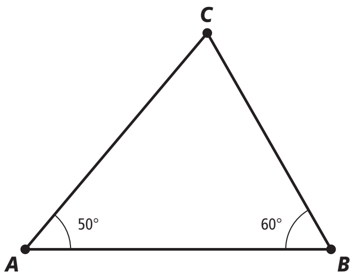
Hoofdstuk 5 - Definities en stellingen

Voorkennis: Bijzondere figuren

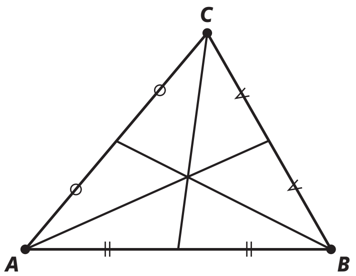
bladzijde 130

V-1a



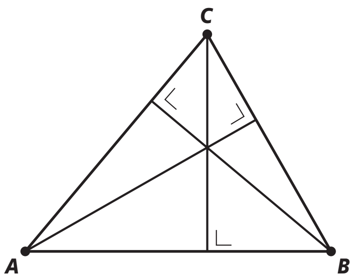
b $\angle C = 180^\circ - 50^\circ - 60^\circ = 70^\circ$

c



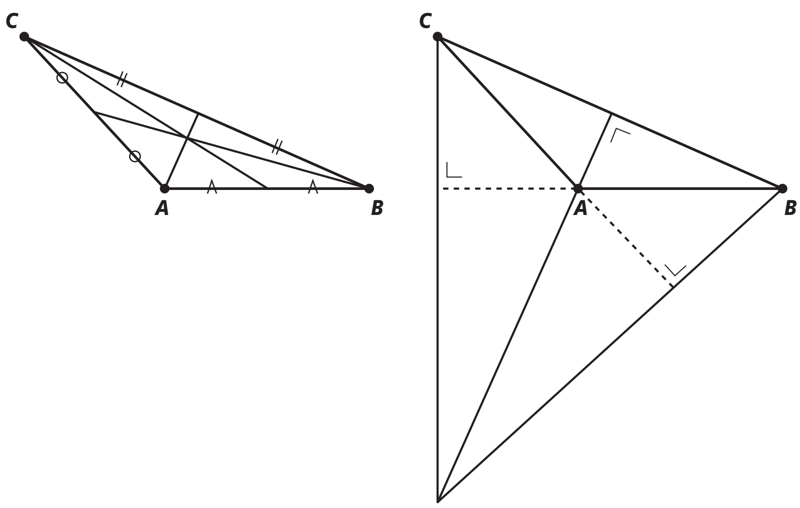
Ja, de zwaartelijnen gaan door één punt: het zwaartepunt

d



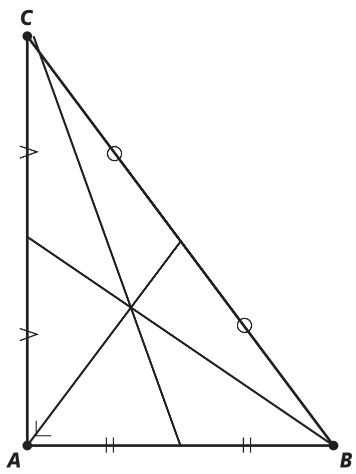
Ja, de hoogtelijnen gaan door één punt: het hoogtepunt

V2-a

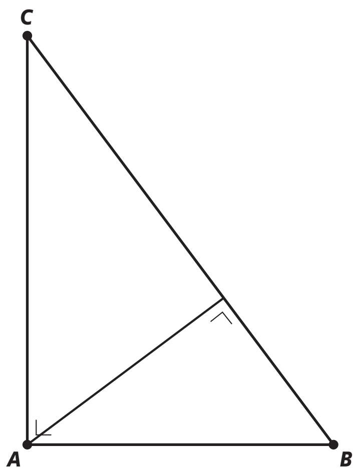


De zwaartelijnen gaan door één punt en ook de hoogtelijnen gaan door een punt, maar het hoogtepunt ligt nu buiten de driehoek.

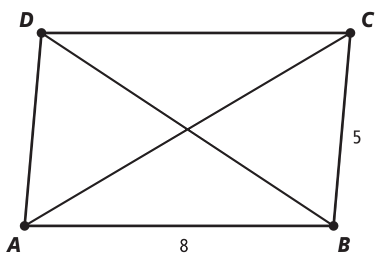
b



De zwaartelijnen gaan weer door één punt. Ook de hoogtelijnen gaan door één punt, namelijk punt A.

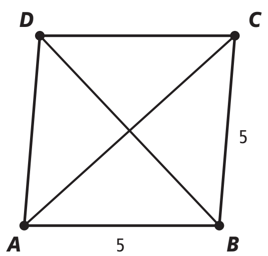


V-3a,b



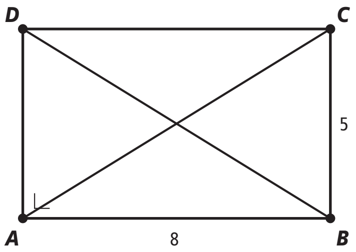
c Nee want de figuur is niet symmetrisch in AC of BD

d



Ja want een ruit is symmetrisch in de diagonalen

e



Nee want de figuur is niet symmetrisch in AC of BD

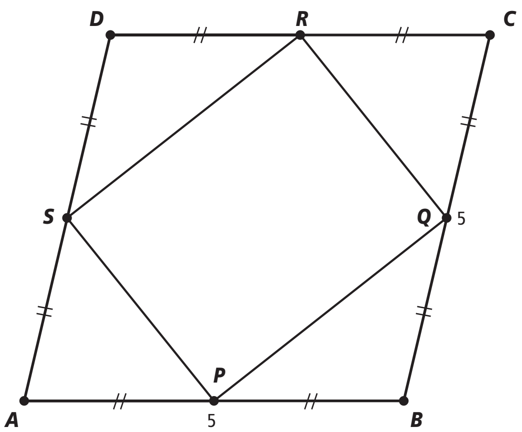
bladzijde 131

V-4a Ruit, vlieger, vierkant

b Ruit, parallellogram, rechthoek, vierkant

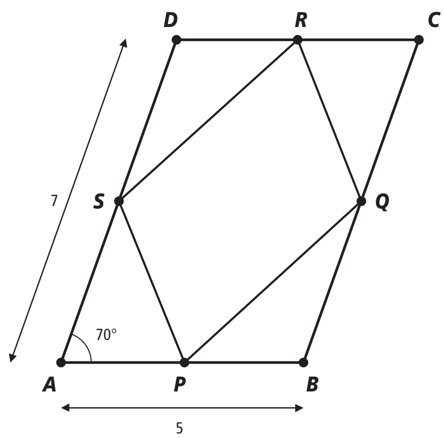
c Beide diagonalen delen de hoeken middendoor: Ruit, vierkant
Eén diagonaal deelt de hoeken middendoor: Vlieger

V-5a,b



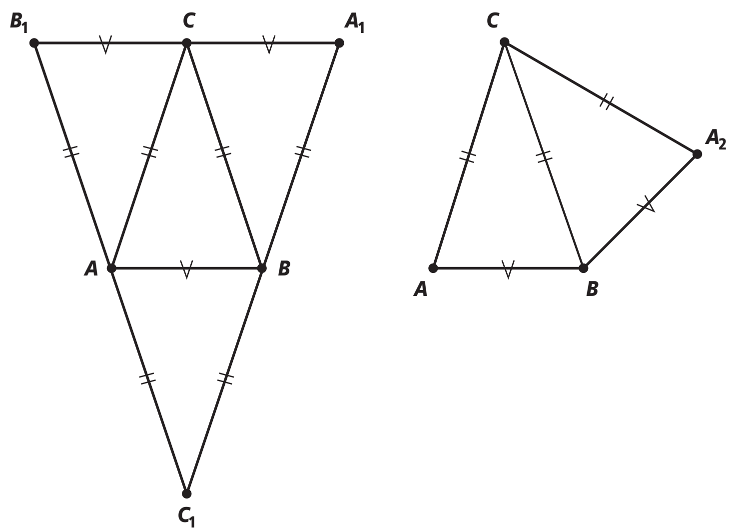
c $PQRS$ is een rechthoek, want:
$PS // BD$ en $RQ // BD$ dus $PS // RQ$
$PQ // AC$ en $RS // AC$ dus $PQ // RS$
Omdat $AC \perp BD$ geldt $PS \perp PQ$ en dus is $\angle QPS = 90^\circ$
Ook de overige hoeken van $PQRS$ zijn recht.

