

Hoofdstuk 6 - Werken met algebra

6.1 Oplossen door ontbinden

bladzijde 154

- 1a** $(x^2 - 3)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x^2 - 3 = 0$ of $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 3$ of $x^2 = 1 \Rightarrow$
 $x = -\sqrt{3}$ of $x = \sqrt{3}$ of $x = -1$ of $x = 1$.
- b** $x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 2) = 0 \Rightarrow x + 3 = 0$ of $x - 2 = 0 \Rightarrow x = -3$ of $x = 2$.
- c** $x^4 + x^2 - 6 = (x^2 + 3)(x^2 - 2)$.
- 2a** $x^4 - 7x^2 + 12 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x^2 = 4$ of $x^2 = 3 \Rightarrow$
 $x = -2$, $x = 2$, $x = -\sqrt{3}$ of $x = \sqrt{3}$
- b** $\frac{4}{x^2} - \frac{2}{x} - 12 = 0$ stel $\frac{2}{x} = a \Rightarrow \frac{4}{x^2} = a^2$
 $a^2 - a - 12 = 0 \Rightarrow (a - 4)(a + 3) = 0 \Rightarrow a = 4$ of $a = -3$
 $a = 4 \Rightarrow \frac{2}{x} = 4 \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ of $a = -3 \Rightarrow \frac{2}{x} = -3 \Rightarrow -3x = 2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$
De oplossingen zijn dus $x = \frac{1}{2}$ en $x = -\frac{2}{3}$
- c** $x^8 + 5x^4 = 6$ stel
 $x^4 = a \Rightarrow a^2 + 5a = 6 \Rightarrow a^2 + 5a - 6 = 0 \Rightarrow (a + 6)(a - 1) = 0 \Rightarrow a = -6$ of $a = 1$
 $a = -6 \Rightarrow x^4 = -6$ dit kan niet. Of $a = 1 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x = -1$ of $x = 1$.
- d** $(\sqrt{x})^2 - 5\sqrt{x} + 4 = 0$ stel $\sqrt{x} = a \Rightarrow a^2 - 5a + 4 = 0 \Rightarrow (a - 4)(a - 1) = 0 \Rightarrow a = 4$ of $a = 1$
 $a = 4 \Rightarrow \sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16$ en $a = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$
- 3a** $f(x) = 0 \Rightarrow x^4 - 9x^2 + 14 = 0 \Rightarrow (x^2 - 7)(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow x^2 = 7$ of $x^2 = 2 \Rightarrow$
 $x = -\sqrt{7}$, $x = \sqrt{7}$, $x = -\sqrt{2}$ of $x = \sqrt{2}$.
- b** $f(x) = -4 \Rightarrow x^4 - 9x^2 + 14 = -4 \Rightarrow x^4 - 9x^2 + 18 = 0 \Rightarrow$
 $(x^2 - 6)(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x^2 = 6$ of $x^2 = 3 \Rightarrow x = -\sqrt{6}$, $x = \sqrt{6}$, $x = -\sqrt{3}$ of $x = \sqrt{3}$
De snijpunten zijn dus: $(-\sqrt{6}, -4)$, $(\sqrt{6}, -4)$, $(-\sqrt{3}, -4)$ en $(\sqrt{3}, -4)$.
- c** De vergelijking $f(x) = p$ heeft twee oplossingen als de lijn $y = p$ de grafiek van f in twee punten snijdt. De vergelijking $a^2 - 9a + 14 = p$ heeft dan één negatieve en één positieve oplossing. Dat gebeurt als $p > 14$.
De vergelijking $x^4 - 9x^2 + 14 = p$ heeft ook twee oplossingen als de vergelijking $a^2 - 9a + 14 = p$ één oplossing heeft, dus moet gelden dat de discriminant van $a^2 - 9a + 14 - p = 0$ gelijk is aan 0.
 $(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (14 - p) = 0 \Rightarrow 81 - 56 + 4p = 0 \Rightarrow 4p = -25 \Rightarrow p = -\frac{25}{4} = -6\frac{1}{4}$
Dus $p = -6\frac{1}{4}$ of $p > 14$

bladzijde 155

- 4a** $(2x + 1)^2 = x^2 \Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = x^2 \Rightarrow 3x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow (3x + 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow$
 $3x + 1 = 0$ of $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$ of $x = -1$
- b** Wanneer de kwadraten van twee getallen aan elkaar gelijk zijn, dan zijn of de getallen gelijk of ze zijn elkaars tegengestelde. Dus:
 $2x + 1 = x$ of $2x + 1 = -x \Rightarrow x + 1 = 0$ of $3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ of $x = -\frac{1}{3}$
- c** $(2x + 3)^2 = (2 - 3x)^2 \Rightarrow 2x + 3 = 2 - 3x$ of $2x + 3 = -(2 - 3x) \Rightarrow$
 $2x + 3 = 2 - 3x$ of $2x + 3 = -2 + 3x \Rightarrow$
 $5x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{5}$ of $-x = -5 \Rightarrow x = 5$

- 5a** Dan staat er $0 \cdot \text{getal} = 0 \cdot \text{getal}$ en dit klopt.
- b** Wanneer $x + 1 \neq 0$ dan kun je door $x + 1$ delen.
- c** $(x + 1)(x^2 + 5) = (x + 1)(2x + 5) \Rightarrow x + 1 = 0$ of $x^2 + 5 = 2x + 5$
 $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ en $x^2 + 5 = 2x + 5 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0$ of $x = 2$
 De oplossingen zijn dus $x = -1$, $x = 0$ en $x = 2$
- 6a** $(3x - 1)^2 = (1 - 2x)^2 \Rightarrow 3x - 1 = 1 - 2x$ of $3x - 1 = -(1 - 2x) = -1 + 2x \Rightarrow$
 $5x = 2$ of $x = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$ of $x = 0$.
- b** $x(x - 1) = (x - 1)(x^2 - 20) \Rightarrow x - 1 = 0$ of $x = x^2 - 20 \Rightarrow$
 $x = 1$ of $x^2 - x - 20 = 0 \Rightarrow x = 1$ of $(x - 5)(x + 4) = 0 \Rightarrow$
 $x = 1$, $x = 5$, $x = -4$
- c** $(7x + 2)(x^2 - 1) = x(14x + 4) \Rightarrow (7x + 2)(x^2 - 1) = x \cdot 2 \cdot (7x + 2) \Rightarrow$
 $7x + 2 = 0$ of $x^2 - 1 = 2x \Rightarrow 7x = -2$ of $x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow$
 $x = -\frac{2}{7}$ of $x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 + \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$ of $x = \frac{2 - \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$
 $x = \frac{-2 + \sqrt{4 + 4}}{2}$ of $x = \frac{-2 - \sqrt{4 + 4}}{2} \Rightarrow x = \frac{-2 + \sqrt{8}}{2}$ of $x = \frac{-2 - \sqrt{8}}{2} \Rightarrow$
 $x = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{8}$ of $x = -1 - \frac{1}{2}\sqrt{8}$.
- De oplossingen zijn dus $x = -\frac{2}{7}$ of $x = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{8}$ of $x = -1 - \frac{1}{2}\sqrt{8}$.
- c** $x^2 = 4(x + 5)^2 \Rightarrow x^2 = 2^2(x + 5)^2 \Rightarrow x^2 = (2x + 10)^2 \Rightarrow$
 $x = 2x + 10$ of $x = -(2x + 10) \Rightarrow -x = 10$ of $x = -2x - 10 \Rightarrow x = -10$ of $3x = -10 \Rightarrow$
 $x = -10$ of $x = -3\frac{1}{3}$
- 7a** $g(x) = 0 \Rightarrow (x^2 - 6)(x^2 - 3x) = 0 \Rightarrow x^2 - 6 = 0$ of $x(x - 3) = 0 \Rightarrow x^2 = 6$ of
 $x = 0$ of $x = 3 \Rightarrow$
 $x = -\sqrt{6}$, $x = \sqrt{6}$, $x = 0$, $x = 3$.
- b** Beide functies bevatten de factor $x^2 - 3x$ en deze factor geeft de twee gemeenschappelijke nulpunten.
- c** $f(x) = g(x) \Rightarrow x(x^2 - 3x) = (x^2 - 6)(x^2 - 3x) \Rightarrow$
 $x^2 - 3x = 0$ of $x = x^2 - 6 \Rightarrow x(x - 3) = 0$ of $x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow$
 $x(x - 3) = 0$ of $(x - 3)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0$, $x = 3$, $x = 3$, $x = -2$.
 De snijpunten zijn dus $(0, 0)$, $(3, 0)$ en $(-2, -20)$.
 In het punt $(3, 0)$ raken de grafieken elkaar.
- 8a** Onder het wortelteken mag geen negatief getal staan. Het domein is dus
 $D_h = [0, \rightarrow)$.
- b** Met behulp van de grafiek en de oplossing van $h(x) = 0$.
 $3\sqrt{x} - 2x = 0 \Rightarrow 3\sqrt{x} = 2x \Rightarrow 9x = 4x^2 \Rightarrow 4x^2 - 9x = 0 \Rightarrow$
 $x(4x - 9) = 0 \Rightarrow x = 0$ of $4x = 9 \Rightarrow x = 0$ of $x = 2\frac{1}{4}$
 Dus $h(x) < 0$ als $x > 2\frac{1}{4}$

