Hoofdstuk 3 - Exponentiële functies

Voorkennis: Groeifactoren

bladzijde 72

V-1a $0,60 \times 80 = 48,-$ euro
b $0,79 \times 12,50 = 9,88$
c $0,51 \times 98,- = 49,98$

V-2a De factor waarmee je de oude prijs vermenigvuldigt om de nieuwe prijs te krijgen is 0,75, want 100% – 25% = 75%
b De factor is $1,19$, want $100\% + 19\% = 119\%$.
Dus de prijs inclusief BTW = $1,19 \times €39,87 = €47,45$

V-3a Bij een toename van 3% per dag hoort een groeifactor van 1,03, want 100% + 3% = 103%
b Bij een toename van 0,7% per jaar hoort een groeifactor van 1007,
want 100% + 0,7% = 100,7%
c Bij een afname van 17% per vijf jaar hoort een groeifactor van 0,83,
want 100% – 17% = 83%
d Bij een afname van 30% per jaar hoort een groeifactor van 0,70,
want 100% – 30% = 70%
e De groeifactor per tien minuten is 3.
f Bij een toename van 200% per eeuw hoort een groeifactor van 3,
want 100% + 200% = 300%

V-4 De verkoper vermenigvuldigt het bedrag respectievelijk met 0,75 en 1,19.
Paul vermenigvuldigt het bedrag respectievelijk met 1,19 en 0,75.
Beide manieren geven hetzelfde eindbedrag.

bladzijde 73

V-5a Gedurende tien jaar is er een vaste rente van 6% per jaar, dus g = 1,06
$B = 5000 \times 1,06^{10} \approx 8954,24$
Weer tien jaar later, dus na twintig jaar is $B = 5000 \times 1,06^{20} \approx 16.035,68$
b Het rentepercentage van 6% per jaar blijft constant, dus vermenigvuldig je elk jaar weer met 1,06. Na t jaar $B = 5000 \times 1,06^t$

V-6a Bij een toename van 13,2% per dag, hoort een groeifactor van 1,132,
want 100% + 13,2% = 113,2%
Het functievoorschrift wordt dan $N(t) = 216 \cdot 1,132^t$, met t per dag en $N(t)$ het aantal bacteriën in miljoenen.
b Bij een afname van 14% per vijf jaar, hoort een groeifactor van 0,86,
want 100% – 14% = 86%.
Het functievoorschrift wordt dan $N(t) = 5000 \cdot 0,86^t$, met t per vijf jaar en $N(t)$ het aantal vis in ton.
c Bij een afname van 15% per jaar, hoort een groeifactor van 0,85,
want 100% – 15% = 85%.
Het functievoorschrift wordt dan $N(t) = 0,87 \cdot 0,85^t$, met t per jaar en $N(t)$ de waarde van buitenlandse munt.

V-7a De groeifactor is 1,4 per tien jaar, want 100% + 40% = 140%
Het functievoorschrift wordt dan $W(t) = 6 \cdot 1,4^t$, met t per tien jaar, $t = 0$ in 1900 en $W(t)$ het waterverbruik in miljoenen m³.

b In 1920 is $t = 2$, dus $W(2) = 6 \cdot 1,4^2 = 11,76$.
Het waterverbruik in 1920 was 11,76 miljoen m³.

c In 1900 was het waterverbruik zes miljoen m³.
De toename is $\frac{11,76-6}{6} \cdot 100\% = 96\%$

d In 2030 is $t = 13$
$W(t) = 6 \cdot 1,4^{13} \approx 476$ miljoen m³
Het waterverbruik is ruim 476 miljoen m³.