d



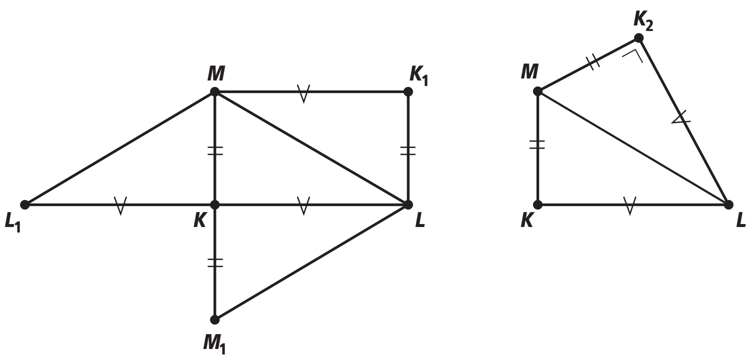
$PQRS$ is een parallellogram, want:
$PS // BD$ en $RQ // BD$ dus $PS // RQ$
$PQ // AC$ en $RS // AC$ dus $PQ // RS$

V-6a,b



Parallellogram ABA_1C, parallellogram $ABCB_1$, ruit AC_1BC en vlieger ABA_2C

c



Rechthoek KLK_1M, vlieger KLK_2M

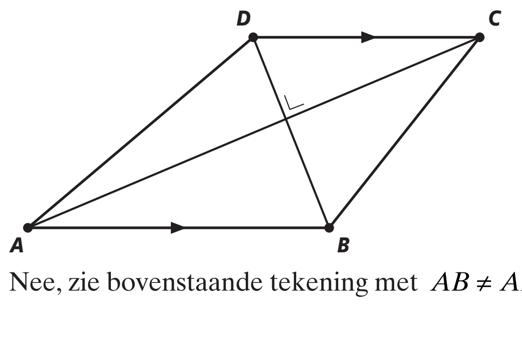
V-7a Ja want in een ruit zijn de overstaande zijden evenwijdig.

b Ja want alle hoeken zijn recht (rechthoek) en alle zijden zijn even lang (ruit).

c Ja, spiegelen in de diagonalen laat zien dat alle zijden even lang zijn.

d Ja want een ruit is symmetrisch in beide diagonalen.

e



Nee, zie bovenstaande tekening met $AB \neq AD$ en dus is vierhoek $ABCD$ geen vlieger.

5.1 Gelijkvormigheid

bladzijde 132

1a $\angle A_3 = 38^\circ$

b $\angle A_2 = \angle A_4 = 180^\circ - 38^\circ = 142^\circ$

$\angle B_1 = \angle B_3 = \angle D_3 = \angle D_1 = 180^\circ - 38^\circ - 78^\circ = 64^\circ$
$\angle B_2 = \angle B_4 = \angle D_4 = \angle D_2 = 180^\circ - 64^\circ = 116^\circ$
$\angle C_2 = \angle C_4 = \angle E_4 = \angle E_2 = 78^\circ$
$\angle C_1 = \angle C_3 = \angle E_3 = \angle E_1 = 180^\circ - 78^\circ = 102^\circ$

c Overstaande hoeken zijn gelijk.
Een gestrekte hoek is 180°.
F-hoeken zijn gelijk.
Z-hoeken zijn gelijk.

2a Overstaande hoeken zijn gelijk.
Een gestrekte hoek is 180°.

b $\angle E_1 = \angle E_3 = 180^\circ - 142^\circ = 38^\circ$
$\angle E_4 = \angle E_2 = 142^\circ$

c $\angle B_2 = \angle B_4 = \angle A_3 = \angle A_1 = 71^\circ$
$\angle B_1 = \angle B_3 = \angle A_2 = \angle A_4 = 180^\circ - 71^\circ = 109^\circ$

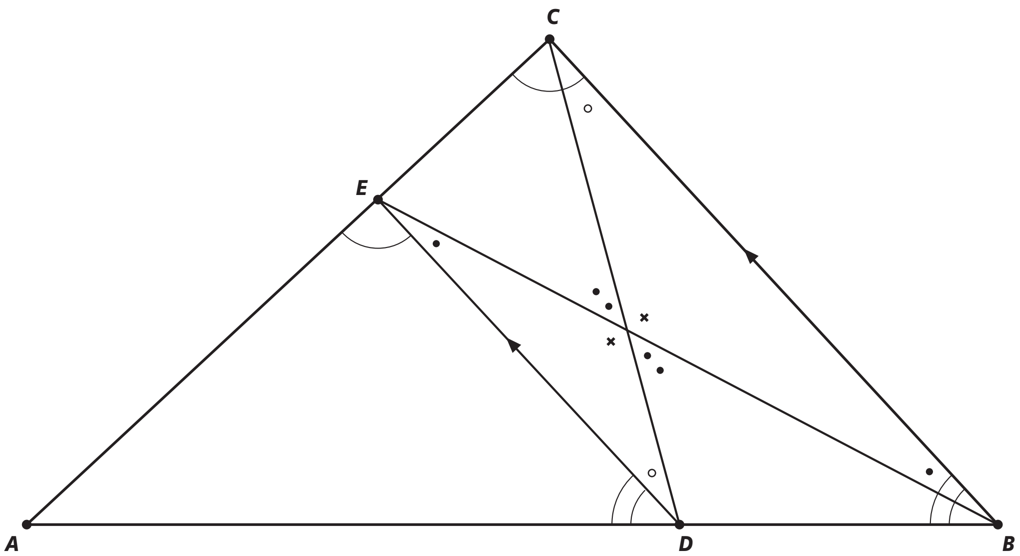
bladzijde 133

3a Factor 4 want $\dfrac{AC}{DC} = \dfrac{12}{3} = 4$

b $4 \times 4\frac{1}{2} = 18$

c $\angle ABC = \angle DEC$ en $\angle BAC = \angle EDC$ met als gevolg $AB // DE$

4a



b $\angle ADE = \angle ABC$ en $\angle AED = \angle ACB$ dus $\Delta ADE \sim \Delta ABC$

c Factor $\dfrac{24}{16} = 1\frac{1}{2}$ en dus is $AC = 1\frac{1}{2} \times 18 = 27$ en is $DE = 15 : 1\frac{1}{2} = 10$

d $\Delta DEF \sim \Delta CBF$

e $\dfrac{DF}{FC} = \dfrac{DE}{CB} = \dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$

5a $\angle ACB = \angle D = 90^\circ$ en $\angle B = \angle B$ dus $\Delta ABC \sim \Delta CBD$

b $BC = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$ en $17 \cdot CD = 8 \cdot 15$ (via oppervlakte van ΔABC) dus is $CD = \dfrac{8 \cdot 15}{17} = 7\frac{1}{17}$

c $AD = \sqrt{15^2 - (7\frac{1}{17})^2} = 13\frac{4}{17}$ en $DB = 17 - 13\frac{4}{17} = 3\frac{13}{17}$

d $\angle A = \angle A$ en $\angle D = \angle C = 90^\circ$ dus is $\Delta ADC \sim \Delta ACB$

5.2 Stellingen en definities

bladzijde 134

6a Z-hoeken

b $\angle B = \angle C_3$

c $\angle A + \angle B + \angle C_2 = \angle C_1 + \angle C_3 + \angle C_2 = 180^\circ$

d De drie hoeken van een driehoek zijn 180°

bladzijde 135

7a Teken vanuit één hoekpunt de beide diagonalen. Er ontstaan dan drie driehoeken. De hoekensom van een vijfhoek is dus $3 \times 180^\circ = 540^\circ$

b Teken vanuit één hoekpunt de vier diagonalen. Er ontstaan dan vijf driehoeken. Dus is de hoekensom van een zevenhoek $5 \times 180^\circ = 900^\circ$
Voor een n-hoek is de hoekensom $(n-2) \times 180^\circ$

8a $\angle B_1 + \angle B_2 = 180^\circ$ (gestrekte hoek)

b $\angle B_2 = 180^\circ - \angle B_1 = (\angle A + \angle B_1 + \angle C) - \angle B_1 = \angle A + \angle C$

9 $\angle ADB = \angle C + \frac{1}{2}\angle B$ (stelling van de buitenhoek bij ΔBDC)
$\angle BED = \angle A + \angle ADE = \angle A + \frac{1}{2} ADB = \angle A + \frac{1}{2}(\angle C + \frac{1}{2}\angle B) = \angle A + \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{4}\angle B$

10a $\angle ASE = \angle SAC + \angle SCA = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle C = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma$

b $\angle DSE = 360^\circ - \angle B - \angle SEB - \angle SDB = 360^\circ - \beta - (\alpha + \frac{1}{2}\gamma) - (\frac{1}{2}\alpha + \gamma) =$
$360^\circ - \beta - 1\frac{1}{2}\alpha - 1\frac{1}{2}\gamma$

