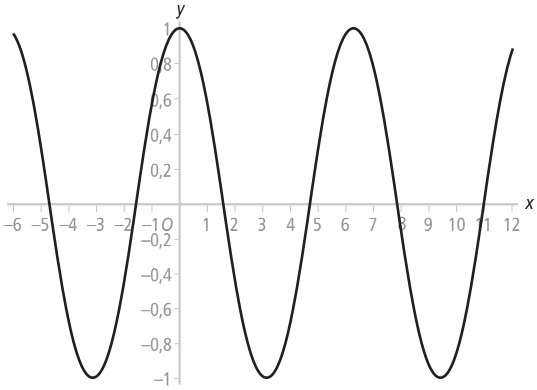
**c** $\sin x = 1$ : $x = \frac{1}{2}\pi$ ; $x = 2\frac{1}{2}\pi$; $x = -1\frac{1}{2}\pi$

$\sin x = -1$ : $x = 1\frac{1}{2}\pi$ ; $x = -2\frac{1}{2}\pi$; $x = -\frac{1}{2}\pi$

**19a** $\sin 30^\circ = \sin \angle BAD = \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$

**b** $30^\circ = \frac{1}{6}\pi$ rad
Met symmetrie en periode krijg je de exacte oplossingen:
$x = \frac{1}{6}\pi$ ; $x = \frac{5}{6}\pi$ ; $x = 2\frac{1}{6}\pi$ ; $x = 2\frac{5}{6}\pi$

**20a**




**b** -

**c** $x=-1\frac{2}{3}\pi$; $x=-\frac{1}{3}\pi$; $x=\frac{1}{3}\pi$ ; $x=1\frac{2}{3}\pi$ ; $x=2\frac{1}{3}\pi$; $x=3\frac{2}{3}\pi$

**d** $\cos\frac{1}{3}\pi=\cos 60^\circ=\cos\angle ABD=\dfrac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$

**21a** $\langle 0,64;\ 2,50\rangle$

**b** $[0;\ 0,64]$ en $[2,50;\ \pi]$

**22a** Plot $Y1=\sin x$ en $Y2=0.9$ en bereken met calc-intersect de snijpunten. Aflezen geeft dan $\langle -5,16;\ -4,26\rangle$ en $\langle 1,12;\ 2,02\rangle$

**b** Plot $Y1=\cos x$ en $Y2=-0.3$ en bereken met calc-intersect de snijpunten. Aflezen geeft dan $\langle -4,41;\ -1,88\rangle$ en $\langle 1,88;\ 4,41\rangle$

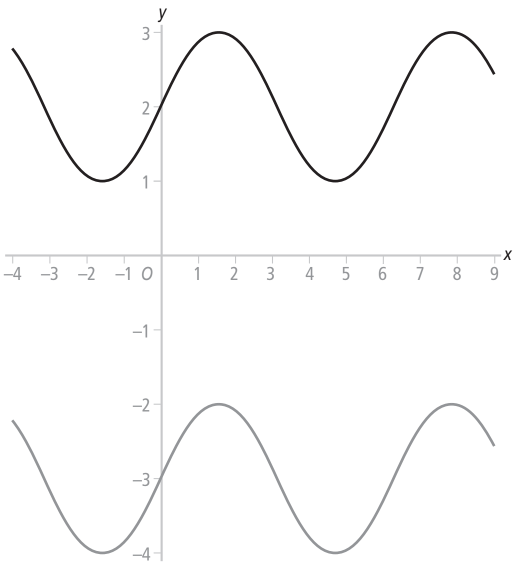
**c** Plot $Y1=2\sin x$ en $Y2=1.2$ en bereken met calc-intersect de snijpunten. Aflezen geeft dan $[-2\pi;\ -5,64\rangle$ en $\langle -3,79;\ 0,64\rangle$ en $\langle 2,50;\ 2\pi]$

**d** Geen oplossingen want altijd geldt: $\sin x \geq -1$

### *7.4 Verschuiven en vervormen*

***bladzijde 200***

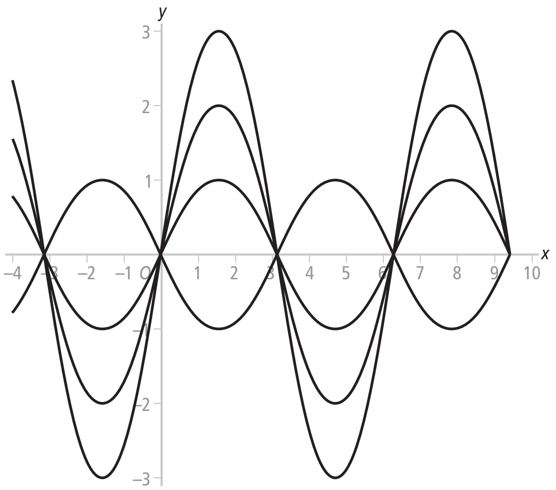
**23a**



De grafiek van $f$ ligt 2 hoger en de grafiek van $g$ ligt 3 lager dan de grafiek van $y = \sin x$