3.1 Grafieken en exponentiële functies

bladzijde 74

1a Op tijdstip $t = 0$ is de band net opgepompt. $H = 2 \cdot 0,89^0 = 2$.
Er zit twee gram lucht in de band.

b Bij een groeifactor van 0,89 hoort een afname van 11% per dag,
want (1 – 0,89) * 100% = 11%

c Na drie dagen is $t = 3$. $H = 2 \cdot 0,89^3 \approx 1,41$
De band bevat na drie dagen nog 1,41 gram lucht.

d Plot : $y_1 = 2 \cdot 0,89^x$ en $y_2 = 1$
Calc,intersect, $x \approx 5,948$
Na zes dagen zit er minder dan één gram lucht in de band.

e Nul gram.
Nee, in werkelijkheid staat de band nooit volledig zonder lucht.

2a De grafiek is stijgend van f en g, want $g > 1$.
De grafiek is dalend van h, k en m, want $0 < g < 1$.

b De lijn $y = 0$ is asymptoot van al de vijf grafieken.

c Plot functie f en volgens de tabel bestaat f voor alle x – waarden.

d De grafiek van functie f ligt boven de x – as, dus de functiewaarden zijn allemaal groter dan 0.

e Plot de andere functies en volgens de tabel bestaan de functies voor alle x – waarden.

bladzijde 75

3a $g > 1$, dus stijgt de grafiek van de functies f en k.

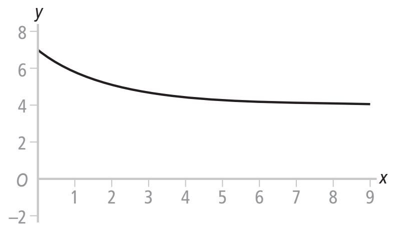
b De grafieken van de functie g en k gaan door (0, 1), want $g(0) = 1$ en $k(0) = 1$.

c Het domein van de functie h is $\mathbb{R}$.
Het bereik van de functie h is $\langle 0, \rightarrow \rangle$

d Neem x heel klein, dan nadert de grafiek de x-as, dus de vergelijking van de asymptoot van k is $y = 0$

4 $f(x) = 2\frac{1}{2} \cdot 2^x$; $g(x) = 20 \cdot (\frac{1}{4})^x$;
$h(x) = 25 \cdot 5^x$ en $k(x) = 45 \cdot (\frac{1}{3})^x$

5a



b De grafiek snijdt de verticale as, dus $x = 0$
$f(0) = 4 + 3 \cdot 0{,}6^0 = 4 + 3 = 7$ Het snijpunt met de verticale as is dus (0, 7)

c De vergelijking van de horizontale asymptoot is $y = 4$ want wanneer x steeds groter wordt dan nadert $0{,}6^x$ naar 0 en de functie dus naar 4.

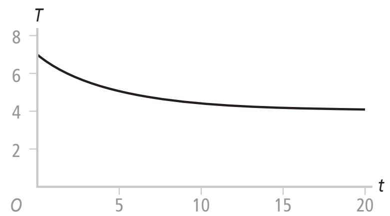
6a

t in minuten	0	5	10	15	20
T in °C	80	52	37	29	
verschil met omgeving	60	32	17	9	

Wanneer je de verschillen bekijkt blijkt $\frac{32}{60} = \frac{17}{32} = \frac{9}{17} \approx 0{,}53$ de groeifactor is dus 0,53 per vijf minuten.

b Voor $t = 5$ krijg je $T = 20 + 60 \cdot 0{,}881^5 \approx 52$
Voor $t = 10$, $T = 20 + 60 \cdot 0{,}881^{10} \approx 37$
Voor $t = 15$, $T = 20 + 60 \cdot 0{,}881^{15} \approx 29$

c

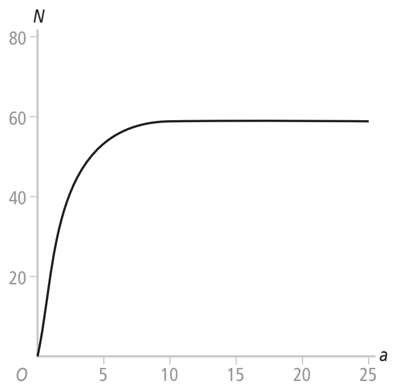


De vergelijking van de horizontale asymptoot is $T = 20$.

d De koffietemperatuur benadert op den duur de omgevingstemperatuur.