6.2 Algebra met breuken

bladzijde 156

9a $\frac{1}{4} + \frac{2}{7} = \frac{7}{28} + \frac{8}{28} = \frac{15}{28}$

b $\frac{1}{x} + 2 = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x} = \frac{1+2x}{x}$

c $\frac{2}{x} \cdot \frac{3}{x} = \frac{6}{x^2}$

d $\frac{x^2}{7} \cdot \frac{28}{x} = \frac{28x^2}{7x} = \frac{4x}{1} = 4x$

10a $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{2}{7}} = \frac{42 \cdot \frac{5}{6}}{42 \cdot \frac{2}{7}} = \frac{7 \cdot 5}{6 \cdot 2} = \frac{35}{12}$

b $\frac{5}{6} \cdot \frac{7}{2} = \frac{35}{12}$

c Wanneer je teller en noemer vermenigvuldigd met het omgekeerde van de noemer, dan wordt de noemer 1 en krijg je dus als uitkomst de teller vermenigvuldigd met het omgekeerde van de noemer.

$$\frac{\frac{5}{6}}{\frac{2}{7}} = \frac{\frac{5}{6} \cdot \frac{7}{2}}{\frac{2}{7} \cdot \frac{7}{2}} = \frac{\frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 2}}{1} = \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{2} = \frac{35}{12}$$

bladzijde 155

11a $D_f : x \neq 0, \quad f(x) = \frac{2}{x} - \frac{3}{1} = \frac{2}{x} - \frac{3x}{x} = \frac{2-3x}{x}$

b $D_f : x \neq 0, \quad f(x) = \frac{5}{x} : \frac{15}{x^2} = \frac{5}{x} \cdot \frac{x^2}{15} = \frac{5x^2}{15x} = \frac{x}{3} = \frac{1}{3}x$

c $D_f : x \neq 1, \quad f(x) = \frac{x}{1} + \frac{x}{x-1} = \frac{x(x-1)}{x-1} + \frac{x}{x-1} = \frac{x^2-x+x}{x-1} = \frac{x^2}{x-1}$

d $D_f : x \neq 0, \quad f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{3}{x}$

e $D_f : x \neq 0, \quad f(x) = \frac{3x}{1} \cdot \frac{2}{x^2} = \frac{6x}{x^2} = \frac{6}{x}$

f $D_f : x \neq 0 \text{ en } x \neq 1, \quad f(x) = \frac{x-1}{x} \cdot \frac{x^2}{2x-2} = \frac{x^2(x-1)}{x(2x-2)} = \frac{x^2(x-1)}{2x(x-1)} = \frac{x}{2} = \frac{1}{2}x$

12a $\frac{x^2}{4-x} = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \cdot (4-x) \quad (x \neq 4) \Rightarrow x^2 = 8 - 2x \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow$
 $(x+4)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -4 \text{ of } x = 2$

b $\frac{12}{x+1} = \frac{x-4}{2} \Rightarrow (x+1)(x-4) = 2 \cdot 12 \quad (x \neq -1) \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 24 \Rightarrow$
 $x^2 - 3x - 28 = 0 \Rightarrow (x-7)(x+4) = 0 \Rightarrow x = 7 \text{ of } x = -4$

c $\frac{12}{4-2\sqrt{x}} = 4 \Rightarrow 12 = 4 \cdot (4-2\sqrt{x}) \quad (x \neq 4) \Rightarrow 12 = 16 - 8\sqrt{x} \Rightarrow 8\sqrt{x} = 4 \Rightarrow$
 $\sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

$$d \quad \frac{10+2^x}{10-2^x} = 9 \Rightarrow 10+2^x = 9 \cdot (10-2^x) \quad (2^x \neq 10) \Rightarrow 10+2^x = 90-9 \cdot 2^x \Rightarrow 10 \cdot 2^x = 80 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$$

$$13a \quad \frac{x}{x+3} = 4 \Rightarrow x = 4x+12 \quad (x \neq -3) \Rightarrow -3x = 12 \Rightarrow x = -4 \text{ Snijpunt is dus } (-4, 4)$$

$$b \quad \frac{x}{x+3} = \frac{4}{x} \Rightarrow x^2 = 4x+12 \quad (x \neq -3, x \neq 0) \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$c \quad x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow (x-6)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 6 \text{ of } x = -2 \quad f(6) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \text{ en } f(-2) = \frac{-2}{1} = -2$$

De snijpunten zijn dus $(6, \frac{2}{3})$ en $(-2, -2)$.

6.3 Rekenen met wortels

bladzijde 158

$$14a \quad f(x) \text{ en } g(x) \text{ hebben verschillende grafieken. } D_f = [0, \rightarrow) \text{ en } D_g = [-2, \rightarrow).$$

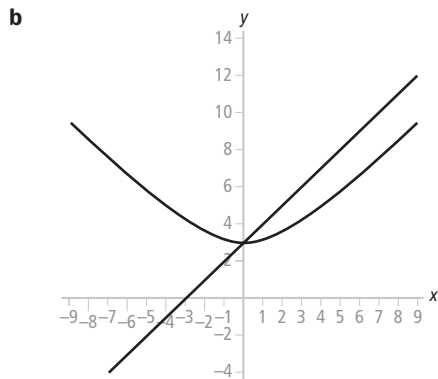
$$b \quad f(x) \text{ en } g(x) \text{ hebben dezelfde grafieken. } D_f = D_g = [0, \rightarrow).$$

$$c \quad f(x) \text{ en } g(x) \text{ hebben dezelfde grafieken. } D_f = D_g = \langle 0, \rightarrow).$$

$$d \quad f(x) \text{ en } g(x) \text{ hebben verschillende grafieken. } D_f = \mathbb{R} \text{ en } D_g = \mathbb{R}.$$

$$e \quad f(x) \text{ en } g(x) \text{ hebben verschillende grafieken. } D_f = \mathbb{R} \text{ en } D_g = \mathbb{R}.$$

$$15a \quad B_f = [3, \rightarrow) \text{ en } B_g = \mathbb{R}. \text{ Het bereik is verschillend, dus geldt niet voor elke } x \text{ dat } \sqrt{x^2+9} = x+3 \text{ (in feite geldt alleen voor } x=0 \text{ dat } \sqrt{x^2+9} = x+3).$$



Het snijpunt is het punt $(0, 3)$.

$$c \quad \text{Een wortel is altijd groter of gelijk aan 0, dus moet gelden } x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2.$$

$$16a \quad \sqrt{200} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

$$\sqrt{96} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{6} = 4\sqrt{6}$$

$$\sqrt{48} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$\sqrt{75} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

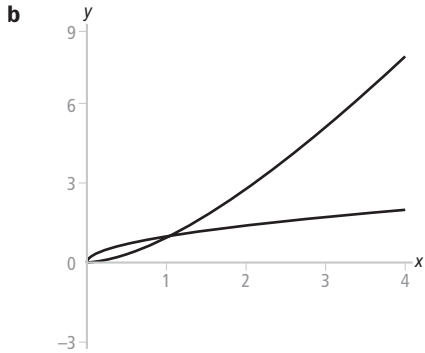
$$\sqrt{1000} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{10} = 10\sqrt{10}.$$

$$b \quad \sqrt{18} - \sqrt{8} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

c Vierkant $ABCD$. Er geldt:

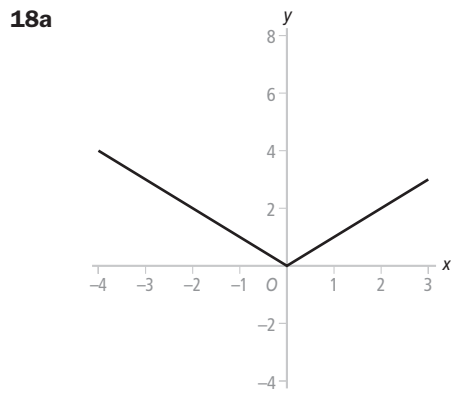
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = z^2 + z^2 = 2 \cdot z^2 \Rightarrow AC = \sqrt{2 \cdot z^2} = z \cdot \sqrt{2}.$$

17a $D_f = D_g = [0, \rightarrow)$.