**b** Bijvoorbeeld $y = 3 + \sin x$

**24a**



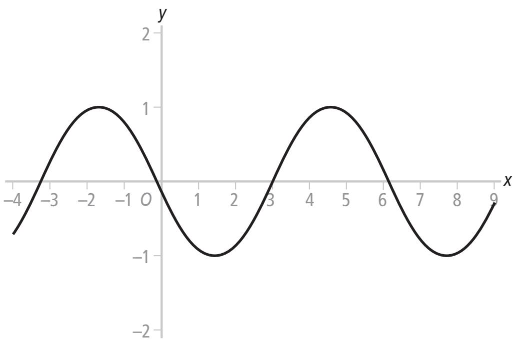

Amplitude

**b** Spiegelen in de horizontale as.

**25a** Bijvoorbeeld $f(x) = 5 + 6\sin x$

**b** Evenwichtsstand $y = -2$ en amplitude 2.

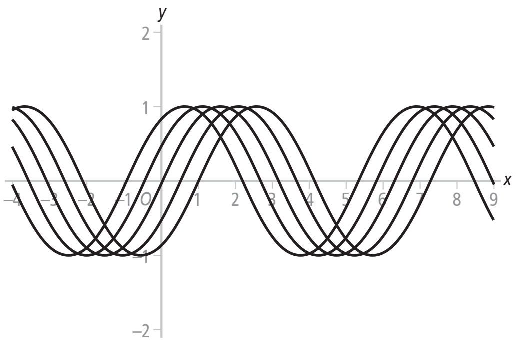
**26a**




3 eenheden naar rechts verschoven

**b** (–2, 1) want 2 naar links

**c**




$c < 0$ : grafiek $c$ eenheden naar links

$c > 0$ : grafiek $c$ eenheden naar rechts

**d** $(c, 0)$

***bladzijde 201***

**27a** De periode verandert

**b** $0 < b < 1$ : de periode wordt groter dan $2\pi$

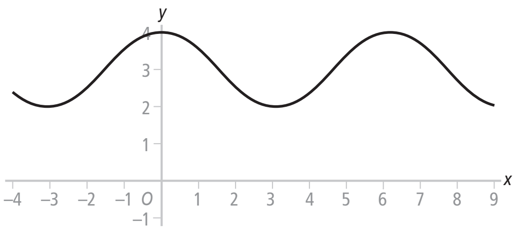
$b > 1$ : de periode wordt kleiner dan $2\pi$

**c** $\text{periode} = \dfrac{2\pi}{b}$

**d**

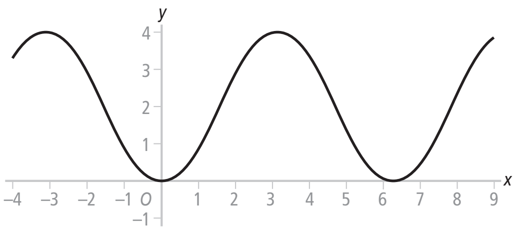
| $b$ | 2 | $\pi$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{5}\pi$ |
|---|---|---|---|---|
| periode | $\pi$ | 2 | $3\pi$ | 10 |

**28a**



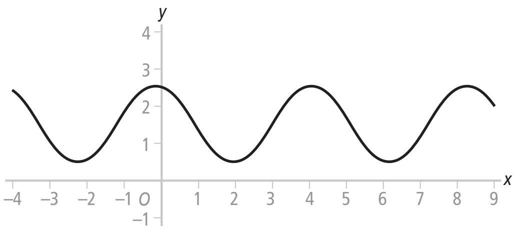
Verschuif de grafiek van $y = \cos x$ drie eenheden omhoog.

**b**



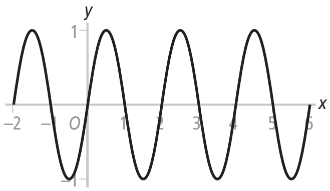
Vermenigvuldig de grafiek van $y = \cos x$ met 2 en spiegel in de $x$-as. Daarna moet het resultaat nog twee eenheden omhoog worden verschoven.

**c**



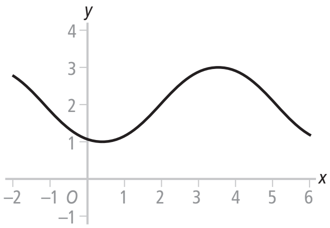
Uitgaande van de grafiek van $y = \sin x$ deel je alle afstanden tot de $y$-as door 1,5 zodat de periode $\dfrac{2\pi}{1{,}5} = 1\frac{1}{3}\pi$ wordt, vervolgens verschuif je het resultaat drie eenheden naar rechts, en tenslotte moet het nog 1,5 eenheden omhoog worden verschoven.

**d**



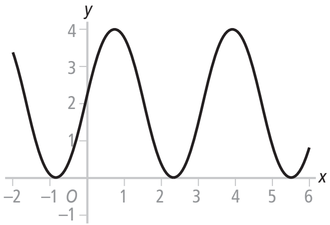

Uitgaande van de grafiek van $y = \sin x$ deel je alle afstanden tot de $y$-as door $\pi$ waardoor de periode 2 wordt.