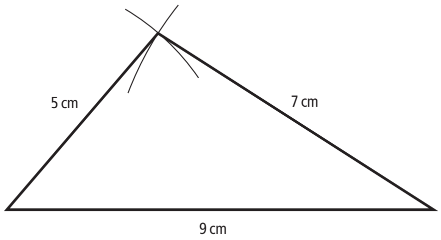
11 $\angle D = \angle ACD$ en $\angle D + \angle ACD = \angle A = \alpha$ (buitenhoek) dus $\angle D = \angle ACD = \frac{1}{2}\alpha$
$\angle E = \angle ECB$ en $\angle E + ECB = \angle B = \beta$ (buitenhoek) dus $\angle E = \angle ECB = \frac{1}{2}\beta$
$\angle DCE = \frac{1}{2}\alpha + \gamma + \frac{1}{2}\beta$

5.3 Congruente driehoeken

bladzijde 136

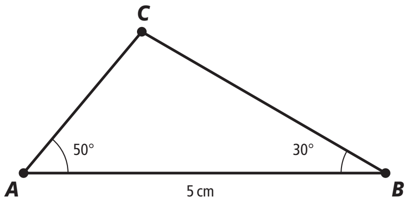
12a Nee, $3 + 7 < 11$

b



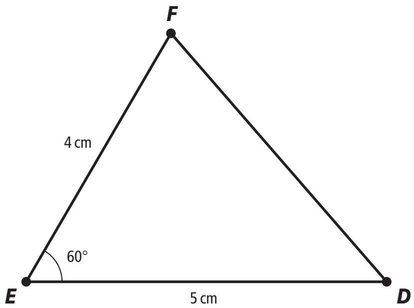
c Ja

13a



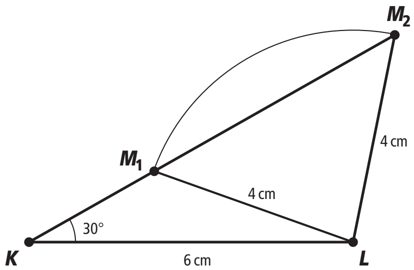
b $\angle C = 100^\circ$; BC is ongeveer 3,9 cm en AC is ongeveer 2,5 cm

c

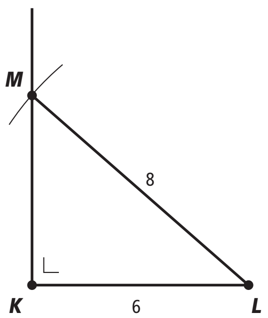


bladzijde 137

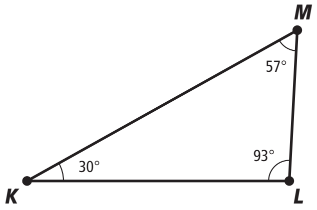
14a



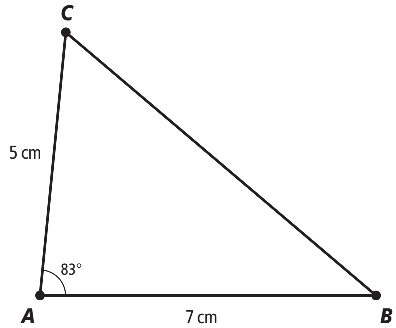
b Nee, alleen de volgende figuur is mogelijk.



c Alleen de volgende figuur is mogelijk

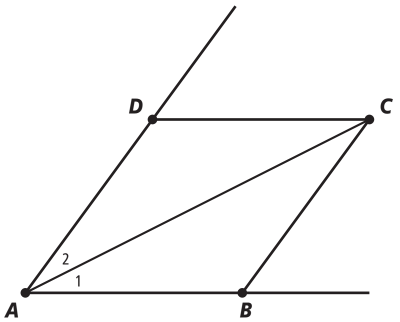


15a



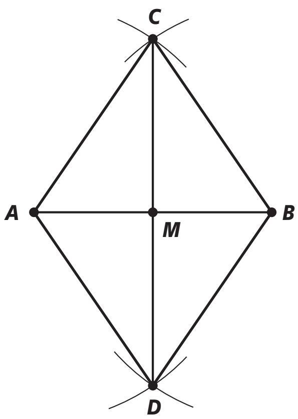
b ZHZ

16



$|AB| = |AD|$ en $|BC| = |DC|$ en $|AC| = |AC|$
Dus $\Delta ABC \cong \Delta ADC$ $(ZZZ) \Rightarrow \angle BAC = \angle DAC \Rightarrow AC$ is bissectrice.

17



$|AC| = |BC| = |BD| = |AD|$ dus is $ABCD$ een ruit en delen de diagonalen elkaar loodrecht middendoor. Daarmee is de rode lijn CD de middelloodlijn van lijnstuk AB.

5.4 Een bewijs aanpakken

bladzijde 138

18a -

b Met $\angle B = \angle B$ en de gegevens vind je dat $\Delta BRP \cong \Delta BTQ$ (ZHH)

c De hoeken van de driehoeken zijn gelijk dus moet er nog een tweetal gelijke zijden zijn.

d Uit $\Delta BRP \cong \Delta BTQ$ volgt dat $|BT| = |BR|$
Omdat $|BP| = |BQ|$ moet gelden $|PT| = |RQ|$ want
$|PT| = |BP| - |BT|$ en $|RQ| = |BQ| - |BR|$

e Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l} \angle T = \angle R \ (= 90^\circ) \\ \angle P = \angle Q \ (= 90^\circ - \angle B) \\ |PT| = |QR| \ \text{(opdracht d)} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta PST \cong \Delta QRS \ \ (HZH)$$

Dus $|PS| = |QS|$

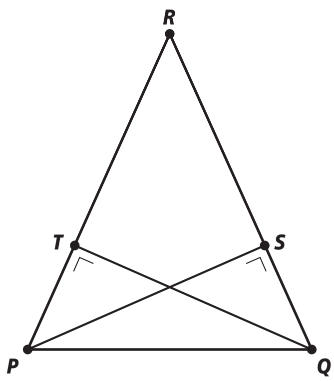
bladzijde 139

19 Gegeven:
ΔABC met $|AB| = |AC|$ en punt P op bissectrice van $\angle A$
Te bewijzen: $|RB| = |QC|$
Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l} |AB| = |AC| \ \text{(gegeven)} \\ \angle BAP = \angle CAP \ (P \text{ op bissectrice}) \\ |AP| = |AP| \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta APB \cong \Delta APC \ \ (ZHZ) \ ....(1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle P_1 = \angle P_2 \ \text{(overstaande hoeken)} \\ |CP| = |BP| \quad (1) \\ \angle ACP = \angle ABP \quad (1) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta RBP \cong \Delta QCP \ (HZH) \Rightarrow |RB| = |QC|$$

20



Gegeven: ΔPQR met hoogtelijnen $|PS| = |QT|$
Te bewijzen: ΔPQR is gelijkbenig

Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l} |PS| = |QT| \text{ (gegeven)} \\ \angle S = \angle T \quad (= 90^\circ) \\ \angle R = \angle R \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta PSR \cong \Delta QTR \ (ZHH)$$

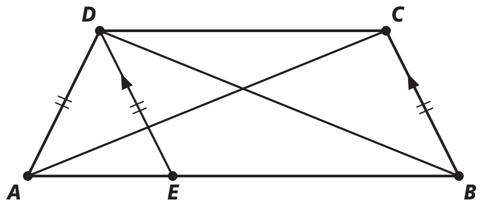
Dus $|PR| = |QR|$ en is ΔPQR gelijkbenig

21a -

b Gegeven: Trapezium $ABCD$ met $AB // CD$ en $|AD| = |BC|$

Te bewijzen: $|AC| = |BD|$

Bewijs:



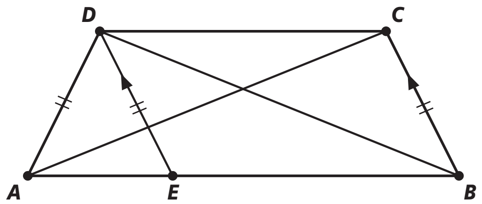
Teken $DE // BC$ dan is $EBCD$ een parallellogram en $|DE| = |BC|$

Dan is $\angle EBC = \angle AED = \angle EAD$ en dus

$\angle ADC = 180^\circ - \angle EAD = 180^\circ - \angle ABC = \angle BCD$

$$\left.\begin{array}{l} |AD| = |BC| \text{ (gegeven)} \\ |DC| = |DC| \\ \angle ADC = \angle BCD \text{ (bewezen)} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ADC \cong \Delta BCD \ (ZHZ) \Rightarrow |AC| = |BD|$$

22a



b Vermenigvuldigen vanuit C met factor 2 geeft dat het beeld van E samenvalt met A en dat het beeld van D samenvalt met B.