7a Voor a = 0 wordt $N = 60 \cdot (1 - 0{,}64^0) = 0$
Op een gebied van nul km^2 zal het aantal diersoorten nul zijn.

b



De vergelijking van de horizontale asymptoot is $N = 60$.

c Het aantal diersoorten in een gebied kan maximaal toenemen tot 60.

d De helft van het maximale aantal diersoorten is 30
Plot de grafiek van $N = 60 \cdot (1 - 0{,}64^a)$ en $N = 30$. Het snijpunt is (1,55; 30).
Als $a \approx 1{,}55$ km² is, kun je de helft van het aantal diersoorten verwachten.

e Nee, want er komen veel meer diersoorten dan het maximale aantal van 60 in grotere gebieden voor.

3.2 Negatieve en gebroken exponenten

bladzijde 76

8a Voor $t = 0$ zijn er $N(0) = 1000$ bacteriën.

b De waarde van $2^0 = 1$

c Elk uur verdubbelt het aantal, want de groeifactor is 2. Om 12.00 uur zijn er 1000, dus om 11.00 uur waren er 500.

d De waarde van $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

e

t	–4	–3	–2	–1	0	1	2
N	63	125	250	500	1000	2000	4000

f $2^{-2} = \frac{1}{4}$ en $2^{-3} = \frac{1}{8}$

9a $7^{-1} = \frac{1}{7}$

b $5^{-2} = \frac{1}{5^2}$

c $0{,}4^{-2} = \frac{1}{(0{,}4)^2}$

d $(\frac{1}{3})^{-2} = \frac{1}{(\frac{1}{3})^2}$

10a Een groeifactor 10 perdag betekent dat het elke dag 10 keer zoveel wordt. na zeven dagen is het dan dus $10 \cdot 10 \cdot 10....10 = 10^7$ keer zoveel. Een groeifactor 70 per week zou na één week maar 70 keer zoveel opleveren.
Groeifactor per week (7 dagen) is dus 10^7.

b Groeifactor per halve dag is $10^{\frac{1}{2}} \neq 5$.

c $g = 10^{\frac{1}{2}} \approx 3{,}2$, dus g ligt tussen 3 en 4.

bladzijde 77

11a

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
G	64	114	202	360	640	1137	2022	3595	6392

b de groeifactor per twee jaar is $\frac{202}{64} = \frac{640}{202} = \frac{2022}{640} = \frac{6392}{2022} \approx 3{,}16$, dus $k = 3{,}16$
de groeifactor per jaar is $\frac{114}{64} = \frac{202}{114} = \frac{360}{202} = \frac{640}{360} = \frac{1137}{640} = \frac{2022}{1137} = \frac{3595}{2022} = \frac{6392}{3595} \approx 1{,}78$, dus $p = 1{,}78$.

c De groeifactor per vier jaar is 10
De groeifactor per twee jaar is $10^{\frac{1}{2}}$, dus $k = 10^{\frac{1}{2}}$.

d k is de groeifactor per twee jaar, $k = 10^{\frac{1}{2}}$
k^2 is de groeifactor per vier jaar, $k^2 = (10^{\frac{1}{2}})^2 = 10$.
$k = 10^{\frac{1}{2}} \approx 3{,}2$

e p is de groeifactor per jaar.
$p^4 = 10$ betekent dat de gemiddelde geheugencapaciteit van pc's elke vier jaar toeneemt met een factor 10.

12a De groeifactor per uur is 5
De groeifactor per half uur is $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$.
b De groeifactor per kwartier ($\frac{1}{4}$ uur) is $5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5}$.
c De groeifactor per dag (24 uur) is 5^{24} .