**e**




Verschuif de grafiek van $y = \sin x$ twee eenheden naar rechts en daarna 2 eenheden omhoog.

**f**



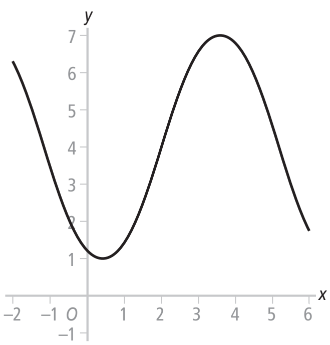

Uitgaande van de grafiek van $y = \sin x$ deel je alle afstanden tot de $y$-as door 2 zodat de periode $\pi$ wordt, vervolgens vermenigvuldig je de afstanden tot de $x$-as met 2 en tenslotte schuif je het resultaat 2 omhoog.

**29** $\frac{1}{2}\pi$ naar links; $2\frac{1}{2}\pi$ naar links; $1\frac{1}{2}\pi$ naar rechts; $3\frac{1}{2}\pi$ naar rechts

### *7.5 Algemene vorm van een sinusoïde*

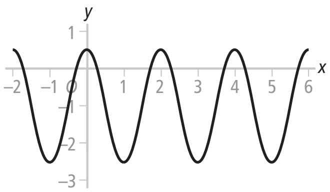
***bladzijde 202***

**30a**




Amplitude 3; evenwichtsstand $y = 4$; periode $2\pi$ en beginpunt $(2, 4)$

**b**

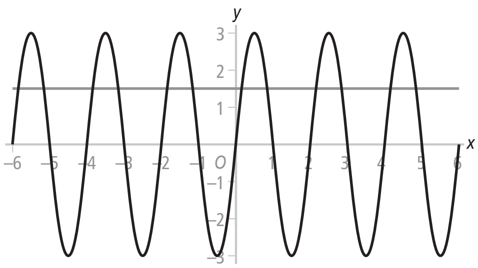


Amplitude $1\frac{1}{2}$ ; evenwichtsstand $y = -1$ ; periode $\frac{2}{3}\pi$ en beginpunt $(0, \frac{1}{2})$

***bladzijde 203***

**31a** Periode $\dfrac{2\pi}{2\pi} = 1$

**b**



De nulpunten zijn :

$x = -3$; $x = 3$ ; $x = -2\frac{1}{2}$; $x = 2\frac{1}{2}$; $x = -2$; $x = 2$ ; $x = -1\frac{1}{2}$; $x = 1\frac{1}{2}$; $x = -1$; $x = 1$ ;
$x = -\frac{1}{2}$; $x = \frac{1}{2}$; $x = 0$

**c** Plot ook $Y2 = 2$ en bereken met calc-intersect de snijpunten op $[-3, 3]$
Aflezen van de ongelijkheid geeft dat de oplossing bestaat uit de intervallen:
$\langle -2{,}88;\ -2{,}62\rangle$ en $\langle -1{,}88\ ;\ -1{,}62\rangle$ en $\langle -0{,}88\ ;\ -0{,}62\rangle$ en
$\langle 0{,}12;\ 0{,}38\rangle$ en $\langle 1{,}12;\ 1{,}38\rangle$ en $\langle 2{,}12;\ 2{,}38\rangle$

**32a** $\dfrac{2\pi}{k} = 6\pi \Rightarrow k = \frac{1}{3}$

**b** Amplitude 2; de toppen vind je bij $\frac{1}{4}$ en $\frac{3}{4}$ periode vanaf een beginpunt.

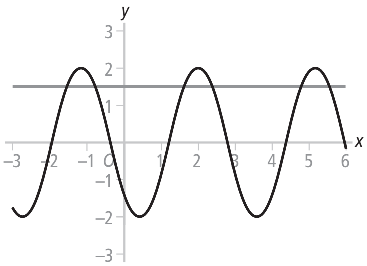
Dus: $(1\frac{1}{2}\pi, 2)$ ; $(4\frac{1}{2}\pi, -2)$ ; $(7\frac{1}{2}\pi, 2)$ en $(10\frac{1}{2}\pi, -2)$

**33a** $\dfrac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi \approx 12{,}566$ dus 12 uur en $0{,}566 \times 60 \approx 34$ minuten

**b** $H = 0{,}60 + 1{,}85 \sin 0{,}5t$

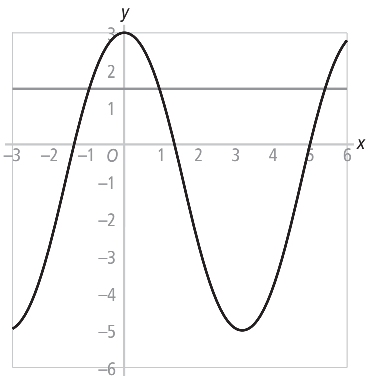
**c** Plot $Y1 = 0.6 + 1.85 \sin 0.5X$ en $Y2 = 2.10$ op $[0, 15]$
Calc-intersect geeft $X \approx 1.89$ en $X \approx 4.39$
Dus gedurende $4{,}39 - 1{,}89 = 2{,}50$ uur. Dat is 2 uur en 30 minuten.