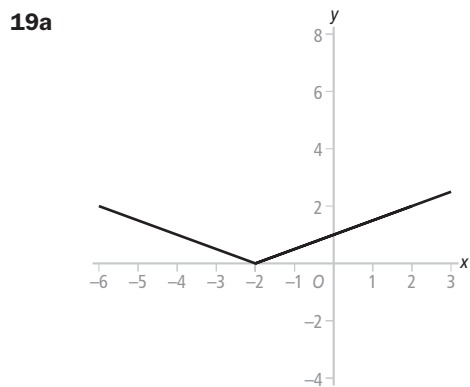


c $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{x^2} = x$ met $D_h = \langle 0, \rightarrow)$, dus de grafiek van h is een deel van de rechte lijn $y = x$.

bladzijde 159

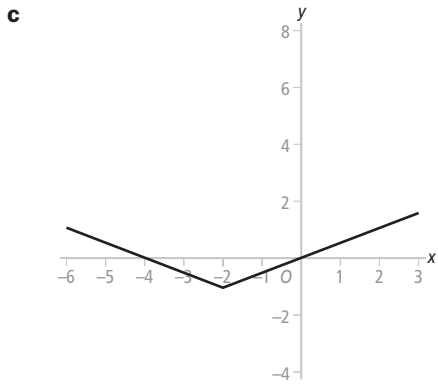


b Voor $x \geq 0$ vallen de grafieken van f en $y = x$ samen.

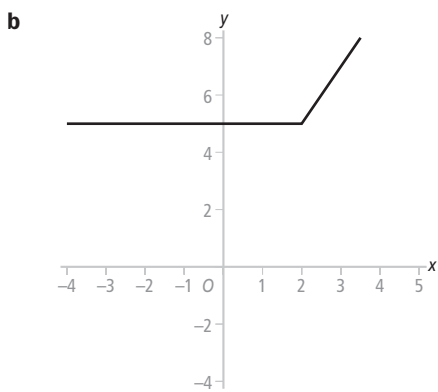
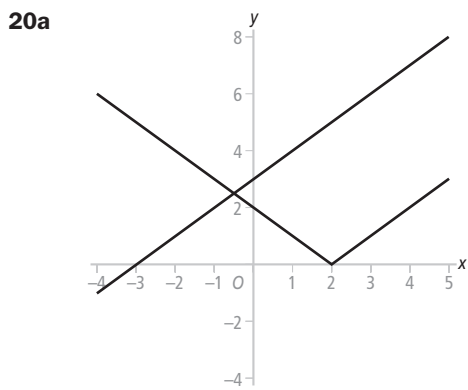


De knik zit bij $x = -2$

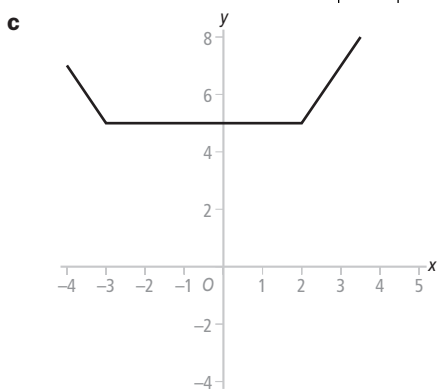
b $f(x) = \left| \frac{1}{2}x + 1 \right| = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - 1 & \text{als } x \leq -2 \\ \frac{1}{2}x + 1 & \text{als } x > -2 \end{cases}$



De nulpunten van g zijn: $x = -4$ en $x = 0$.



Voor $x \leq 2$ geldt: $f(x) = |x - 2| = -x + 2 \Rightarrow h(x) = -x + 2 + 3 + x = 5$.

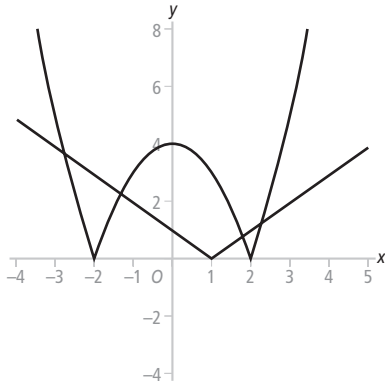


Voor $x \leq -3$ geldt $|g(x)| = |3+x| = -3-x$ en $f(x) = |x-2| = -x+2$, dus $k(x) = -2x-1$

Voor $-3 < x < 2$ geldt $|g(x)| = |3+x| = 3+x$ en $f(x) = |x-2| = -x+2$, dus $k(x) = 5$

Voor $x \geq 2$ geldt $|g(x)| = |3+x| = 3+x$ en $f(x) = |x-2| = x-2$, dus $k(x) = 2x+1$

21a



- b** $\sqrt{x^2} = |x| \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$
c De grafiek van $k(x)$ ontstaat uit de grafiek van $l(x)$ door het deel van de grafiek van $l(x)$ dat onder de x -as ligt te spiegelen in de x -as.
d Eerst oplossen $h(x) = k(x)$ en dan met de grafiek de ongelijkheid oplossen.
 Eerst $x \leq -2 \Rightarrow h(x) = -x+1$ en $k(x) = x^2-4$.

$$-x+1 = x^2-4 \Rightarrow x^2+x-5 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21} \approx 1,79 \text{ vervalt, of}$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{21} \approx -2,79 \text{ voldoet.}$$

$$-2 < x < 2 \Rightarrow h(x) = -x+1 \text{ en } k(x) = -x^2+4$$

$$-x+1 = -x^2+4 \Rightarrow x^2-x-3 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13} \approx 2,30 \text{ vervalt, of}$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13} \approx -1,30 \text{ voldoet.}$$

$$1 \leq x \leq 2 \Rightarrow h(x) = x-1 \text{ en } k(x) = -x^2+4$$

$$x-1 = -x^2+4 \Rightarrow x^2+x-5 = 0 \Rightarrow (\text{Zie eerste vergelijking})$$

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21} \approx 1,79 \text{ voldoet, of}$$

$$x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{21} \approx -2,79 \text{ vervalt.}$$

$$x > 2 \Rightarrow h(x) = x-1 \text{ en } k(x) = x^2-4$$

$$x-1 = x^2-4 \Rightarrow x^2-x-3 = 0 \Rightarrow (\text{Zie tweede vergelijking})$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13} \approx 2,30 \text{ voldoet, of}$$

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13} \approx -1,30 \text{ vervalt.}$$

Dus $h(x) > k(x)$ met de grafiek en de oplossingen, als

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{21} < x < \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13} \text{ en } -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}.$$