Dus is $\Delta CED \sim \Delta CAB$ en $ED // AB$

Dan is $\angle BAS = \angle SDE$ en $\angle ABS = \angle SED$ waarmee $\Delta ABS \sim \Delta DES$

Omdat $|ED| : |BA| = 1 : 2$ is $|AS| : |DS| = |BS| : |ES| = 2 : 1$

c Omdat $|AS| = \frac{2}{3}|AD| = \frac{2}{3}|BE| = |BS|$ is ΔABS gelijkbenig en is

$\angle BAD = \angle ABE$

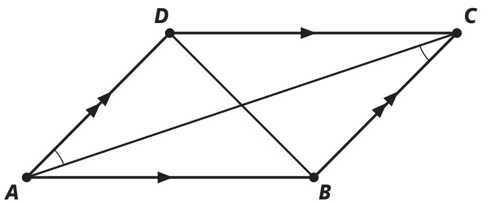
$$\left.\begin{array}{l} |AD| = |BE| \text{ (gegeven)} \\ \angle BAD = \angle ABE \text{ (bewezen)} \\ |AB| = |AB| \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BAD \cong \Delta ABE \ (ZHZ) \Rightarrow |BD| = |AE|$$

Dus geldt $|BC| = 2 \cdot |BD| = 2 \cdot |AE| = |AC|$ en daarmee is ΔABC gelijkbenig.

5.5 Gelijkwaardige definities

bladzijde 140

23a



$\angle BAC$ en $\angle ACD$; $\angle ADB$ en $\angle DBC$; $\angle CDB$ en $\angle ABD$

b AC komt in beide driehoeken voor
$\angle BAC = \angle ACD$ en $\angle BCA = \angle CAD$ (Z-hoeken)
Dus (HZH) geldt $\Delta ACD \cong \Delta CAB$

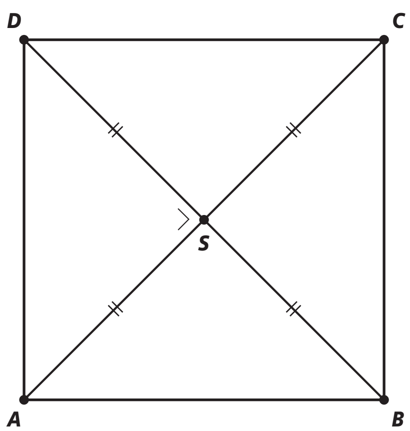
c $|AD| = |BC|$ en $|AB| = |CD|$

d Gegeven: Vierhoek $ABCD$ met $|AD| = |BC|$ en $|AB| = |CD|$
Te bewijzen: AD evenwijdig BC en AB evenwijdig CD
Bewijs: Uit het gegeven volgt $\Delta ACD \cong \Delta CAB$ (ZZZ)
Dus is $\angle BCA = \angle DAC$ en dus is $AD \,//\, BC$ (Z-hoeken)
Ook is $\angle ACD = \angle CAB$ en dus is $CD \,//\, AB$ (Z-hoeken)

bladzijde 141

24 Gegeven: Vierhoek $ABCD$ met vier hoeken van 90° en vier gelijke zijden
Te bewijzen: In $ABCD$ zijn de diagonalen even lang, delen elkaar middendoor en staan loodrecht op elkaar.
Bewijs: Vier gelijke zijden dus is $ABCD$ een ruit. In een ruit delen de diagonalen elkaar loodrecht middendoor.
Omdat $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (ZHZ) geldt $|AC| = |BD|$

Gegeven vierhoek $ABCD$ waarvan de diagonalen even lang zijn, elkaar middendoor delen en loodrecht op elkaar staan.
Te bewijzen: De vier hoeken zijn 90° en de zijden zijn even lang.
Bewijs:



De diagonalen zijn even lang en delen elkaar loodrecht middendoor. Dus zijn de hoeken bij S allemaal 90° en geldt $|AS| = |BS| = |CS| = |DS|$
Dan is $\triangle ABS \cong \triangle BCS \cong \triangle CDS \cong \triangle DAS$ $(ZHZ$
Hieruit volgt dat $|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$, dus alle zijden van vierhoek $ABCD$ zijn even lang. Omdat $|AS| = |BS|$ is $\angle BAS = \angle ABS = 45^\circ$
Analoog is $\angle DAS = 45^\circ$ en dus is $\angle BAD = 90^\circ$
Analoog $\angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$

Dus beide definities zijn equivalent.

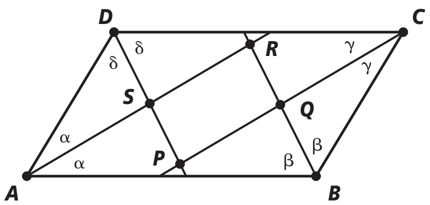
25a -

b In een ruit snijden de diagonalen elkaar loodrecht, dus wanneer de bissectrices niet loodrecht op elkaar staan kan $PQRS$ zeker geen ruit worden.
Noem het snijpunt van de diagonalen T. Dan geldt
$\triangle APT \cong \triangle ART$ en $\triangle BQT \cong \triangle BST$ $(HZH$

c Een ruit is een vierhoek waarvan alle zijden even lang zijn

d Te bewijzen: $PQRS$ is een ruit
Bewijs:
Uit $\triangle APT \cong \triangle ART$ volgt $|PT| = |RT|$
Uit $\triangle BQT \cong \triangle BST$ volgt $|ST| = |QT|$
Verder is $\angle T = 90^\circ$
Dus is $\triangle PTS \cong \triangle RTS \cong \triangle PTQ \cong \triangle RTQ$ $(ZHZ$
Dus zijn alle zijden van $PQRS$ even lang is dus is $PQRS$ een ruit

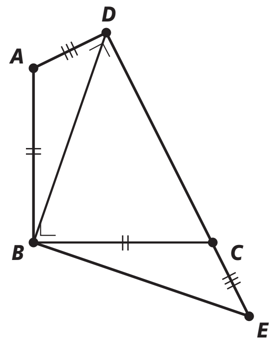
26a



Gegeven: $ABCD$ is een parallellogram
Te bewijzen: De vier bissectrices sluiten een rechthoek in.
Bewijs: $AB \,//\, DC \Rightarrow \angle BAD + \angle ADC = 180^\circ$
Dus $\alpha + \delta = 90^\circ$ en moet $\angle ASD = 90^\circ$
Analoog bewijs je dat de overige hoeken van $PQRS$ elk ook 90° zijn en daarmee is $PQRS$ een rechthoek.

b Gegeven: Een vierhoek $ABCD$ waarvan de bissectrices een rechthoek insluiten
Te bewijzen: Vierhoek $ABCD$ is een parallellogram
Bewijs: Omdat $\angle S = 90^\circ$ geldt $\alpha + \delta = 90^\circ$ en dus
$\angle BAD + \angle ADC = 180^\circ$ zodat $AB \,//\, DC$
Analoog geldt ook dat AD en BC evenwijdig zijn
Dus is $ABCD$ een parallellogram

27a



b Via de hoekensom (360°) in een vierhoek bewijzen dat $\angle A = \angle BCE$
$\angle B = \angle D = 90^\circ$ dus moet $\angle A + \angle BCD = 180^\circ$
Ook is $\angle BCE + \angle BCD = 180^\circ$ Dus geldt $\angle A = \angle BCE$

c Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l} |AD| = |CE| \text{ (gegeven)} \\ |AB| = |BC| \text{(gegeven)} \\ \angle A = \angle BCE \text{ (bewezen)} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABD \cong \Delta CBE \; (ZHZ)$$

Dus $|BD| = |BE|$

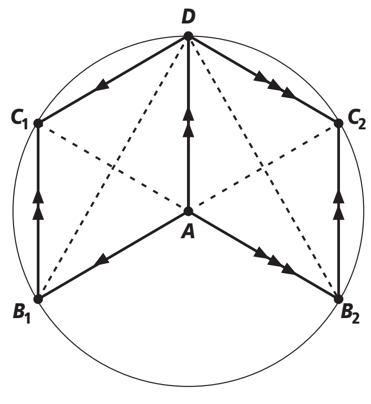
5.6 Vermoeden en bewijzen

bladzijde 142

28abc -
28d Het vermoeden is: $\dfrac{|BD|}{|DC|} = \dfrac{|AB|}{|AC|}$

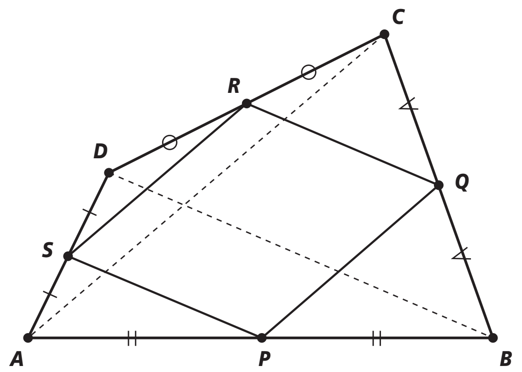
bladzijde 143

29a Trapezium want $AD // BC$
b -
c Er zijn twee mogelijkheden.