**34a**



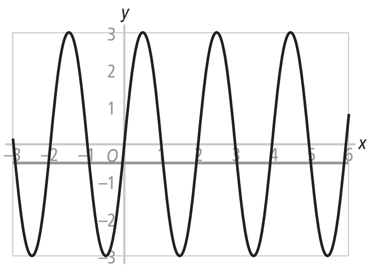

calc-intersect en aflezen geeft dat de oplossing bestaat uit de intervallen:
$\langle -1{,}50\ ;\ -0{,}78\rangle$ en $\langle 1{,}64;\ \ 2{,}36\rangle$ en $\langle 4{,}78;\ 5{,}50\rangle$

**b**



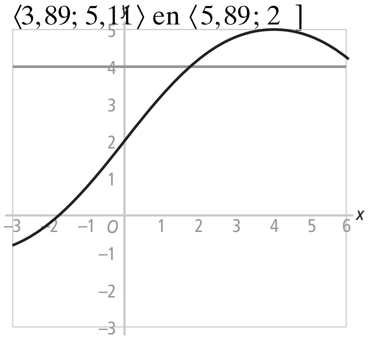

calc-intersect en aflezen geeft dat de oplossing bestaat uit de intervallen:
$[-\pi;\ -0{,}90\rangle$ en $\langle 0{,}90;\ 5{,}39\rangle$

**c**



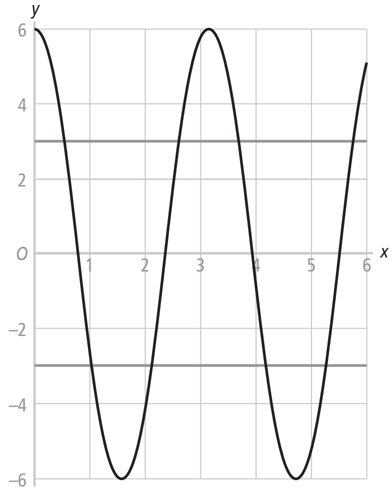

calc-intersect en aflezen geeft dat de oplossing bestaat uit de intervallen:
$[-\pi;\ -2{,}89\rangle$ en $\langle -2{,}11;\ \ -0{,}89\rangle$ en $\langle -0{,}11;\ \ 1{,}11\rangle$ en $\langle 1{,}89;\ 3{,}11\rangle$ en
$\langle 3{,}89;\ 5{,}11\rangle$ en $\langle 5{,}89;\ 2\ \ ]$

**d**




calc-intersect en aflezen geeft dat de oplossing bestaat uit de intervallen:
$[-\pi;\ \ 1{,}82\rangle$ en $\langle 6{,}03;\ 2\pi]$

**35a**

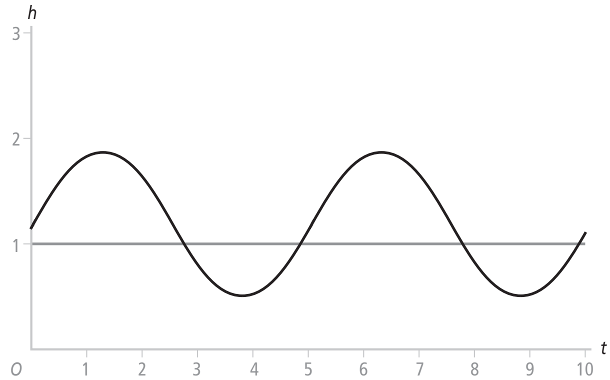



$\cos\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$ is $x = \frac{1}{6}\pi$ een oplossing van $6\cos 2x = 3$
Met periode $\pi$ en symmetrie vind je de snijpunten met $y = 3$:
$(\frac{1}{6}\pi, 3)$ ; $(\frac{5}{6}\pi, 3)$; $(1\frac{1}{6}\pi, 3)$ ; $(1\frac{5}{6}\pi, 3)$
Omdat $\cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$ is $x = \frac{1}{3}\pi$ een oplossing van $6\cos 2x = -3$
Met periode $\pi$ en symmetrie vind je de snijpunten met $y = -3$:
$(\frac{1}{3}\pi, -3)$ ; $(\frac{2}{3}\pi, -3)$; $(1\frac{1}{3}\pi, -3)$ ; $(1\frac{2}{3}\pi, -3)$

**36a** $\dfrac{2}{1,25} \approx 5$ seconden

**b** $1,2 - 0,7 = 0,5$ liter

**c**



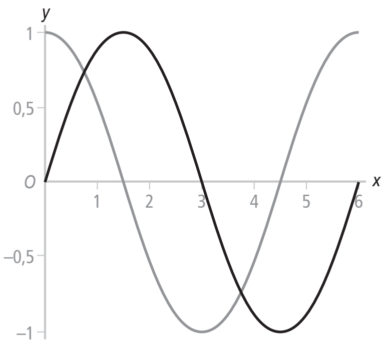

Snijpunten bij $X = 2,745$ en $X = 4,795$
Dus $Y1 < Y2$ gedurende $4,795 - 2,745 = 2,05$ sec.