6.4 Stelsels vergelijkingen

bladzijde 160

- 22a** Gegeven is dat de som, dus $p + q = 10\frac{1}{2} \Rightarrow q = 10\frac{1}{2} - p$.
- b** Gegeven is dat het product, dus $p \cdot q = 24\frac{1}{2}$ en omdat $q = 10\frac{1}{2} - p$ geldt dus $p \cdot q = 24\frac{1}{2} \Rightarrow p(10\frac{1}{2} - p) = 24\frac{1}{2} \Rightarrow 10\frac{1}{2}p - p^2 = 24\frac{1}{2}$
- c** $10\frac{1}{2}p - p^2 = 24\frac{1}{2} \Rightarrow p^2 - 10\frac{1}{2}p + 24\frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 2p^2 - 21p + 49 = 0 \Rightarrow$

$$p = \frac{21 + \sqrt{(-21)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 49}}{2 \cdot 2} = \frac{21 + \sqrt{49}}{4} = \frac{21 + 7}{4} = 7 \Rightarrow q = 10\frac{1}{2} - 7 = 3\frac{1}{2}$$
 of

$$p = \frac{21 - \sqrt{(-21)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 49}}{2 \cdot 2} = \frac{21 - \sqrt{49}}{4} = \frac{21 - 7}{4} = 3\frac{1}{2} \Rightarrow q = 10\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2} = 7$$
- 23a** -
- b** Inhoud van de balk = lengte \times breedte \times hoogte = $b \cdot a \cdot a = a^2b$
 Oppervlakte totaal = $2 \times$ voorvlak + $2 \times$ zijvlak + $2 \times$ grondvlak =
 $2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot a + 2 \cdot a \cdot b = 2a^2 + 4ab$
- c** Inhoud = 112 $\Rightarrow a^2b = 112 \Rightarrow b = \frac{112}{a^2}$
- d** Oppervlakte = 144 $\Rightarrow 2a^2 + 4ab = 144 \Rightarrow 2a^2 + 4a \frac{112}{a^2} = 144$
- e** $2a^2 + 4a \frac{112}{a^2} = 144 \Rightarrow 2a^2 + \frac{448}{a} - 144 = 0$. Deze vergelijking oplossen met de rekenmachine geeft $a = 4 \Rightarrow b = \frac{112}{4^2} = 7$ en $a \approx 5,75 \Rightarrow b \approx 3,39$
- f** De balk is dus 4 bij 4 bij 7 of 5,75 bij 5,75 bij 3,39.
- 24a** $\begin{cases} x \cdot a = 12 \\ x + 2a = 25 \Rightarrow x = 25 - 2a \end{cases}$ invullen in de eerste geeft:
 $(25 - 2a) \cdot a = 12 \Rightarrow 25a - 2a^2 = 12 \Rightarrow 2a^2 - 25a + 12 = 0 \Rightarrow$

$$a = \frac{25 + \sqrt{(-25)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{2 \cdot 2} = \frac{25 + \sqrt{529}}{4} = \frac{25 + 23}{4} = 12 \Rightarrow x = 25 - 2 \cdot 12 = 1$$
 of

$$a = \frac{25 - \sqrt{(-25)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{2 \cdot 2} = \frac{25 - \sqrt{529}}{4} = \frac{25 - 23}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 25 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 24$$

 Dus $a = 12$ en $x = 1$ of $a = \frac{1}{2}$ en $x = 24$
- b** $\begin{cases} \frac{a}{x+1} = 3 \Rightarrow a = 3(x+1) \\ 2ax = 432 \end{cases}$ invullen in de tweede geeft:
 $2 \cdot 3(x+1) \cdot x = 432 \Rightarrow 6x^2 + 6x = 432 \Rightarrow x^2 + x - 72 = 0 \Rightarrow (x+9)(x-8) = 0 \Rightarrow$
 $x = -9 \Rightarrow a = 3 \cdot (-9+1) = -24$ of $x = 8 \Rightarrow a = 3(8+1) = 27$
 Dus $x = -9$ en $a = -24$ of $x = 8$ en $a = 27$

c
$$\begin{cases} x + 3a^2 = 15 \\ 2x + a = 4 \end{cases}$$
 invullen in de tweede geeft:

$$2 \cdot (15 - 3a^2) + a = 4 \Rightarrow 30 - 6a^2 + a - 4 = 0 \Rightarrow 6a^2 - a - 26 = 0 \Rightarrow$$

$$a = \frac{1 + \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-26)}}{2 \cdot 6} = \frac{1 + \sqrt{625}}{12} = \frac{1 + 25}{12} = 2\frac{1}{6} \Rightarrow x = 15 - 3 \cdot (2\frac{1}{6})^2 = \frac{11}{12}$$
 of

$$a = \frac{1 - \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-26)}}{2 \cdot 6} = \frac{1 - \sqrt{625}}{12} = \frac{1 - 25}{12} = -2 \Rightarrow x = 15 - 3 \cdot (-2)^2 = 3$$

 Dus $a = 2\frac{1}{6}$ en $x = \frac{11}{12}$ of $a = -2$ en $x = 3$

bladzijde 161

25a Noem het aantal cd's van Charlotte y . Er geldt dan: $y = 3x$ en $y = 76 - x$.

b
$$\begin{cases} y = 3x \\ y = 76 - x \end{cases}$$

c vul de bovenste in in de onderste, je krijgt dan:
 $x = 76 - 3x \Rightarrow 4x = 76 \Rightarrow x = 19$ en $y = 3 \cdot 19 = 57$
 Charlotte heeft 57 cd's en Rianka heeft 19 cd's.

26a Uit de gegevens volgt dan: $k = 6m$.

b Zes jaar later is Karin $k + 6$ jaar en Merle $m + 6$ jaar. Dus volgt uit de gegevens:
 $k + 6 = 3 \cdot (m + 6)$.

c
$$\begin{cases} k = 6m \\ k + 6 = 3 \cdot (m + 6) \end{cases}$$
 de eerste in de tweede invullen geeft:
 $6m + 6 = 3(m + 6) \Rightarrow 6m + 6 = 3m + 18 \Rightarrow 3m = 12 \Rightarrow m = 4$ en dus $k = 24$.
 Op 1 april 2000 was Karin 24 jaar en Merle 4 jaar.

27a De grafiek gaat door $A(0, 5)$, dus 0 invullen geeft 5. Dus $c = 5$.

b Door $B(4, 13) \Rightarrow a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + 5 = 13 \Rightarrow 16a + 4b = 8 \Rightarrow b = 2 - 4a$
 Door $C(12, 0) \Rightarrow a \cdot 12^2 + b \cdot 12 + 5 = 0 \Rightarrow 144a + 12b = -5$.

c De eerste in de tweede invullen geeft:
 $144a + 12 \cdot (2 - 4a) = -5 \Rightarrow 144a + 24 - 48a = -5 \Rightarrow 96a = -29 \Rightarrow a = -\frac{29}{96} \approx -0,3$ en dus
 $b = 2 - 4 \cdot -\frac{29}{96} = \frac{77}{24} = 3\frac{5}{24} \approx 3,2$.
 Het functievoorschrift: $f(x) = -\frac{29}{96}x^2 + 3\frac{5}{24}x + 5 \approx -0,3x^2 + 3,2x + 5$

28a 75 kippen verkopen dan houden ze er $k - 75$ over. Ze kunnen dan 20 dagen langer met het voer doen, dus $d + 20$. De hoeveelheid voer is dus ook evenredig met $(k - 75)(d + 20)$. En dus geldt:

$$kd = (k - 75)(d + 20).$$

b $kd = (k - 75)(d + 20) \Rightarrow kd = kd + 20k - 75d - 1500 \Rightarrow 20k = 75d + 1500 \Rightarrow k = 3,75d + 75$

c het aankopen van kippen geeft de vergelijking:
 $kd = (k + 100)(d - 15) \Rightarrow kd = kd - 15k + 100d - 1500 \Rightarrow 15k = 100d - 1500$.

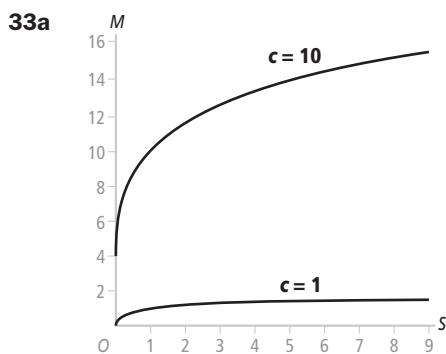
d De eerste in de tweede invullen geeft:
 $15(3,75d + 75) = 100d - 1500 \Rightarrow 56,25d + 1125 = 100d - 1500 \Rightarrow 43,75d = 2625 \Rightarrow d = 60$
 en dus is $k = 3,75 \cdot 60 + 75 = 300$. De boer heeft nu dus 300 kippen.