d Dan geldt $|AB| = |DC|$ en $|AD| = |BC|$ omdat $ABCD$ een parallellogram is
Omdat B en D op de cirkel liggen geldt ook $|AB| = |AD|$
Dus zijn alle zijden even lang en is $ABCD$ een ruit

30a,b



Parallellogram

c -

d Bewijs:
Teken de diagonalen AC en BD
Dan geldt $PQ//AC$ en $SR//AC$ dus $PQ//SR$, want P en Q zijn middens.
Ook geldt $PS//BD$ en $QR//BD$ dus $PS//QR$
In vierhoek $PQRS$ zijn de overstaande zijden evenwijdig en dus is $PQRS$ een parallellogram

e Dan moeten de diagonalen van vierhoek $ABCD$ loodrecht op elkaar staan want de zijden van een rechthoek staan loodrecht op elkaar

f Dan moeten de diagonalen van vierhoek $ABCD$ even lang zijn want SP en RQ zijn elke de helft van BD en PQ en SR zijn elk de helft van AC

31a $\angle HPQ = \angle HQP$

b ΔAFQen ΔAEP hebben gelijke hoeken want beide hebben een hoek van 90° en een hoek gelijk aan $\frac{1}{2}\angle A$ dus hebben ze ook de derde hoek gelijk
Bewijs:
$\angle HPQ = \angle APE = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A = \angle FQA = \angle HQP$
Dus is driehoek PHQ gelijkbenig met $|PH| = |HQ|$

32 Bewijs:

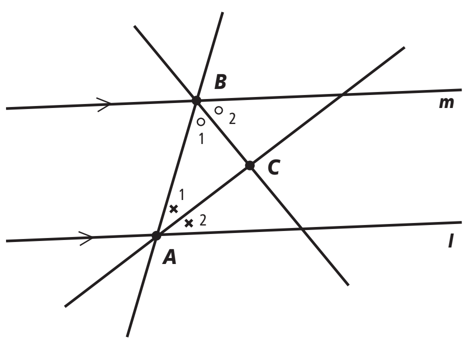
$$\left.\begin{array}{r} \angle ABC = \angle CDE \ \ (Z-\text{hoeken}) \\ \angle C = \angle E \ \ (=90^\circ) \\ |BC| = |DE| \ \ (\text{gegeven}) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta CDE \ (HZH)$$

Dus is $|AC| = |CE|$ en daarmee is ΔACE gelijkbenig met $\angle A_2 = \angle E_1$

5.7 Met de computer

bladzijde 144

33a,b



c De bissectrices snijden elkaar loodrecht

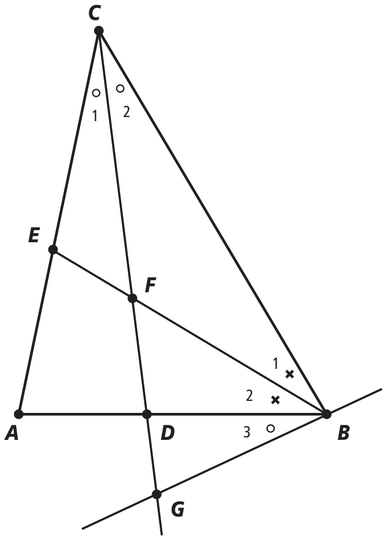
d Bewijs:

$\angle A_{1,2} + \angle B_{1,2} = 180^\circ$ want l // m

Gegeven is dat $\angle A_1 = \angle A_2$ en $\angle B_1 = \angle B_2$

Dus $\angle A_1 + \angle B_1 = 90^\circ$ en daarmee is $\angle C = 90^\circ$

34a-c



d -

e Het vermoeden is :$|FG| = |BG|$

f Gegeven: $\angle C_1 = \angle C_2 = \angle B_3$ en $\angle B_1 = \angle B_2$

Te bewijzen: $|FG| = |BG|$

Bewijs:

Volgens de stelling van de buitenhoek geldt $\angle BFG = \angle C_2 + \angle B_2$

Ook is $\angle GBF = \angle B_1 + \angle B_3 = \angle B_1 + \angle C_2 = \angle B_2 + \angle C_2$

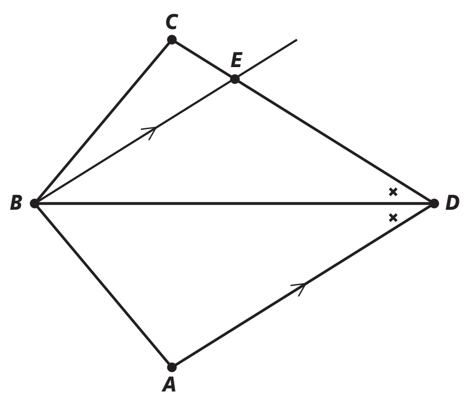
Dus $\angle BFG = \angle GBF$ en dus is ΔBFG gelijkbenig met $|FG| = |BG|$

35a,b -

c $|BE| = |DE|$

d Te bewijzen: $|BE| = |DE|$

Bewijs:



$\angle BDE = \angle BDA$ (BD is symmetrieas) en $\angle BDA = \angle DBE$ (Z – hoeken)

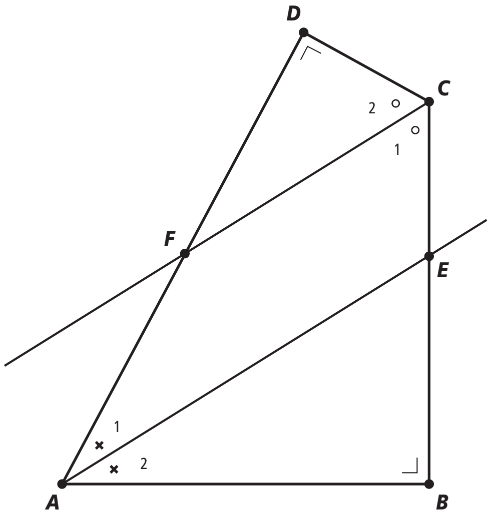
Dus $\angle BDE = \angle DBE$ en dus is ΔBDE gelijkbenig met $|BE| = |DE|$

bladzijde 145

36a -

b De bissectrices zijn evenwijdig

d



Te bewijzen: $FC\,//\,AE$

Bewijs: Met de hoekensom in een vierhoek vind je $\angle DAB + \angle DCB = 180^\circ$

Dus $\angle A_2 + \angle C_1 = 90^\circ$

Ook geldt $\angle A_2 + \angle AEB = 90^\circ$

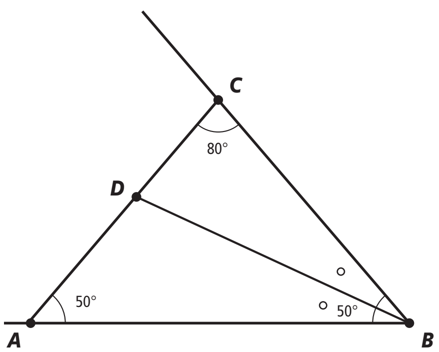
Uit het voorafgaande volgt $\angle AEB = \angle C_1$ en dus (Z-hoeken) is $AE\,//\,FC$

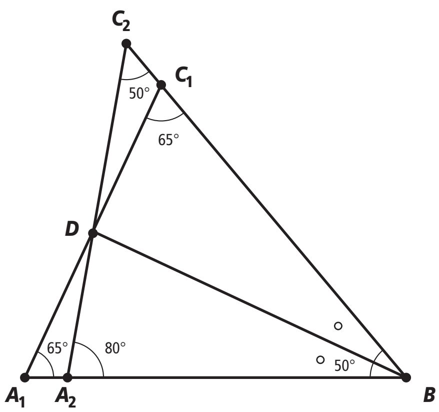
37a -

b Er zijn nog verschillende mogelijkheden:

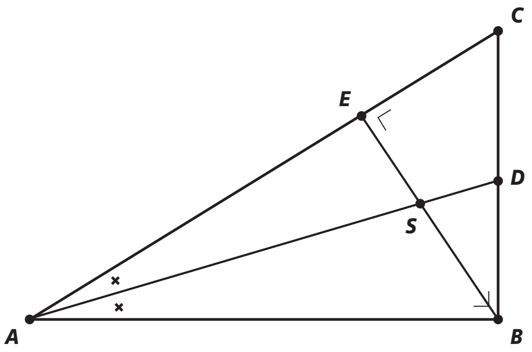
- $\angle B$ is de tophoek en $\angle A = \angle C = 65^\circ$ In dit geval is $\angle ADB = 90^\circ$
- $\angle A$ is de tophoek en $\angle B = \angle C = 50^\circ$ In dit geval is $\angle ADB = 75^\circ$
- $\angle C$ is de tophoek en $\angle A = \angle B = 50^\circ$ In dit geval is $\angle ADB = 105^\circ$

De constructie voltooi je door voor elk van deze gevallen een lijn door D met de juiste hoek te tekenen en deze lijn te snijden met de benen van $\angle B$.