13a $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$
b $(0,5)^{-1} = \dfrac{1}{0,5} = \dfrac{2}{1} = 2$ of $(0,5)^{-1} = (\frac{1}{2})^{-1} = (2^{-1})^{-1} = 2$
c $12^{-2} = \frac{1}{12^2} = \frac{1}{144}$
d $\sqrt[3]{125} = 125^{\frac{1}{3}} = \left(5^3\right)^{\frac{1}{3}} = 5$
e $\sqrt[5]{32} = 32^{\frac{1}{5}} = \left(2^5\right)^{\frac{1}{5}} = 2$
f $25^{-1} \cdot 100 = \dfrac{1}{25} \cdot 100 = 4$

14a De groeifactor per 10 jaar is $\frac{14,9}{14,1} \approx 1,0567$
De groeifactor per jaar is $\left(\frac{14,9}{14,1}\right)^{\frac{1}{10}} \approx 1,0055$
De groeifactor per drie jaar is $\left(\frac{14,9}{14,1}\right)^{\frac{3}{10}} \approx 1,0167$
b De formule voor het aantal inwoners van Nederland is $N(t) = 14,1 \cdot 1,0055^t$, met t in jaren en $t = 0$ in 1980 $N(t)$ het aantal inwoners in miljoen.
Van 1980 terug naar 1965 is 15 jaar, dus $N(-15) = 14,1 \cdot 1,0055^{-15} \approx 13$
In 1965 waren er ongeveer 13 miljoen inwoners.

Van 1980 tot 2007 is 27 jaar, dus
$N(27) = 14,1 \cdot 1,0055^{27} \approx 16,4$
In 2007 waren er 16,4 miljoen inwoners.

Van 1980 tot 2010 is 30 jaar, dus
$N(30) = 14,1 \cdot 1,0055^{30} \approx 16,6$.
In 2010 zullen er 16,6 miljoen inwoners zijn.

15a De groeifactor per maand is 1,3.
De groeifactor per half jaar (zes maanden) is $1,3^6$.
De groeifactor per jaar (12 maanden) is $1,3^{12}$.
b Een jaar is tweemaal een half jaar. De groeifactor per jaar wordt dan
$1,3^6 \cdot 1,3^6 = (1,3^6)^2 = 1,3^{12}$
c Je kunt vijf maanden opvatten als eerst 2 maanden en vervolgens drie maanden. De groeifactor per vijf maanden is dan $1,3^2 \cdot 1,3^3 = 1,3^5$

3.3 Rekenen met machten

bladzijde 78

16a $(2 \cdot 3)^4 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^4$

b $3^6 : 3^2 = \dfrac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \dfrac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{1} = 3^4$ (teller en noemer twee keer delen door 3)

c $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4^3}{5^3}$

17a $2^4 \cdot 2^7 = 2^{11}$, regel 2
b $2^3 : 2^{-2} = 2^{3--2} = 2^{3+2} = 2^5$, regel 3
c $(3^4)^5 = 3^{4\cdot 5} = 3^{20}$, regel 4
d $(5 \cdot 4)^2 = 5^2 \cdot 4^2 = 25 \cdot 16 = 400$, regel 5
e $\frac{5^3}{5^3} = 5^{3-3} = 5^0 = 1$, regel 3, regel 1
f $2^x \cdot 5^x = (2 \cdot 5)^x = 10^x$, regel 5
g $g^2 \cdot g^4 = g^6$, regel 2
h $(3 \cdot x^3)^2 = 3^2 \cdot (x^3)^2 = 9x^6$, regel 5, regel 4
i $\left(\left(y^{-2}\right)^{-3}\right)^4 = \left(y^{-2\cdot -3}\right)^4 = \left(y^6\right)^4 = y^{24}$, regel 4
j $27x^5 : 9x^2 = \frac{27x^5}{9x^2} = \frac{27}{9} \cdot \frac{x^5}{x^2} = 3x^3$, regel 3