- 29a** $2x - y = -1 \Rightarrow y = 2x + 1$.
 Snijden geeft: $2x + 1 = 2 + \frac{3}{x} \Rightarrow 2x^2 + x = 2x + 3 \Rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow$
 $x = \frac{1 + \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 + \sqrt{25}}{4} = \frac{1 + 5}{4} = 1\frac{1}{2} \Rightarrow$ snijpunt $(1\frac{1}{2}, 4)$ of
 $x = \frac{1 - \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 - \sqrt{25}}{4} = \frac{1 - 5}{4} = -1 \Rightarrow$ snijpunt $((-1), -1)$
- b** Snijden geeft: $x^2 = 2 + \frac{3}{x^2} \Rightarrow x^4 = 2x^2 + 3 \Rightarrow x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ Stel $x^2 = p$ dan:
 $p^2 - 2p - 3 = 0 \Rightarrow (p - 3)(p + 1) = 0 \Rightarrow p = 3$ of $p = -1$ (vervalt)
 $p = 3 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}$ of $x = -\sqrt{3}$.
 De snijpunten zijn dan $(\sqrt{3}, 3)$ en $(-\sqrt{3}, 3)$

6.5 Gelijkwaardige formules

bladzijde 162

- 30a** Het vermoeden is dat beide functies gelijk zijn.
- b** $g(x) = x^3 + 2x^2 + 4x - 2x^2 - 4x - 8 = x^3 - 8 = f(x)$
- 31** Jeroen bedoelt dat wanneer je twee van de drie variabelen kent er voor de derde bij beide formules dezelfde waarde uitkomt.
- 32a** $P = I^2 \cdot R \Rightarrow R = \frac{P}{I^2}$
- b** $P = I^2 \cdot R \Rightarrow I^2 = \frac{P}{R} \Rightarrow I = \sqrt{\frac{P}{R}}$
- c** $P = I^2 \cdot 20 \Rightarrow I^2 = \frac{P}{20} = \frac{1}{20} P \Rightarrow I = \sqrt{\frac{1}{20} P}$



- b** $c = 4$ en $M = 5 \Rightarrow 5 = 4 \cdot S^{0,2} \Rightarrow S^{0,2} = \frac{5}{4} \Rightarrow (S^{0,2})^5 = \left(\frac{5}{4}\right)^5 \Rightarrow S = 3\frac{53}{1024}$.
- c** $M = c \cdot S^{0,2} \Rightarrow S^{0,2} = \frac{M}{c} \Rightarrow (S^{0,2})^5 = \left(\frac{M}{c}\right)^5 \Rightarrow S = \frac{M^5}{c^5}$

bladzijde 163

- 34a** $\frac{1}{f} = \frac{1}{v} + \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{12} = \frac{1}{8} + \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{1}{12} - \frac{1}{8} = \frac{2}{24} - \frac{3}{24} = -\frac{1}{24} \Rightarrow b = -24$ cm.
 (Dit wil zeggen dat het beeld aan dezelfde kant van de lens ontstaat als het voorwerp)

- b $\frac{1}{f} = \frac{1}{v} + \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{10} + \frac{1}{150} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{15}{150} + \frac{1}{150} = \frac{16}{150} \Rightarrow f = 9\frac{3}{8}$ cm.
- c $\frac{1}{f} = \frac{1}{v} + \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{10} = \frac{1}{v} + \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{1}{10} - \frac{1}{v} = \frac{v}{10v} - \frac{10}{10v} = \frac{v-10}{10v} \Rightarrow b = \frac{10v}{v-10}$
- d Zie opdracht c
- e $f = 10 \Rightarrow b = \frac{10v}{v-10}$. Wanneer v heel groot wordt dan geldt $v - 10 \approx v \Rightarrow b \approx \frac{10v}{v} \approx 10$
Dit klopt met de werkelijkheid, wanneer het voorwerp ver weg is komt het beeld in het brandpunt terecht.
- f $f = 10$ en $N = 1,5$ geeft het stelsel:

$$\begin{cases} b = \frac{10v}{v-10} \\ \frac{b}{v} = 1,5 \Rightarrow b = 1,5v \end{cases} \quad \text{De tweede vergelijking invullen in de eerste geeft:}$$

$$1,5v = \frac{10v}{v-10} \Rightarrow 1,5v(v-10) = 10v \Rightarrow 1,5v^2 - 15v = 10v \Rightarrow 1,5v^2 - 25v = 0 \Rightarrow$$

$$v(1,5v - 25) = 0 \Rightarrow v = 0 \text{ vervalft, of } 1,5v = 25 \Rightarrow v = 16\frac{2}{3} \Rightarrow b = 25$$

35a $T = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{T}{2} \Rightarrow \frac{l}{g} = \frac{T^2}{4} \Rightarrow l = \frac{T^2 g}{4}$

b $T = 1$ en $g = 9,8 \Rightarrow l = \frac{1^2 \cdot 9,8}{4} \approx 0,25$ meter.

- c Wanneer de slingertijd twee keer zo groot moet worden dan moet $\sqrt{\frac{l}{g}}$ twee keer zo groot worden. Omdat de versnelling tengevolge van de zwaartekracht, een constante is, moet dus de lengte van de slinger vier keer zo groot worden, want $\sqrt{4} = 2$.

6.6 Meetkundige toepassingen

bladzijde 164

36a Hellinggetal = $\frac{0-6}{12-0} = -\frac{1}{2}$ en het startgetal is 6. Dus $AB: y = -\frac{1}{2}x + 6$.

b x -coördinaat van P is a dan is $P(a, -\frac{1}{2}a + 6) \Rightarrow R(a, 0)$ en $Q(0, -\frac{1}{2}a + 6)$.

De oppervlakte wordt dan $OR \cdot OQ = a(-\frac{1}{2}a + 6) = -\frac{1}{2}a^2 + 6a$.

c Opgelost moet worden: $-\frac{1}{2}a^2 + 6a = 14 \Rightarrow -\frac{1}{2}a^2 + 6a - 14 = 0 \Rightarrow a^2 - 12a + 28 = 0 \Rightarrow$

$$a = \frac{12 + \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 28}}{2 \cdot 1} \text{ of } a = \frac{12 - \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 28}}{2 \cdot 1} \Rightarrow a \approx 8,83 \text{ of } a \approx 3,17$$

d De oppervlakteformule invoeren in de rekenmachine geeft max 18 voor $a = 6$

bladzijde 165

37a Geheel langs de weg zijn de kosten: $7000 \cdot 60 = 420\,000$, - euro.

Geheel door het land zijn de kosten: $\sqrt{5000^2 + 2000^2} \cdot 75 = 403\,887,36$ euro

b $PQ = 2$ km $\Rightarrow PH = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} \approx 2,828$ km. en $CP = 3$ km. De kosten zijn dan:
 $2828 \cdot 75 + 3000 \cdot 60 = 392\,100$, - euro.

- c $0 \leq x \leq 5$
 d $PQ = x \text{ km} \Rightarrow PH = \sqrt{x^2 + 2^2} = \sqrt{x^2 + 4} \text{ km}$ en $CP = 5 - x \text{ km}$.
 Totale kosten in duizenden euro:
 $K(x) = 60 \cdot (5 - x) + 75 \cdot \sqrt{x^2 + 4} = 300 - 60x + 75 \cdot \sqrt{x^2 + 4}$
 e $\sqrt{x^2 + 4} > \sqrt{x^2} = x \Rightarrow 75\sqrt{x^2 + 4} > 75x \Rightarrow$
 $K(x) = 300 - 60x + 75 \cdot \sqrt{x^2 + 4} > 300 - 60x + 75x = 300 + 15x$.