**d** De maximale inhoud is 2,4 liter geworden en de minimale inhoud zal nog steeds 0,5 liter zijn.
Dus is de evenwichtsstand $y = 1,45$ en is het functievoorschrift voor het volume van de vorm $H = 1,45 + 0,95\sin bt$
Omdat de frequentie 1,5 keer zo groot is geworden geldt $b = 1,25 \cdot 1,5 = 1,875$ en
$H = 1,45 + 0,95\sin 1,875t$

## *7.6 Gemengde opdrachten*

***bladzijde 204***

**37**




Snijpunten bij $x = \frac{1}{4}\pi$ en $x = \frac{3}{4}\pi$ dus is $A = [\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi]$ met lengte
Voor $B$ blijven er twee intervallen over met totale lengte .
Dus zijn $A$ en $B$ even lang.

**38a** $\sin x \cdot \cos x = 0$
$\sin x = 0$ of $\cos x = 0$
$x = 0 + k \cdot \pi$ of $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ ($k$ geheel)

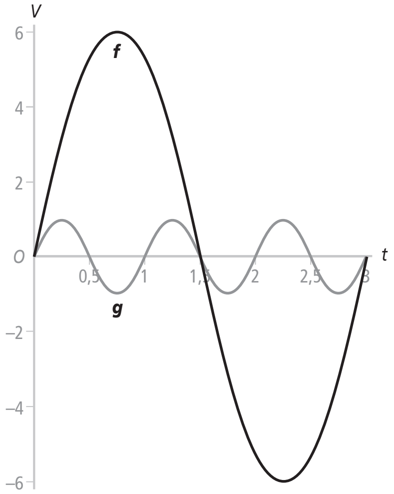
**b** $(\sin x)^2 = 1$
$\sin x = 1$ of $\sin x = -1$
$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ ($k$ geheel)

**39a** Periode: $6 \times 0,5 = 3\,\text{ms}$
Frequentie: $\dfrac{1}{0,003} \approx 333$ trillingen per seconde ( = Hz)
Amplitude: $4 \times 1\frac{1}{2} = 6\,\text{V}$

**b** $10 \cdot 0,2 = 2$ ms dat is $\frac{2}{3}$ periode

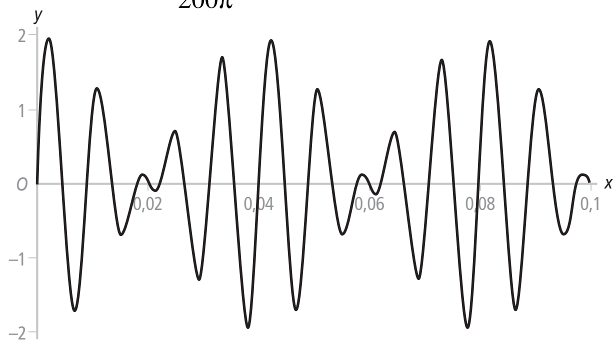
**c** 0,3 ms

**d,e**



**40a** De periode is $\frac{2\pi}{200\pi}=0,01$ seconde en dan is de frequentie $\frac{1}{0,01}=100$ Hz

**b**




Maximale waarde 1,97.

**c,d** Periode $g$: $\frac{2\pi}{250\pi}=0,008$ seconde

Periode $f$: 0,01 seconde

Het kleinste gemeenschappelijke veelvoud (KGV) hiervan is 0,04 seconde, de periode van $h$.

**e** Periode $y=\sin 120\ t$ is $\frac{2\pi}{120\pi}=\frac{1}{60}$ en de periode van $y=\sin 150\ t$ is $\frac{2\pi}{150\pi}=\frac{1}{75}$

Het KGV van beide is $\frac{4}{60}=\frac{5}{75}=\frac{1}{15}$ seconde.

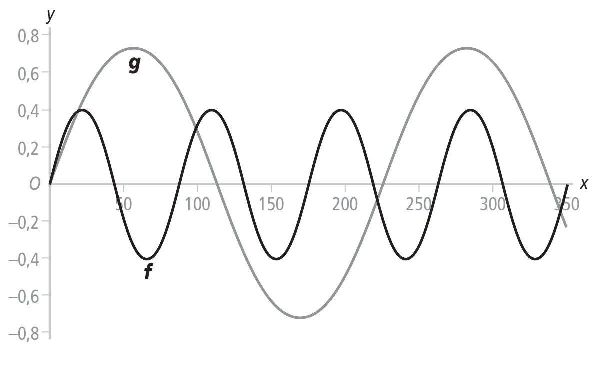
***bladzijde 205***

**41a** $t=44$; $t=88$; $t=132$ (halve, hele en anderhalve periode)

**b** Negatief op vier halve perioden. Dus op $4\times 44=176$ dagen, dan staat Mercurius links van de zon.

**c** $V(t)=0,72\sin\frac{2\pi}{225}t$

**d**




Calc-intersect geeft: $t\approx 20$; $t\approx 99$; $t\approx 222$; $t\approx 346$

**e** Dan moeten beide functies positief of beide moeten negatief zijn. Bepaal daartoe eerst de nulpunten van $M$ en $V$ en lees de oplossing af.