bladzijde 79

18a niet juist, $20^{20} : 20^4 = 20^{20-4} = 20^{16}$, regel 3
b niet juist, $2^{\frac{1}{3}} \cdot 9 = 9\sqrt[3]{2}$, regel 8
c niet juist, $3^4 \cdot 3^7 = 3^{4+7} = 3^{11}$, regel 2
d juist, $36^{\frac{1}{2}x} = \left(36^{\frac{1}{2}}\right)^x = \left(\sqrt{36}\right)^x = 6^x$, regel 4
e niet juist, $1{,}8^{-3} \cdot 1{,}8^3 = 1{,}8^{-3+3} = 1{,}8^0 = 1$, regel 2 en regel 1
f juist, $2^{3x-1} = 2^{3x} \cdot 2^{-1} = \left(2^3\right)^x \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 8^x$, regel 2, regel 4 en regel 7

19a Van $t = 4$ tot en met $t = 8$ is het verschil vier.
De groeifactor per vier tijdseenheden is $\frac{3240}{90} = 36$.
De groeifactor per tijdseenheid is $36^{\frac{1}{4}} \approx 2{,}4495$
b Je gaat terug van $t = 4$ naar $t = 0$, het verschil is – 4.
Op tijdstip $t = 0$ is de hoeveelheid
$H = 90 \cdot 2{,}4495^{-4} = 2{,}5$
De formule luidt :
$H = 2{,}5 \cdot 2{,}4495^t$, met t per tijdseenheid.

20a Bij een toename van 70% per 20 jaar hoort groeifactor 1,7 want 100% + 70% = 170% = 1,7
b De groeifactor per jaar is $1{,}7^{\frac{1}{20}} \approx 1{,}0269$
c De toename is $(1{,}0269 - 1) \cdot 100\% = 2{,}69\%$
De jaarlijkse groei is 2,69%

21a De groeifactor per etmaal (24 uur) is 1,6
De groeifactor per acht uur is $1{,}6^{\frac{8}{24}} \approx 1{,}170$
De toename per acht uur is $(1{,}170 - 1) \cdot 100\% = 17{,}0\%$
b De groeifactor per 15 jaar is 0,95
De groeifactor per 25 jaar is $0{,}95^{\frac{25}{15}} \approx 0{,}918$
De afname per 25 jaar is $(1 - 0{,}918) \cdot 100\% \approx 8{,}2\%$
c De groeifactor per maand is 1,0115
De groeifactor per jaar is $(1{,}0115)^{12} \approx 1{,}147$
De bank berekent voor het rood staan een rente van 14,7% per jaar.

22a De groeifactor per 37 uur is 2.
De groeifactor per dag (per 24 uur) is $2^{\frac{24}{37}} \approx 1{,}5677$
Formule bladoppervlakte :
$B = 1 \cdot 1{,}5677^t$, B in m^2.
$1m^2 = 10^{-6}\ km^2$, dus $B = 10^{-6} \cdot 1{,}5677^t$, met t in dagen, B in km^2.

b De groeifactor per 37 uur is 2
De groeifactor per uur is dan $2^{\frac{1}{37}} \approx 1{,}0189$
De groeifactor per dag is $2^{\frac{24}{37}} \approx 1{,}5677$

c $B = 1 \cdot 1{,}5677^t$ met t in dagen, B in m^2 en $B = 10$
plot, $y_1 = 1{,}5677^x$ en $y_2 = 10$
Calc, intersect, $x \approx 5{,}12$
Na ruim vijf dagen vertienvoudigd de bladoppervlakte.

d $B = 10^{-6} \cdot 1{,}5677^x$ en $y_2 = 12$
Calc, intersect, $x \approx 36{,}25$
Na ruim 36 dagen is het meer geheel bedekt.