38a

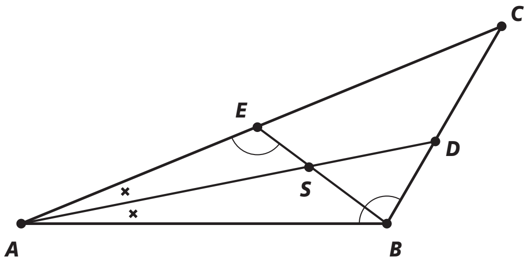


Vermoeden: De scherpe hoeken bij S en D zijn even groot, dus ΔSDB is gelijkbenig, dus $|BS| = |BD|$

b Bewijs:

$\angle ASE = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$ en $\angle ADB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$ dus $\angle ASE = \angle BSD = \angle ADB \Rightarrow$
$|BS| = |BD|$

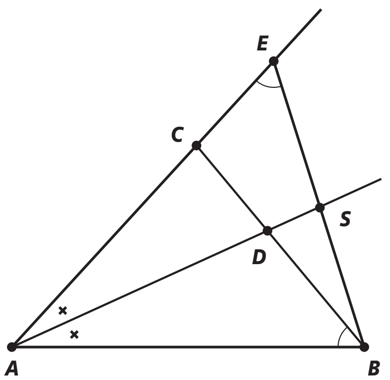
c



Bewijs:

$\angle ASE = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle A - \angle AEB$
$\angle ADB = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle A - \angle ABD$
Omdat $\angle AEB = \angle ABD$ volgt uit bovenstaande dat $\angle ASE = \angle BSD = \angle ADB \Rightarrow$
$|BS| = |BD|$

d



Bewijs:

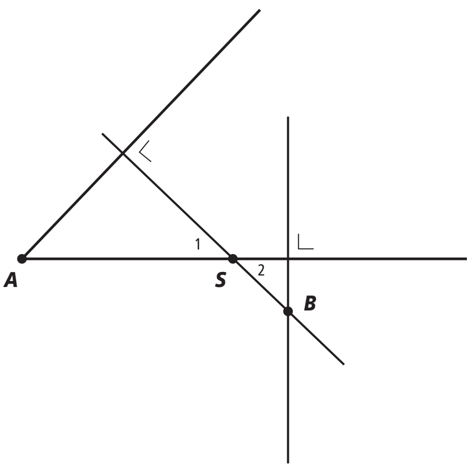
$\angle ASE = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle A - \angle AEB$
$\angle ADB = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle A - \angle ABD$
Omdat $\angle AEB = \angle ABD$ volgt uit bovenstaande dat $\angle ASE = \angle ADB \Rightarrow$
$\angle BSD = \angle BDS \Rightarrow |BS| = |BD|$

5.8 Gemengde opdrachten

bladzijde 146

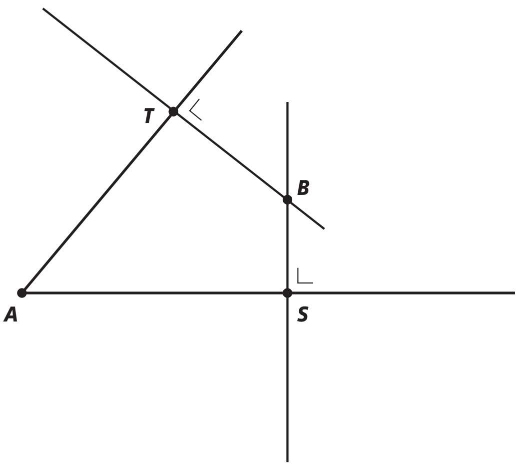
39 Bewijs:
Vierhoek $ABRC$ is een parallellogram want de diagonalen AR en BC delen elkaar middendoor. Dus $CR//AB$
Ook vierhoek $ABCS$ is een parallellogram (diagonalen BS en AC delen elkaar middendoor) dus $CS//AB$
Dus is $\angle SCR$ een gestrekte hoek en liggen S, C en R op één lijn

40a



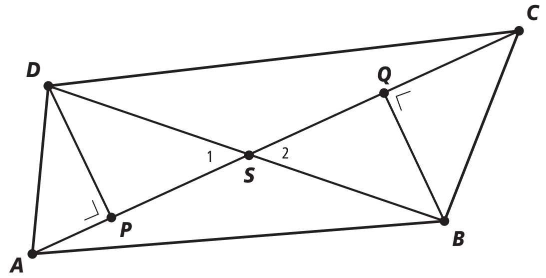
Gegeven: $\angle A < 90°$, $\angle B < 90°$, $BQ \perp AQ$ en $BP \perp AP$
Te bewijzen: $\angle A = \angle B$
Bewijs: $\angle A = 90° - \angle S_1 = 90° - \angle S_2 = \angle B$

b Ze zijn gelijk (opdracht a) of samen $180°$ zoals in de volgende figuur



Gebruik de hoekensom van een vierhoek
$\angle A + \angle B = 360° - \angle S - \angle T = 360° - 90° - 90° = 180°$

41a



De driehoeken ADC en ABC hebben zijde AC gemeenschappelijk. Omdat de oppervlakten van beide driehoeken gelijk is moet gelden $|DP| = |BQ|$ Dan geldt

$$\left.\begin{array}{l} \angle S_1 = \angle S_2 \text{ (overstaande hoeken)} \\ |DP| = |BQ| \text{(bewezen)} \\ \angle P = \angle Q \quad (= 90^\circ) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta PSD \cong \Delta QSB \ (ZHH)$$

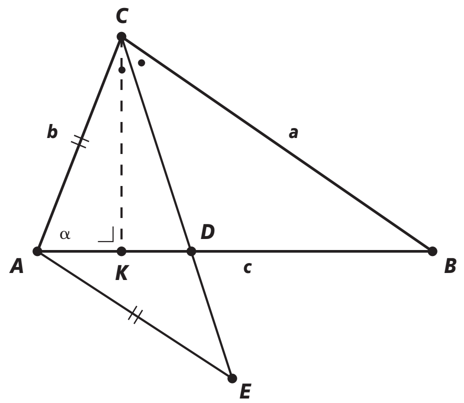
Dus geldt $|DS| = |BS|$ en is S het midden van BD

b Zowel voor ΔABS als voor ΔBSC is $|BQ|$ de hoogte op AS respectievelijk CS. Als de beide driehoeken dezelfde oppervlakte hebben dan moet ook de basis dezelfde lengte hebben. Dus $|AS| = |SC|$

In opdracht a is bewezen dat S het midden is van BD, nu is bewezen dat S het midden is van AC.

Dus delen de diagonalen van vierhoek $ABCD$ elkaar middendoor en daarmee is $ABCD$ een parallellogram

42a,b



c Omdat $|AC| = |AE|$ is $\angle E = \angle ACD = \angle DCB$

Ook is $\angle ADE = \angle BDC$

Dus $\Delta ADE \sim \Delta BDC$

Dan geldt $\dfrac{|AD|}{|BD|} = \dfrac{|AE|}{|BC|} = \dfrac{|DE|}{|DC|}$

Gegeven is dat $|AE| = |AC|$ dus $\dfrac{|AD|}{|BD|} = \dfrac{|AC|}{|BC|} \Rightarrow |AD| : |BD| = |AC| : |BC|$

d $\sin\alpha = \dfrac{|\mathrm{CK}|}{b} \Rightarrow |CK| = b\sin\alpha$

Oppervlakte $\Delta ABC = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CK| = \frac{1}{2} \cdot c \cdot b \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} bc\sin\alpha$

e De hoogte van beide driehoeken is gelijk, namelijk de afstand van C tot zijde AB, dus $|CK|$