$[0,44]$; $[88, 112\frac{1}{2}]$; $[132, 176]$; $[220, 225]$; $[264, 308]$; $[337\frac{1}{2}, 352]$

Totaal gaat het om $44+24\frac{1}{2}+44+5+44+14\frac{1}{2}=176$ dagen.

**f** $M(0)=0,39$ Mercurius is dan zover mogelijk rechts van de zon.

***ICT - Verschuiven en vervormen***

***bladzijde 206***

**I-1a** $d = 0$

**b** $y = -2 + \sin x$

**I-2a** De amplitude

**b** Spiegeling in de $x$-as.

**I-3a** $y = 5 + 6\sin x$

**b** Amplitude 2 en evenwichtsstand $y = -2$

***bladzijde 207***

**I-4a** Horizontale verschuiving

**b** $c < 0$: naar links over afstand $c$

$c > 0$: naar rechts over afstand $c$

**c** $(c, 0)$

**d** $c = \frac{1}{2}\pi \pm$ veelvoud van $2\pi$

**e** $c = \pi \pm$ veelvoud van $2\pi$

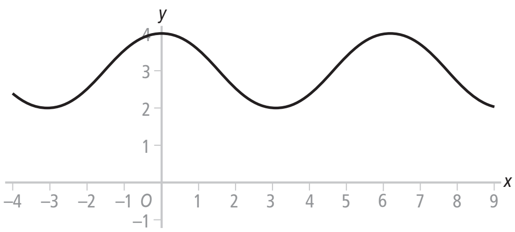
**I-5a** Tweekeer ; drie keer ; $\frac{1}{4}$ keer

**b** $0 < b < 1$: periode wordt groter, de grafiek wordt horizontaal uitgerekt

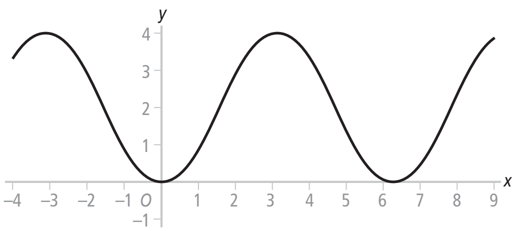
$b > 1$: de periode wordt kleiner, de grafiek wordt horizontaal samengedrukt

**c** periode $= \dfrac{2\pi}{b}$

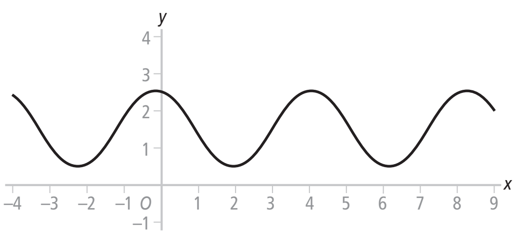
**I-6a**



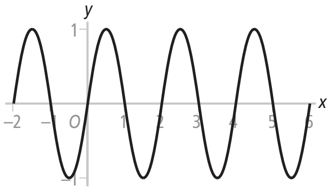

**b**




**c**



**d**




**I-7** 1: $y = -2\sin x$
2: $y = 2\cos x + 2$
3: $y = -3\cos 4x$
4: $y = \cos x + 3$
5: $y = 2\sin\quad x$
6: $y = -2\sin 4x + 1$
7: $y = -3\sin 2(x-3)$
8: $y = 2\cos 3(x+1) + 3$
9: $y = -2\cos 5x$
10: $y = 3\sin 4x + 6$

***Test jezelf***

***bladzijde 210***

**T-1**

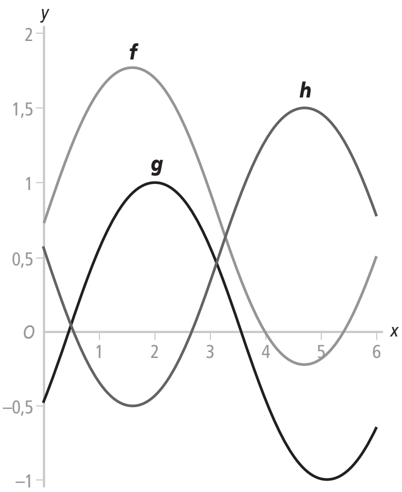
| graden | 180 | 30 | 150 | 210 | 45 | 135 | 252 | 270 | 3,14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| radialen | $\pi$ | $\frac{1}{6}\pi$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $1\frac{1}{6}\pi$ | $\frac{1}{4}\pi$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $1{,}4\pi$ | $1\frac{1}{2}\pi$ | 0,01744 |

**T-2a** $x = 5$; $x = 11$; $x = 17$; $x = -1$; $x = -7$; $x = -13$

**b** 6

**c** 6

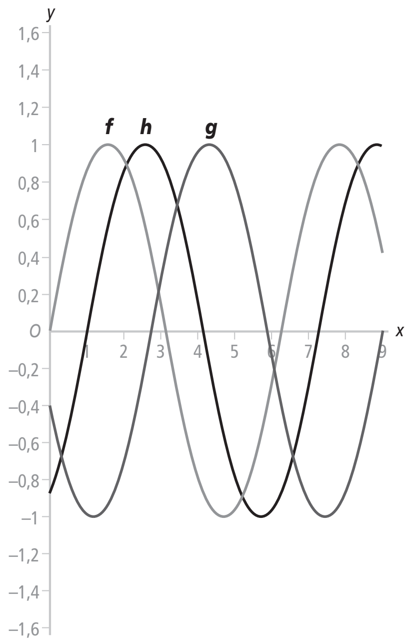
**T-3a**




**b** Plot $Y1 = 0.8 + \sin X$ en $Y2 = 0.5 - \sin X$ op $[0, 2\pi]$
Calc-intersect geeft $X \approx 3,29$ en $X \approx 6,13$