3.4 Grafieken en exponentiële ongelijkheden

bladzijde 80

23a Plot, $y_1 = 1000 \cdot 0{,}995^x$ en $y_2 = 850$

b Calc, intersect geeft $x \approx 32{,}4$

c Ruim 32 dagen kan het luchtschip blijven vliegen.

24a Plot, $y_1 = 5 \cdot 1{,}4^x$ en $y_2 = 3^x$
Calc, intersect geeft $x \approx 2{,}11$

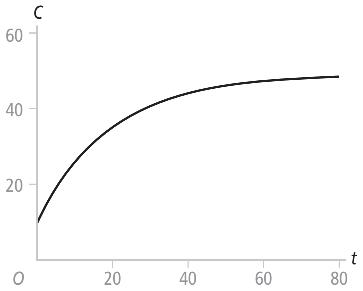
b Plot, $y_1 = 2{,}1^x$ en $y_2 = 3 \cdot 0{,}3^x$
Calc, intersect geeft $x \approx 0{,}56$

c Plot, $y_1 = 0{,}7^x$, $y_2 = 0{,}1^x \cdot 14$
Calc, intersect geeft $x \approx 1{,}36$

d Plot, $y_1 = 4 \cdot 3^x$ en $y_2 = 5^x$
Calc, intersect geeft $x \approx 2{,}71$
Oplossing is $\langle 2{,}71; \rightarrow \rangle$

e Plot, $y_1 = 10^x$, $y_2 = 15 \cdot 5^x$
Calc, intersect geeft $x \approx 3{,}91$
Oplossing is $\langle 3{,}91; \rightarrow \rangle$

f Plot, $y_1 = 3^{-x+1}$ en $y_2 = \frac{1}{4} \cdot 2^x$
Calc, intersect geeft $x \approx 1{,}39$
Oplossing is $\langle 1{,}39; \rightarrow \rangle$

25a 

Neem t heel groot, dan wordt $0{,}95^t \approx 0$
Invullen in C geeft : $C = 50 - 40 \cdot 0 = 50$
De concentratie C van het eindproduct wordt op den duur bijna 50 mmol / dm^3.

b $t = 0$, bij het begin.
Invullen in C geeft : $C = 50 - 40 \cdot 0{,}95^0 = 10$
De hoeveelheid bij het begin van de reactie is 10 mmol / dm^3.

c Plot, $y_1 = 50 - 40 \cdot 0{,}95^x$, $y_2 = 40$ en $y_3 = 48$
Calc, intersect,
$x \approx 27{,}03$ en $y = 40$
$x \approx 58{,}40$ en $y = 48$
Na ruim 27 minuten is $C = 40$
Na ruim 58 minuten is $C = 48$

d De concentratie van 50 mmol / dm^3 wordt eerder bereikt bij hogere temperaturen.
De concentratie C nadert sneller 50, wanneer $40 \cdot 0{,}95^t$ sneller klein wordt.
Dit laatste wordt sneller kleiner als 0,95 kleiner wordt.

bladzijde 81

26a $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$
$\left(3^{-1}\right)^x = 3^2$
$3^{-x} = 3^2$
$-x = 2$
$x = -2$

b $3^x = \frac{1}{27}$
$3^x = \frac{1}{3^3}$
$3^x = 3^{-3}$
$x = -3$

c $(0{,}25)^x = 16$
$\left(\frac{1}{4}\right)^x = 4^2$
$\left(4^{-1}\right)^x = 4^2$
$4^{-x} = 4^2$
$-x = 2$
$x = -2$