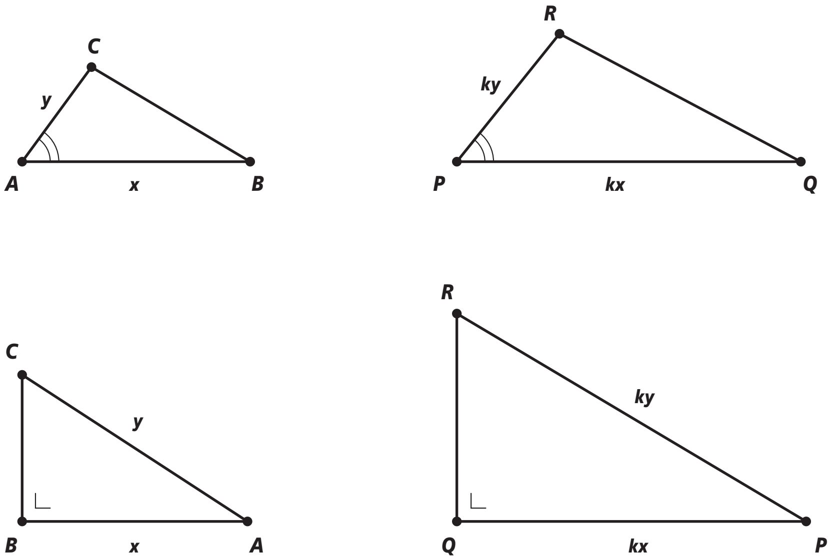
Dus verhouden de oppervlakten zich als de lengten van AD en DB

f Oppervlakte $\triangle ADC = \frac{1}{2} \cdot b \cdot |CD| \cdot \sin \frac{1}{2}\angle C$ en
Oppervlakte $\triangle DBC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot |CD| \cdot \sin \frac{1}{2}\angle C$
Gebruik makend van het resultaat van opdracht e vind je:

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{\text{Opp.}\triangle ADC}{\text{Opp.}\triangle DBC} = \frac{\frac{1}{2} b \cdot |CD| \cdot \sin \frac{1}{2}\angle C}{\frac{1}{2} a \cdot |CD| \cdot \sin \frac{1}{2}\angle C} = \frac{b}{a} \Rightarrow |AD| : |DB| = |AC| : |BC|$$

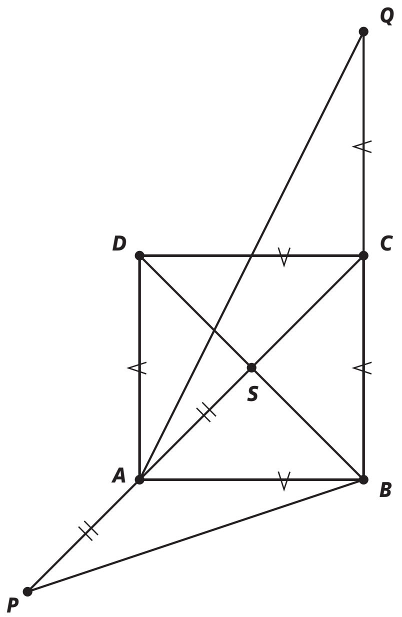
bladzijde 147

43a



In beide gevallen toon je gelijkvormigheid aan door driehoek ABC vanuit A met factor k te vermenigvuldigen waardoor driehoek $A'B'C'$ ontstaat
Dan zijn driehoek $A'B'C'$ en driehoek PQR twee congruente driehoeken (geval ZHZ of ZZR) en dus zijn de driehoeken ABC en PQR gelijkvormig

b



$\angle PSB = \angle QBA = 90^\circ$ en $|BQ| : |AB| = |SP| : |BS| = 2 : 1$
dus volgens het tweede kenmerk zijn de driehoeken ABQ en BSP gelijkvormig

44a Bewijs:

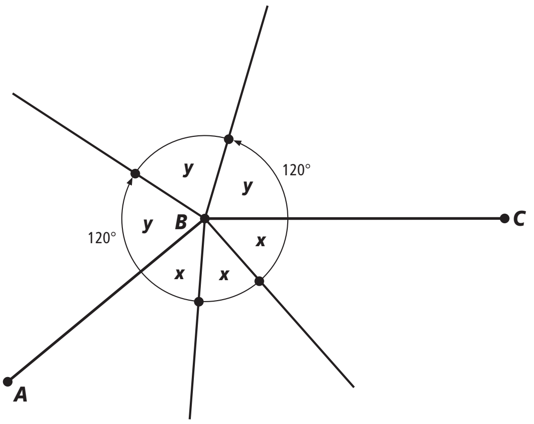
$$\left.\begin{array}{r} |BM| = |EM| \text{ (straal)} \\ \angle TBM = \angle TEM\ (=90^\circ) \\ |TM| = |TM \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta TBM \cong \Delta TEM\ (ZZR) \Rightarrow \angle BTM = \angle ETM$$

$$\left.\begin{array}{r} |TB| = |TB| \\ |AB| = |BM| \text{ (gegeven)} \\ \angle ABT = \angle MBT \quad (=90^\circ) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta TAB \cong \Delta TMB\ (ZHZ) \Rightarrow \angle ATB = \angle BTM$$

Uit bovenstaande volgt $\angle ATB = \frac{1}{3} \cdot \angle ATE$

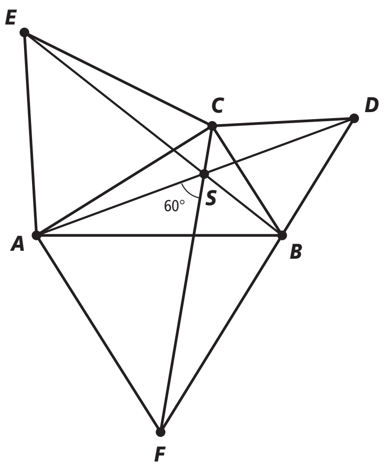
b Leg het apparaat zoals in de figuur in een hoek neer en teken een eerste punt B
Noem dit punt B_1
Keer het apparaat om en leg het op dezelfde manier neer en teken weer een punt B
Noem dit punt B_2
Teken TB_1 en TB_2, de trisectrices van $\angle T$

c



Verdeel eerst $\angle ABC$, de stompe hoek in drie gelijke delen zoals bij opdracht b
De gezochte driedeling van de overstrekte hoek ABC geeft $x + y = 120^\circ$
Construeer zoals aangegeven linksom en rechtsom twee hoeken van 120°
om de trisectrices van de overstrekte hoek te vinden

45a



b Het vermoeden is : $|AD| = |BE| = |CA|$

c Mogelijk ΔADC en ΔEBC

d $\angle ACD = \angle ECB = \angle CAB + 60^\circ$

$$\left.\begin{array}{l} |AC| = |EC| \text{(in gelijkzijdige driehoek)} \\ |CD| = |CB| \text{(in gelijkzijdige driehoek)} \\ \angle ACD = \angle ECB \text{ (bewezen)} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ADC \cong \Delta EBC \ (ZHZ)$$

Uit deze congruentie volgt dat $|AD| = |EB|$

e Via de congruentie van ΔABE en ΔAFC

$$\left.\begin{array}{l} |EA| = |AC| \text{(in gelijkzijdige driehoek)} \\ |AB| = |AF| \text{(in gelijkzijdige driehoek)} \\ \angle EAB = \angle CAF \quad (= \angle CAB + 60^\circ) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABE \cong \Delta AFC \ (ZHZ)$$

Uit deze congruentie volgt dat $|BE| = |CF|$

f $|AD| = |BE|$ en $|BE| = |CF|$ dus $|AD| = |CF|$

g Vermoeden: de hoeken zijn 60°

h Bij een rotatie van 60° om C gaat E over in A en B in D. Dus gaat ΔEBC over in ΔADC.
Bij deze rotatie gaat lijnstuk EB over in lijnstuk AD dus maken deze twee lijnstukken een hoek van 60° met elkaar.
Op dezelfde wijze kun je bewijzen dat de andere hoeken 60° zijn.