38a De oppervlakte van de doos is:

$2 \times$ oppervlakte voorkant + $2 \times$ oppervlakte zijkant + oppervlakte grondvlak =

$$2 \cdot 2x \cdot h + 2 \cdot x \cdot h + 2x \cdot x = 120 \Rightarrow 4xh + 2xh + 2x^2 = 120 \Rightarrow 6xh + 2x^2 = 120 \Rightarrow$$

$$6xh = 120 - 2x^2 \Rightarrow h = \frac{120 - 2x^2}{6x}$$

b Inhoud van de doos is lengte x breedte x hoogte =

$$I = 2x \cdot x \cdot \frac{120 - 2x^2}{6x} = \frac{120x - 2x^3}{3} = 40x - \frac{2}{3}x^3.$$

c Voer de formule voor de inhoud in in je rekenmachine en bepaal voor welke x de inhoud maximaal is. Je vindt: $x = 4,5 \text{ dm}$.

d $h = \frac{120 - 2x^2}{6x} \Rightarrow 6xh = 120 - 2x^2 \Rightarrow 2x^2 + 6xh - 120 = 0 \Rightarrow x^2 + 3xh - 60 = 0$ Dit is een tweedegraads vergelijking met oplossing:

$$x = \frac{-3h + \sqrt{(3h)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -60}}{2 \cdot 1} = \frac{-3h + \sqrt{9h^2 + 240}}{2}$$

De tweede oplossing is altijd negatief en voldoet dus niet.

e $\sqrt{9h^2 + 240} > \sqrt{9h^2} = 3h \Rightarrow -3h + \sqrt{9h^2 + 240} > 0 \Rightarrow x = \frac{-3h + \sqrt{9h^2 + 240}}{2} > 0$

39a $Q(a, 0) \Rightarrow P(a, \sqrt{10a - a^2})$

b $QM = |a - 5|$

c De afstand van M tot het willekeurige punt P :

$$d(M, P) = \sqrt{QM^2 + QP^2} = \sqrt{(a - 5)^2 + (\sqrt{10a - a^2})^2} = \sqrt{a^2 - 10a + 25 + 10a - a^2} = \sqrt{25} = 5$$

Deze afstand is onafhankelijk van a . Dus alle punten op de grafiek hebben dezelfde afstand tot M namelijk 5.

6.7 Gemengde opdrachten

bladzijde 166

- 40a** $z = 7$ en $h = 5 \Rightarrow O = 2 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7 \cdot 5 + 2 \cdot 7 \cdot 5 = 238 \text{ cm}^2$ en $I = 7 \cdot 7 \cdot 5 = 245 \text{ cm}^3$
 b $O = 2 \cdot z^2 + 2 \cdot z \cdot h + 2 \cdot z \cdot h = 2z^2 + 4zh \text{ cm}^2$ en $I = z \cdot z \cdot h = z^2h \text{ cm}^3$
 c Dan moet gelden: $O = I \Rightarrow 2z^2 + 4zh = z^2h$
 d $z = 8 \Rightarrow 2 \cdot 64 + 4 \cdot 8 \cdot h = 64 \cdot h \Rightarrow 128 + 32h = 64h \Rightarrow 32h = 128 \Rightarrow h = 4$.
 e $z = 4 \Rightarrow 2 \cdot 16 + 4 \cdot 4 \cdot h = 16 \cdot h \Rightarrow 32 + 16h = 16h \Rightarrow 0h = 32 \Rightarrow$ geen oplossing.
 $z = 3 \Rightarrow 2 \cdot 9 + 4 \cdot 3 \cdot h = 9 \cdot h \Rightarrow 18 + 12h = 9h \Rightarrow 3h = -18 \Rightarrow h = -6$ kan niet.
 f $2z^2 + 4zh = z^2h \Rightarrow z^2h - 4zh = 2z^2 \Rightarrow h(z^2 - 4z) = 2z^2 \Rightarrow h = \frac{2z^2}{z^2 - 4z} = \frac{2z}{z - 4}$
 g $z = 5$; $z = 6$; $z = 8$; $z = 12$
 h Dit zijn de balken met afmetingen: $5 \times 5 \times 10$; $6 \times 6 \times 6$; $8 \times 8 \times 4$ en $12 \times 12 \times 3$.

41a Ten opzichte van het getekende assenstelsel geldt dan

$A(-4, 10)$, $B(4, 10)$ en $C(0, 6)$.

$y = \sqrt{ax^2 + b}$ door A, B en C geeft:

$$\begin{cases} 10 = \sqrt{16a + b} \\ 6 = \sqrt{b} \Rightarrow b = 36 \end{cases} \text{ de tweede invullen in de eerste geeft}$$

$$10 = \sqrt{16a + 36} \Rightarrow 16a + 36 = 100 \Rightarrow 16a = 64 \Rightarrow a = 4$$

Dus $a = 4$ en $b = 36$.

b

$$y = \sqrt{ax^2 + b} \Rightarrow y^2 = ax^2 + b \Rightarrow ax^2 = y^2 - b \Rightarrow x^2 = \frac{y^2 - b}{a} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{y^2 - b}{a}} \text{ of } x = -\sqrt{\frac{y^2 - b}{a}}$$

c

$y = cx^2 + d$ door A, B en C geeft:

$$\begin{cases} 10 = 16c + d \\ 6 = d \Rightarrow d = 6 \end{cases} \text{ de tweede invullen in de eerste geeft } 10 = 16c + 6 \Rightarrow 16c = 4 \Rightarrow c = \frac{1}{4}$$

Dus $c = \frac{1}{4}$ en $d = 6$.

d

Het verschil van de y-waarden is: $h(x) = (\sqrt{4x^2 + 36}) - (\frac{1}{4}x^2 + 6) = \sqrt{4x^2 + 36} - \frac{1}{4}x^2 - 6$

Deze functie invoeren in de rekenmachine geeft maximum 0,25 voor

$x = -2,6$ en $x = 2,6$.

bladzijde 167

42a $(x - 2)^2 = (2x + 1)^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow 3x^2 + 8x - 3 = 0 \Rightarrow$

$$x = \frac{-8 + \sqrt{64 + 36}}{6} = \frac{-8 + 10}{6} = \frac{1}{3} \text{ of } x = \frac{-8 - \sqrt{64 + 36}}{6} = \frac{-8 - 10}{6} = -3$$

Dus $x = -3$ of $x = \frac{1}{3}$

b

$$\frac{3x}{x+1} = \frac{x+2}{x} \Rightarrow 3x \cdot x = (x+1)(x+2) \Rightarrow 3x^2 = x^2 + 3x + 2 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{3 + \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{3 + 5}{4} = 2 \text{ of } x = \frac{3 - \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{3 - 5}{4} = -\frac{1}{2}$$

Dus $x = -\frac{1}{2}$ of $x = 2$

c

$$x - 24 = 2\sqrt{x} \Rightarrow (x - 24)^2 = 4x \Rightarrow x^2 - 48x + 576 = 4x \Rightarrow x^2 - 52x + 576 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{52 + \sqrt{2704 - 2304}}{2} = \frac{52 + 20}{2} = 36 \text{ of } x = \frac{52 - \sqrt{2704 - 2304}}{2} = \frac{52 - 20}{2} = 16 \text{ vervalt.}$$

Dus $x = 36$.

d

$$|2x + 8| = x^2 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 8 = x^2 \text{ als } x > -4 \\ 2x + 8 = -x^2 \text{ als } x \leq -4 \end{cases}$$

$$2x + 8 = x^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ of } x = -2 \text{ beide voldoen.}$$

$$2x + 8 = -x^2 \Rightarrow x^2 + 2x + 8 = 0 \Rightarrow \text{geen oplossing want de discriminant is kleiner dan 0.}$$

Dus $x = 4$ of $x = -2$

e $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - 3\left(\frac{x}{x+1}\right) - 4 = 0$ Stel $\frac{x}{x+1} = a$ de vergelijking wordt dan:

$$a^2 - 3a - 4 = 0 \Rightarrow (a-4)(a+1) = 0 \Rightarrow a = 4 \text{ of } a = -1$$

$$a = 4 \Rightarrow \frac{x}{x+1} = 4 \Rightarrow x = 4x + 4 \Rightarrow 3x = -4 \Rightarrow x = -1\frac{1}{3}$$

$$a = -1 \Rightarrow \frac{x}{x+1} = -1 \Rightarrow x = -(x+1) \Rightarrow x = -x - 1 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Dus $x = -1\frac{1}{3}$ of $x = -\frac{1}{2}$

f $\frac{4^x}{2^x + 4} = 2 \Rightarrow 4^x = 2 \cdot (2^x + 4) \Rightarrow (2^x)^2 = 2 \cdot 2^x + 8 \Rightarrow (2^x)^2 = 2 \cdot 2^x + 8$ Stel $2^x = a$

dan krijg je:

$$a^2 = 2a + 8 \Rightarrow a^2 - 2a - 8 = 0 \Rightarrow (a-4)(a+2) = 0 \Rightarrow a = 4 \text{ of } a = -2$$

$$a = 4 \Rightarrow 2^x = 4 = 2^2 \Rightarrow x = 2$$

$$a = -2 \Rightarrow 2^x = -2 \Rightarrow \text{geen oplossing.}$$

Dus $x = 2$

43a Tijd nodig voor AB is x uur $\Rightarrow BC$ in $x + \frac{1}{6}$ uur (volgens Brown 10 minuten = $\frac{1}{6}$ uur meer)

b $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$. De afstanden AB, BC en CA zijn even groot dus elk $\frac{4}{12}$ van de totale afstand.