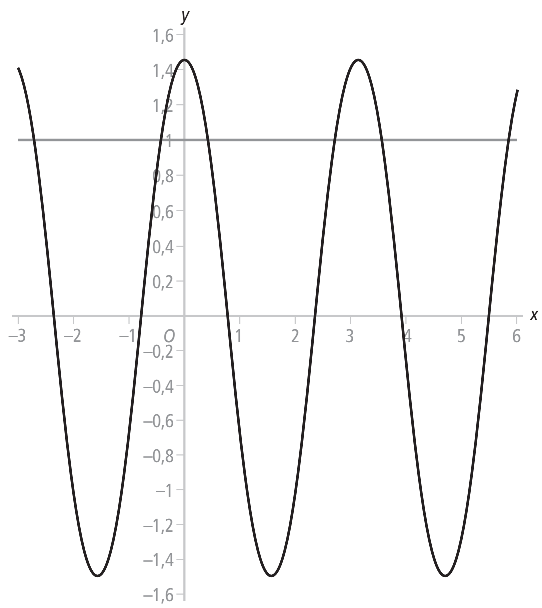
**c** Plot $Y1 = \cos(X-2)$ en $Y2 = 0.6$ op $[0, 2\pi]$
Calc-intersect en aflezen geeft: $[0;\, 1{,}073]$ en $[2{,}927;\, 2\pi]$

**T-4a**



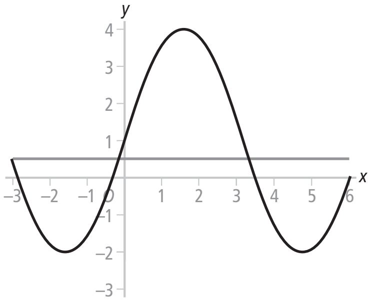

**b** $y = 0$
**c** $2 + \frac{1}{2}\pi$ naar links of $1\frac{1}{2}\pi - 2$ naar rechts
**d** 1 naar links, spiegelen in $x$-as en tenslotte 2 omhoog
**e** In horizontale richting samendrukken met factor 4, 2 naar links, vermenigvuldig vanuit $x$-as met 2 en tenslotte 3 omlaag.

**T-5a**



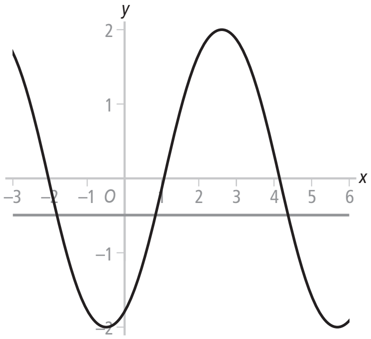

Calc-intersect: $x \approx -2{,}72;\, x \approx -0{,}42;\, x \approx 0{,}42;\, x \approx 2{,}72;\, x \approx 3{,}56;\, x \approx 5{,}86$

**b**



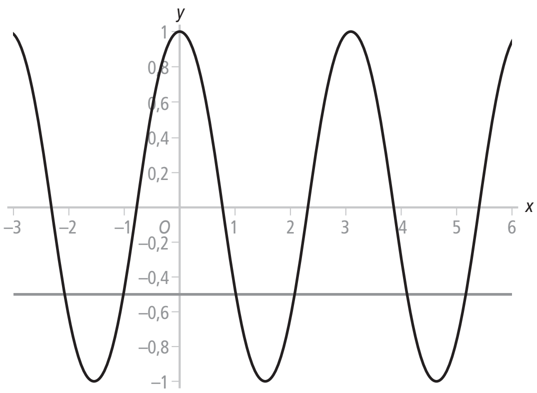
Calc-intersect: $x \approx -2{,}44$; $x \approx -0{,}17$; $x \approx 3{,}31$ ; $x \approx 6{,}12$

**c**



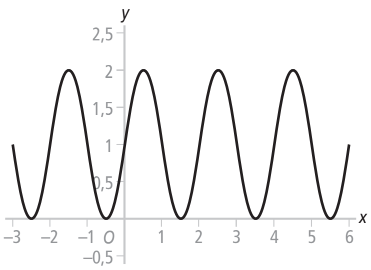
Calc-intersect en aflezen: $\langle -1{,}57\,;\,0{,}52\rangle$ en $\langle 4{,}71\,;\,2\pi]$