d $\left(\frac{1}{7}\right)^x = 1$

$\left(7^{-1}\right)^x = 7^0$

$7^{-x} = 7^0$

$-x = 0$

$x = 0$

e $2^t = \left(0,25\right)^2$

$2^t = \left(\frac{1}{4}\right)^2$

$2^t = (2^{-2})^2$

$2^t = 2^{-4}$

$t = -4$

f $0,1^{2t} = 100$

$\left(\frac{1}{10}\right)^{2t} = 10^2$

$\left(10^{-1}\right)^{2t} = 10^2$

$-2t = 2$

$t = -1$

g $32 \cdot 2^t = 4$

$2^5 \cdot 2^t = 2^2$

$2^{5+t} = 2^2$

$5 + t = 2$

$t = -3$

h $3 \cdot 0,5^t = 24$

$0,5^t = 8$

$\left(\frac{1}{2}\right)^t = 2^3$

$\left(2^{-1}\right)^t = 2^3$

$2^{-t} = 2^3$

$-t = 3$

$t = -3$

i $14 \cdot 4^t = 7 \cdot 2^{3t}$

$2 \cdot 4^t = 2^{3t}$

$2 \cdot 2^{2t} = 2^{3t}$

$2^{1+2t} = 2^{3t}$

$1 + 2t = 3t$

$t = 1$

27a Bij een afname van 65% per dag hoort groeifactor 0,35.
De groeifactor per uur is $0,35^{\frac{1}{24}} \approx 0,9572$
Het functievoorschrift van de hoeveelheid pijnstiller voor de eerste 24 uur luidt :
$P(t) = 3 \cdot 0,9572^t$, met t in uren.

b De hoeveelheid pijnstiller P is 24 uur na de eerste injectie $3 \cdot 0,9572^{24} \approx 1,05$ ml.
Vlak na de tweede injectie is de beginhoeveelheid 2 + 1,05 = 3,05 ml in het lichaam.

c Het functievoorschrift vlak na de tweede injectie luidt : $P(t) = 3,05 \cdot 0,9572^t$, met t in uren.
24 uur na de tweede injectie is de hoeveelheid pijnstiller $3,05 \cdot 0,9572^{24} \approx 1,07$ ml.
Vlak na de derde injectie is de beginhoeveelheid 2 + 1,07 = 3,07 ml.

Het functievoorschrift vlak na de derde injectie luidt : $P(t) = 3,07 \cdot 0,9572^t$, met t in uren.
24 uur na de derde injectie is de hoeveelheid $3,07 \cdot 0,9572^{24} \approx 3,07 \cdot 0,9572^{24} \approx 1,07$ ml.
Dus in eerste vier dagen daalt de hoeveelheid niet onder de 1 ml.

d Het functievoorschrift vlak na de derde injectie luidt: $P(t) = 3,07 \cdot 0,9572^t$, met t in uren.
56 uur is 8 uur na de derde injectie.
De hoeveelheid pijnstiller na 56 uur is $P(8) = 3,07 \cdot 0,9572^8 \approx 2,16$ ml.

28a De getallen aan weerskanten van het gelijkteken kun je niet schrijven als macht van hetzelfde grondtal.

b Plot, $y_1 = 5 \cdot 2^x$ en $y_2 = 0,2^x$
Calc, intersect, $x \approx -0,70$

3.5 Functies anders schrijven

bladzijde 82

29a De grafieken zijn t.o.v. elkaar gespiegeld in de y-as.
Plot, $y_1 = 2^x$ en $y_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

b $g(x) = (\frac{1}{2})^x = (2^{-1})^x = 2^{-x}$

c $g(x) = (\frac{1}{2})^x = 2^{-x} = f(-x)$ en daaruit volgt dat de grafieken van f en g elkaars spiegelbeeld zijn in de y-as.

d Spiegelen in de x-as geeft $h(x) = -f(x) = -2^x$

30a $f(x) = 2^x$ en $g(x) = 3 \cdot 2^x$
$f(x) = g(x) \Rightarrow 2^x = 3 \cdot 2^x \Rightarrow 2^x = 0$ en dat kan niet
De grafieken van f en g snijden elkaar niet.

b $f(x) = 2^x$ en $h(x) = 3 + 2^x$
$f(x) = h(x) \Rightarrow 2^x = 3 + 2^x \Rightarrow 3 = 0$ en dat kan niet.
De grafieken van f en h snijden elkaar niet.