$$\frac{9}{12} = \frac{4}{12} + \frac{4}{12} + \frac{1}{12} = AB + BC + \frac{1}{4} AC.$$

c Smith: eerste driekwart duurde $3\frac{1}{2}$ uur $\Rightarrow x + (x + \frac{1}{6}) + \frac{1}{4}y = 3\frac{1}{2} \Rightarrow 2x + \frac{1}{4}y = 3\frac{1}{3}$.

d Jones: laatste driekwart duurde $4\frac{1}{2}$ uur $\Rightarrow y + (x + \frac{1}{6}) + \frac{1}{4}x = 4\frac{1}{2} \Rightarrow 1\frac{1}{4}x + y = 4\frac{1}{3}$.

e Opgelost moet worden het stelsel:

$$\begin{cases} 2x + \frac{1}{4}y = 3\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{4}y = -2x + 3\frac{1}{3} \Rightarrow y = -8x + 13\frac{1}{3} \\ 1\frac{1}{4}x + y = 4\frac{1}{3} \end{cases}$$

bovenste invullen in de onderste geeft

$$1\frac{1}{4}x + (-8x + 13\frac{1}{3}) = 4\frac{1}{3} \Rightarrow 1\frac{1}{4}x - 8x + 13\frac{1}{3} = 4\frac{1}{3} \Rightarrow -6\frac{3}{4}x = -9 \Rightarrow x = 1\frac{1}{3} \text{ uur}$$

$$y = -8x + 13\frac{1}{3} = -8 \cdot 1\frac{1}{3} + 13\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3} \text{ uur}$$

AB duurde $1\frac{1}{3}$ uur, BC duurde $1\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1\frac{1}{2}$ uur en CA duurde $2\frac{2}{3}$ uur.

Totaal duurde de tocht dus $5\frac{1}{2}$ uur.

Test jezelf

bladzijde 170

T-1a $2x^4 - 3x^2 - 2 = 0$ stel $x^2 = a \Rightarrow 2a^2 - 3a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{3 + \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3+5}{4} = 2$ of

$$a = \frac{3 - \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}.$$

$$a = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = -\sqrt{2} \text{ of } x = \sqrt{2}, a = -\frac{1}{2} \text{ geeft geen oplossing.}$$

Dus $x = -\sqrt{2}$ of $x = \sqrt{2}$

b $(x^2 - 3x)^2 = 4 \Rightarrow x^2 - 3x = -2$ of $x^2 - 3x = 2$

$$x^2 - 3x = -2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ of } x = 2$$

$$x^2 - 3x = 2 \Rightarrow x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{3 + \sqrt{9+8}}{2} = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17} \approx 3,56 \text{ of } x = \frac{3 - \sqrt{9+8}}{2} = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17} \approx -0,56.$$

Dus $x = 1$ of $x = 2$ of $x = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17} \approx 3,56$ of $x = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17} \approx -0,56$.

- c** $2x(x+3) = (x+3)(x^2-3) \Rightarrow x+3=0$ of $2x = x^2-3 \Rightarrow$
 $x = -3$ of $x^2-2x-3=0 \Rightarrow (x-3)(x+1)=0 \Rightarrow x=3$ of $x=-1$
 Dus $x = -3$ of $x=3$ of $x=-1$
- d** $9x^4 = 4(x^2+3x-4)^2 \Rightarrow 3x^2 = 2(x^2+3x-4)$ of $3x^2 = -2(x^2+3x-4) \Rightarrow$
 $3x^2 = 2(x^2+3x-4) \Rightarrow 3x^2 = 2x^2+6x-8 \Rightarrow x^2-6x+8=0 \Rightarrow$
 $(x-2)(x-4)=0 \Rightarrow x=2$ of $x=4$
 $3x^2 = -2(x^2+3x-4) \Rightarrow 3x^2 = -2x^2-6x+8 \Rightarrow 5x^2+6x-8=0 \Rightarrow$
 $x = \frac{-6+\sqrt{36+160}}{10} = \frac{-6+14}{10} = \frac{8}{10}$ of $x = \frac{-6-\sqrt{36+160}}{10} = \frac{-6-14}{10} = -2$
 De oplossing is dus $x=2$ of $x=4$ of $x=\frac{8}{10}$ of $x=-2$

T-2a $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} - \frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1-2(x-1)}{(x-1)(x+1)} =$
 $\frac{x+1-2x+2}{(x-1)(x+1)} = \frac{-x+3}{(x-1)(x+1)}$

b $\frac{3}{(x+3)} = \frac{-x+3}{(x-1)(x+1)} \Rightarrow \frac{3(x-1)(x+1)}{(x+3)(x-1)(x+1)} - \frac{(-x+3)(x+3)}{(x+3)(x-1)(x+1)} = 0 \Rightarrow$
 $\frac{3(x^2-1)-(-x^2+9)}{(x+3)(x-1)(x+1)} = 0 \Rightarrow \frac{3x^2-3+x^2-9}{(x+3)(x-1)(x+1)} = 0 \Rightarrow \frac{4x^2-12}{(x+3)(x-1)(x+1)} = 0 \Rightarrow$
 $4x^2-12=0 \Rightarrow x^2-3=0 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x = -\sqrt{3}$ of $x = \sqrt{3}$

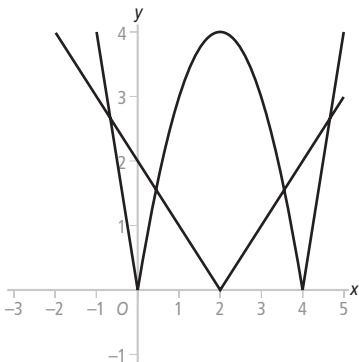
De x -coördinaten van de snijpunten zijn dus $x = -\sqrt{3}$ en $x = \sqrt{3}$.

T-3a De grafiek van f ontstaat uit de grafiek van g door het deel van de grafiek van g dat onder de x -as ligt te spiegelen in de x -as.

b $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & \text{als } x < 0 \text{ of } x > 4 \\ -x^2 + 4x & \text{als } 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$

c $h(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{als } x > 2 \\ -x + 2 & \text{als } x \leq 2 \end{cases}$

oplossen van $f(x) > h(x)$ met behulp van de grafiek en de berekende snijpunten.



Met de rekenmachine de snijpunten benaderen geeft :

$x < 0$: $-x+2 = x^2-4x \Rightarrow x \approx -0,56$ of $x \approx 3,56$ (vervalt) $\Rightarrow x \approx -0,56$
 $0 \leq x \leq 2$: $-x+2 = -x^2+4x \Rightarrow x \approx 0,44$ of $x \approx 4,56$ (vervalt) $\Rightarrow x \approx 0,44$
 $2 < x < 4$: $x-2 = -x^2+4x \Rightarrow x \approx -0,56$ (vervalt) of $x \approx 3,56 \Rightarrow x \approx 3,56$
 $x \geq 4$: $x-2 = x^2-4x \Rightarrow x \approx 0,44$ (vervalt) of $x \approx 4,56 \Rightarrow x \approx 4,56$
 Dus $f(x) > h(x)$ heeft oplossing $x < -0,56$ of $0,44 < x < 3,56$ of $x > 4,56$

T-4a De oppervlakte is $33600 \Rightarrow l \cdot b = 33600$; de omtrek is $800 \Rightarrow 2l + 2b = 800 \Rightarrow l + b = 400$.

b
$$\begin{cases} l \cdot b = 33600 \\ l + b = 400 \Rightarrow l = 400 - b \end{cases}$$
 De tweede in de eerste invullen geeft:

$$(400 - b) \cdot b = 33600 \Rightarrow 400b - b^2 = 33600 \Rightarrow b^2 - 400b + 33600 = 0 \Rightarrow$$

$$b = \frac{400 + \sqrt{160000 - 134400}}{2} = \frac{400 + \sqrt{25600}}{2} = \frac{400 + 160}{2} = 280 \text{ of}$$

$$b = \frac{400 - \sqrt{160000 - 134400}}{2} = \frac{400 - \sqrt{25600}}{2} = \frac{400 - 160}{2} = 120$$

$b = 280$ en $l = 120$ of $b = 120$ en $l = 280$

T-5a $d = 0,1 \Rightarrow v = \frac{10\sqrt{3+3h}}{h}$.