**d**



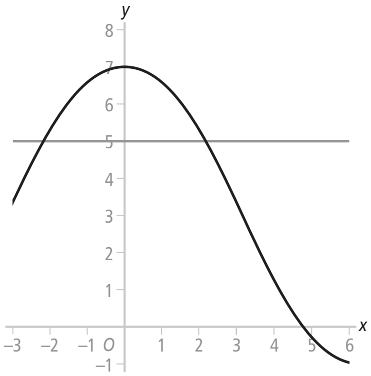
Calc-intersect en aflezen: $[-\pi;\,-2{,}09\rangle$ ; $\langle -1{,}05\,;\,1{,}05\rangle$; $\langle 2{,}09;\,4{,}19\rangle$ ; $\langle 5{,}24\,;\,2\pi]$

**e**



Calc-intersect en aflezen:
$[-\pi;\,-2{,}67\rangle$; $\langle -2{,}67;\,-0{,}57\rangle$ ; $\langle -0{,}57;\,1{,}52\rangle$ ; $\langle 1{,}52;\,3{,}62\rangle$; $\langle 3{,}62;\,5{,}71\rangle$ ; $\langle 5{,}71;\,2\pi]$

**f**




Calc-intersect en aflezen $\langle -2{,}09;\ 2{,}09\rangle$

***bladzijde 211***

**T-6a** $f$ heeft amplitude 1 en periode $\frac{4}{5}\pi$
$g$ heeft amplitude $2\frac{1}{2}$ en periode $2\pi$
$h$ heeft amplitude 1 en periode $4\pi$

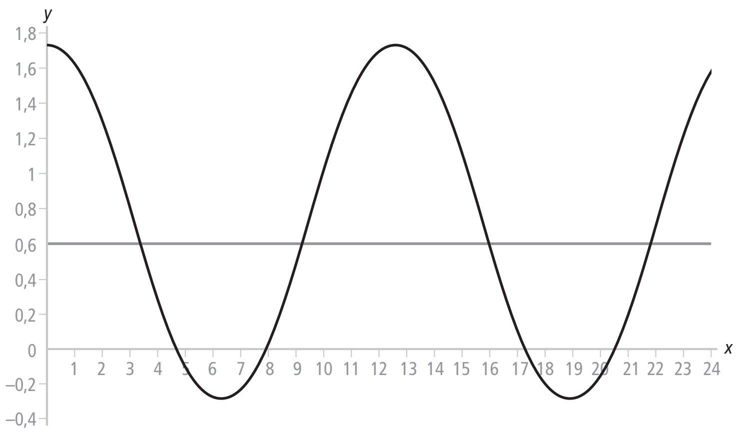
**b** $f(x) = \sin 2\frac{1}{2}x$
$g(x) = -2\sin x$
$h(x) = \cos\frac{1}{2}x$

**T-7a** $a\sin(\frac{2}{3}\pi) = 1 \ \Rightarrow\ a = \dfrac{1}{\sin\frac{2}{3}\pi} \approx 1{,}1547$

**b** $\dfrac{2\pi}{b} = \frac{2}{3}\pi \ \Rightarrow\ b = 3$

**c** Bijvoorbeeld $h(x) = 2\frac{1}{2}\sin 2x + 1$

**T-8a**



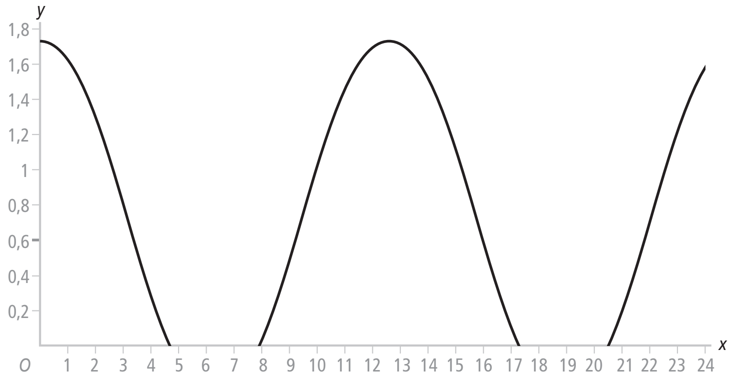

Maximale waterhoogte is $0{,}7 + 1{,}0 = 1{,}7$ meter

**b** Snijpunten bij $X \approx 3{,}34$ en $X \approx 9{,}22$ , dus om 3.20 uur en 9.13 uur.
Dus geen probleem van ca. 3.20 uur tot 9.13 uur.
Bij vertrek om 4.00 uur en duur 5 uur mag er slechts 13 minuten vertraging zijn.

,

**c** Los op: $0,7+\cos 0,5t=0$
Met plotten vind je de nulpunten $t \approx 4,69$ (ca. 4.41 uur) en $t \approx 7,87$ (ca. 7.52 uur)
Hiertussen valt de plaat gedurende 3 uur en 11 minuten voor de eerste keer droog.
De tweede keer is van 17.16 uur tot 20.26 uur.

**d**




**T-9** Plot voor verschillende waarden van $b$ de grafieken en tel op $[0,\ 2\pi]$ de aantallen assen en nulpunten.

| *b* | aantal assen | aantal nulpunten |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 4 | 5 |
| 3 | 6 | 7 |
| ..... | ..... | ..... |
| b | 2b | 2b+1 |