Test jezelf

bladzijde 150

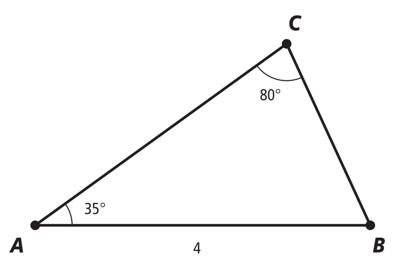
T-1a Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l} \angle AHE = \angle BHD \text{ (overstaande hoeken)} \\ \angle E = \angle D \ (= 90^\circ) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AHE \sim \Delta BHD \ (hh)$$

b Omdat de driehoeken ADC en BEC gelijkvormig zijn ($\angle C$ gemeenschappelijk en beide hebben een hoek van 90°) geldt: $\frac{|AD|}{|BE|} = \frac{|AC|}{|BC|}$ en dus geldt ook $\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|BE|}{|BC|}$

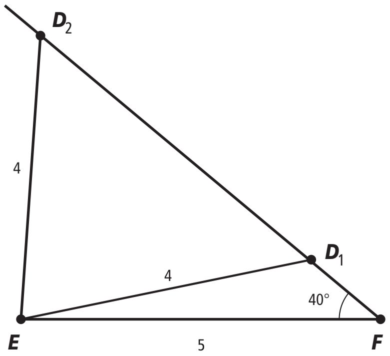
T-2 Gegeven: ΔABC met middelloodlijn m van AB en bissectrice CS van $\angle C$
Te bewijzen: $\angle DSC = \angle B + \frac{1}{2}\angle C - 90^\circ$
Bewijs:
$\angle ADS = \frac{1}{2}\angle C + \angle DSC$ (stelling buitenhoek) dus
$\angle DSC = \angle ADS - \frac{1}{2}\angle C$
$\angle DSC = 90^\circ - \angle A - \frac{1}{2}\angle C$
$\angle DSC = 90^\circ - (180^\circ - \angle B - \angle C) - \frac{1}{2}\angle C$
$\angle DSC = \angle B + \frac{1}{2}\angle C - 90^\circ$

T-3a



b Ja, congruentiegeval ZHH

c



De driehoek ligt niet eenduidig vast, want ΔD_1EF en ΔD_2EF voldoen beide aan alle gegevens.
ZZH is geen congruentie geval.

T-4a -

b Nee, congruentie is geen optie want je weet niets over zijden.
Overstaande hoeken zijn gelijk.

c $\angle ECF = \angle ACH$ en $\angle DGF = \angle BGH$

d Te bewijzen: $\angle ECF = \angle DGF$
Bewijs:
$\angle ECF = \angle ACH = 180^\circ - \angle A - \angle AHC = 180^\circ - \angle B - \angle BHG = \angle BGH = \angle DGF$

bladzijde 151

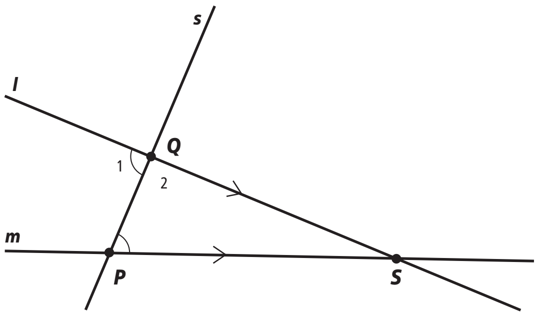
T-5 Noem de definities van links naar rechts X, Y en Z
$(X \Rightarrow Y)$ Stel $ABCD$ heeft vier rechte hoeken
Omdat $\angle A = \angle B = 90^\circ$ geldt $AD//BC$
Omdat $\angle A = \angle D = 90^\circ$ geldt $AB//DC$
Dus is $ABCD$ een parallellogram met een rechte hoek
$(Y \Rightarrow Z)$ Stel $ABCD$ is een parallellogram met een rechte hoek
Veronderstel dat $\angle A = 90^\circ$ Omdat $AD//BC$ is ook $\angle B = 90^\circ$

$$\left.\begin{array}{r} |AB| = |BA| \text{ (gemeenschappelijk)} \\ |AD| = |BC| \text{ (}ABCD\text{ is parallellogram)} \\ \angle A = \angle B \;(= 90^\circ) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BAD \cong \Delta ABC \; (ZHZ)$$

En dus geldt $|BD| = |AC|$ en daarmee zijn de diagonalen even lang.
$(Z \Rightarrow X)$ Stel $ABCD$ is een parallellogram met $|BD| = |AC|$
Dan $\Delta ABD \cong \Delta BAC$ (ZZZ) en dus $\angle A = \angle B$
Omdat $AD//BC$ geldt $\angle A + \angle B = 180^\circ$
Dus $\angle A = \angle B = 90^\circ$
Analoog $\angle D = \angle C = 90^\circ$
Bewezen is nu dat $X \Rightarrow Y \Rightarrow Z \Rightarrow X$ en daarmee de equivalentie van de drie definities

T-6a Twee lijnen zijn evenwijdig als er geen gemeenschappelijk punt is

b



Gegeven: Twee lijnen l en m worden gesneden door een derde lijn s waarbij er gelijke Z-hoeken zijn, dus $\angle Q_1 = \angle QPS$
Te bewijzen: De lijnen l en m zijn evenwijdig
Bewijs: Veronderstel dat l en m snijpunt S hebben.
Volgens de stelling van de buitenhoek geldt dan: $\angle Q_1 = \angle QPS + \angle S$ dus geldt $\angle Q_1 > \angle QPS$
Dit is in tegenspraak met het gegeven $\angle Q_1 = \angle QPS$
Conclusie: l en m hebben geen snijpunt en dus zijn l en m evenwijdige lijnen

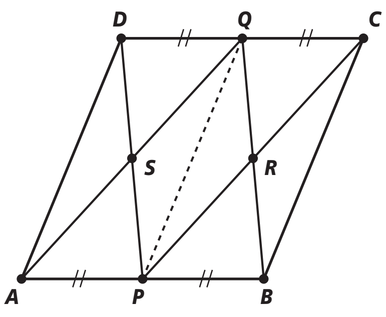
T-7a -

b Vierhoek $KLMN$ lijkt een parallellogram

c Je blijft steeds een parallellogram zien

d Gegeven: Vierhoek $KLMN$ volgens de opgave met $KL//MP$
Te bewijzen: $KLMN$ is een parallellogram
Bewijs:
Neem $\angle MPQ = \alpha$
Omdat $|NP| = |NK|$ (stralen) is $\triangle NPK$ gelijkbenig en dus $\angle NPK = \angle NKP = \alpha$
Omdat $|MP| = |MQ|$ (stralen) is $\triangle MPQ$ gelijkbenig en dus $\angle MPQ = \angle MQP = \alpha$
Uit het voorafgaande volgt: $\angle NKP = \angle MQP$ en dus (F-hoeken) is $MQ//NK$
Tenslotte is gegeven dat $KL//MN$
Dus zijn in vierhoek $KLMN$ de overstaande zijden evenwijdig en daarmee is $KLMN$ een parallellogram

T-8



Gegeven: Parallellogram $ABCD$ met middens P en Q op AB respectievelijk CD

a Te bewijzen: $APCQ$ is een parallellogram
Bewijs:
$APCQ$ is een parallellogram als de overstaande zijden even lang zijn

$$\left.\begin{array}{l} |AD| = |BC| \text{ (overstaande zijden in parm.)} \\ |DQ| = |BP| \text{ (helft overstaande zijden in parm.)} \\ \angle ADQ = \angle PBC \text{ (overstaande hoeken in parm.)} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ADQ \cong \Delta CPB\ (ZHZ)$$

Dus $|AQ| = |PC|$
Ook geldt $|AP| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}|DC| = |QC|$
Dus zijn in vierhoek $APCQ$ de overstaande zijden even lang en daarmee is $APCQ$ een parallellogram

b Te bewijzen: $PBCQ$ is een parallellogram
Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l} |PB| = |CQ| \\ |PC| = |CP| \\ \angle BPC = \angle QCP \text{ (}Z\text{-hoeken)} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta PBC \cong \Delta CQP\ (ZHZ) \Rightarrow |BC| = |PQ|$$

Ook geldt $|PB| = |QC|$ en dus zijn in $PBCQ$ de overstaande zijden gelijk en daarmee is $PBCQ$ een parallellogram

c Te bewijzen: $PBRS$ is een parallellogram
Bewijs:
Analoog aan opdracht a is $PBQD$ een parallellogram dus zijn BR en PS evenwijdig en even lang.
Dan is $\Delta BPR \cong \Delta SRP\ (ZHZ)$ en dus $\angle BPR = \angle SRP$ en (Z-hoeken) daarmee $BP//RS$
Conclusie: in vierhoek $PBRS$ zijn de overstaande zijden evenwijdig en dus is $PBRS$ een parallellogram

d Te bewijzen: $PRQS$ is een parallellogram
Bewijs:
Uit opdracht a volgt dat $PR//SQ$
Analoog aan opdracht a kan aangetoond worden dat $PBQD$ een parallellogram is en dus dat $PS//QR$
Dus is $PRQS$ een parallellogram

e Gegeven: $PRQS$ is een ruit
Te bewijzen: $ABCD$ is een rechthoek
Bewijs:
Als $PQRS$ een ruit is dan staan PQ en SR loodrecht op elkaar
Omdat $PQ//AD//BC$ en $SR//AB//DC$ staan ook AB en BC loodrecht op elkaar
Daarmee is $ABCD$ een rechthoek

T-9a Dan is $ABCD$ een rechthoek.
b Dan is $ABCD$ een ruit.