Nee, neem bijvoorbeeld $h = 3 \Rightarrow v = \frac{10\sqrt{3+9}}{3} \approx 11,5$. Dus een muur van 3 meter hoog wordt bij een windsnelheid van 11,5 m/s omgeblazen.

Neem $h = 6 \Rightarrow v = \frac{10\sqrt{3+18}}{6} \approx 7,6$ De muur wordt juist bij een lagere snelheid omver geblazen.

b Dan wordt de waarde van v heel groot. Dit is wel realistisch, want een heel laag muurtje zal niet snel omwaaien.

bladzijde 171

T-6a De inhoud van een cilinder is gelijk aan de oppervlakte van het grondvlak maal de hoogte. Dus:

$$850 = r^2 \cdot h \Rightarrow h = \frac{850}{r^2}$$

b De oppervlakte van een cilinder is de oppervlakte van boven- en onderkant plus de oppervlakte van de cilindermantel. De lengte van de cilindermantel is de omtrek van de grondcirkel. Dus: $O = 2 \cdot r^2 + 2 \cdot r \cdot h$ en met behulp van opdracht a wordt dat:

$$O = 2 \cdot r^2 + 2 \cdot r \cdot h \Rightarrow O = 2 \cdot r^2 + 2 \cdot r \cdot \frac{850}{r^2} \Rightarrow O = 2 \cdot r^2 + \frac{1700}{r}$$

c $O = 2 \cdot r^2 + \frac{1700}{r}$ met behulp van de rekenmachine vind je dat O is minimaal als $r \approx 5,1$ cm.

en dan is $h = \frac{850}{5,1^2} \approx 10,3$ cm

T-7a $(x+2)(x^2-2x-3) = (x+2)(1-x^2) \Rightarrow x+2=0$ of $x^2-2x-3=1-x^2 \Rightarrow$

$$x = -2 \text{ of } 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ of } x = -1$$

Dus: $x = -2$, $x = -1$ of $x = 2$

b $4x^2 = (1-2x)^2 \Rightarrow 2x = 1-2x$ of $2x = -(1-2x) \Rightarrow$
 $4x = 1$ of $2x = -1+2x$ (geen oplossing) $\Rightarrow x = \frac{1}{4}$

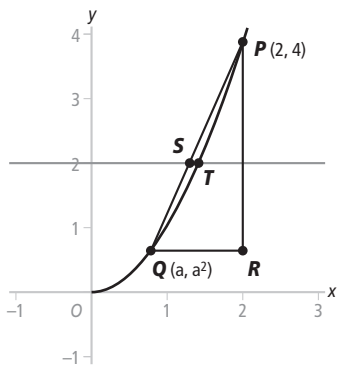
c $\frac{x-7}{x-2} = \frac{5+3x}{x+1} \Rightarrow (x-7)(x+1) = (5+3x)(x-2) \Rightarrow x^2 - 7x + x - 7 = 5x - 10 + 3x^2 - 6x \Rightarrow$
 $-2x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 5x - 3 = 0 \Rightarrow$

$$x = \frac{-5 + \sqrt{25+24}}{4} = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2} \text{ of } x = \frac{-5 - \sqrt{25+24}}{4} = \frac{-5-7}{4} = -3$$

Dus $x = \frac{1}{2}$ of $x = -3$

- d** $\begin{cases} 4xy = 3 \\ x + y = -1 \Rightarrow x = -y - 1 \end{cases}$ de tweede in de eerste invullen geeft:
 $4(-y - 1)y = -3 \Rightarrow -4y^2 - 4y = -3 \Rightarrow 4y^2 + 4y - 3 = 0 \Rightarrow$
 $y = \frac{-4 + \sqrt{16 + 48}}{8} = \frac{-4 + 8}{8} = \frac{1}{2}$ of $y = \frac{-4 - \sqrt{16 + 48}}{8} = \frac{-4 - 8}{8} = -1\frac{1}{2}$
 $y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -1\frac{1}{2}$ of $y = -1\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
- e** $|1 - 2x| = 3 \Rightarrow 1 - 2x = 3$ of $1 - 2x = -3 \Rightarrow -2x = 2$ of $-2x = -4 \Rightarrow x = -1$ of $x = 2$
- f** $2x^8 - x^4 = 15$ Stel $x^4 = a \Rightarrow 2a^2 - a = 15 \Rightarrow 2a^2 - a - 15 = 0 \Rightarrow$
 $a = \frac{1 + \sqrt{1 + 120}}{4} = \frac{1 + 11}{4} = 3$ of $a = \frac{1 - \sqrt{1 + 120}}{4} = \frac{1 - 11}{4} = -2\frac{1}{2}$
 $a = 3 \Rightarrow x^4 = 3 \Rightarrow x = -\sqrt[4]{3}$ of $x = \sqrt[4]{3}$ $a = -2\frac{1}{2} \Rightarrow x^4 = -2\frac{1}{2}$ geen oplossing.
 Dus $x = -\sqrt[4]{3}$ of $x = \sqrt[4]{3}$
- g** $\frac{3}{x} - \frac{2}{x-1} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{3(x-1)}{x(x-1)} - \frac{2x}{x(x-1)} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{3x-3-2x}{x(x-1)} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{x-3}{x(x-1)} = \frac{1}{10} \Rightarrow$
 $10(x-3) = x(x-1) \Rightarrow 10x - 30 = x^2 - x \Rightarrow x^2 - 11x + 30 = 0 \Rightarrow (x-5)(x-6) = 0 \Rightarrow$
 $x = 5$ of $x = 6$
- h** $\begin{cases} x + 3y = 0 \Rightarrow x = -3y \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$ De eerste vergelijking invullen in de tweede geeft:
 $(-3y)^2 - y^2 = 5 \Rightarrow 9y^2 - y^2 = 5 \Rightarrow 8y^2 = 5 \Rightarrow y^2 = \frac{5}{8} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{5}{8}}$ of $y = -\sqrt{\frac{5}{8}}$
 $y = \sqrt{\frac{5}{8}} \Rightarrow x = -3\sqrt{\frac{5}{8}}$ of $y = -\sqrt{\frac{5}{8}} \Rightarrow x = 3\sqrt{\frac{5}{8}}$

T-8a



$$\text{Helling } PQ = \frac{PR}{QR} = \frac{4 - a^2}{2 - a} = \frac{(2 - a)(2 + a)}{2 - a} = 2 + a$$

- b** Stel $S(s, 2)$. S ligt op lijnstuk PQ , dus is ook de helling van $PS = 2 + a$ maar geldt

$$\text{helling } PS = \frac{4 - 2}{2 - s} = \frac{2}{2 - s}, \text{ dus geldt}$$

$$2 + a = \frac{2}{2 - s} \Rightarrow (2 - s)(2 + a) = 2 \Rightarrow 2 - s = \frac{2}{2 + a} \Rightarrow$$

$$-s = -2 + \frac{2}{2 + a} \Rightarrow s = 2 - \frac{2}{2 + a} \text{ Dus punt } S\left(2 - \frac{2}{2 + a}, 2\right)$$

- c** $T(\sqrt{2}, 2)$ en $S\left(2 - \frac{2}{2 + a}, 2\right)$ De lengte van ST is dan

$$(\sqrt{2}) - \left(2 - \frac{2}{2 + a}\right) = \sqrt{2} - 2 + \frac{2}{2 + a}$$

Dus moet gelden $\sqrt{2} - 2 + \frac{2}{2 + a} < 0,01 \Rightarrow$ met de rekenmachine $1,357 < a < 1,414$
 (want Q blijft tussen O en T , dus $a < \sqrt{2}$)