31a Plot, $y_1 = 2^{x+3}$ en $y_2 = 8 \cdot 2^x$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	2	4	8	16	32
$g(x)$	2	4	8	16	32

De functiewaarden zijn gelijk, dus f en g vallen samen.

b $g(x) = 8 \cdot 2^x = 2^3 \cdot 2^x = 2^{x+3} = f(x)$
Dus $g(x) = f(x)$.

bladzijde 83

32a $f(x) = 4 \cdot (\frac{1}{2})^{2x} = 2^2 \cdot (2^{-1})^{2x} = 2^2 \cdot 2^{-2x} = 2^{2-2x} = g(x)$

b $h(x) = 6 \cdot 2^{-x-3} = 6 \cdot 2^{-x} \cdot 2^{-3} = 6 \cdot (2^{-1})^3 \cdot (2^{-1})^x = 6 \cdot (\frac{1}{2})^3 \cdot (\frac{1}{2})^x =$
$6 \cdot \frac{1}{8} \cdot (0,5)^x = 0,75 \cdot (0,5)^x = k(x)$

33 $f(x)=4^{0,5(x+1)}=4^{0,5x+0,5}=4^{0,5x}\cdot 4^{0,5}=(4^{0,5})^x\cdot 4^{0,5}=(\sqrt{4})^x\cdot\sqrt{4}=2\cdot 2^x$
De beginhoeveelheid is 2 en de groeifactor is 2.

34a Plot, $y_1=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}$
De grafiek is stijgend, want het functievoorschrift is te herleiden tot:
$f(t)=3\cdot(\frac{1}{2})^{2-t}=3\cdot(2^{-1})^{2-t}=3\cdot 2^{t-2}=3\cdot 2^{-2}\cdot 2^t=\frac{3}{4}\cdot 2^t$
De groeifactor is 2, dus *f* is stijgend.
b $f(t)=3\cdot(\frac{1}{2})^{2-t}=0,75\cdot 2^t$. De beginhoeveelheid is dus 0,75.
c De groeifactor is 2, dus de grafiek van *f* is stijgend.

35a Is fout. $4\cdot 2^x=2^2\cdot 2^x=2^{2+x}\neq 2^{3x}=8^x$
b goed
c goed
d goed
e Is fout. $\dfrac{4}{2^x}=\dfrac{2^2}{2^x}=2^{2-x}\neq 2^x$
f Is fout. $6^x=(4+2)^x\neq 4+2^x$
g Is fout. $2^{2+x}=2^2\cdot 2^x=4\cdot 2^x\neq 4+2^x$
h Is fout. $4^x\cdot 2^x=(2^2)^x\cdot 2^x=2^{2x}\cdot 2^x=2^{3x}\neq 2^{2x^2}$
i Is fout. $4\cdot 2^x=2^2\cdot 2^x=2^{2+x}\neq 2^{2x}$
j goed

36a Bij spiegelen in de x-as geldt :
$g(x)=-f(x)=-5\cdot 1,5^{x+2}$
b Bij spiegelen in de y-as geldt :
$h(x)=f(-x)=5\cdot 1,5^{-x+2}$

37a Plot, $y_1=8-7\cdot 0,8^x$
b De hoogte van de boom nadert op den duur tot acht meter.
c Plot, $y_1=8-7\cdot 0,8^x$; $y_2=5$ en $y_3=6$
Calc, intersect,
$x\approx 3{,}80$ en $y=5$
$x\approx 5{,}61$ en $y=6$
$\Delta x=5{,}61-3{,}80=1{,}81$
Van vijf meter naar zes meter duurt bijna twee jaar.
Plot, $y_1=8-7\cdot 0,8^x$; $y_2=6$ en $y_3=7$
Calc, intersect,
$x\approx 5{,}61$ en $y=6$
$x\approx 8{,}72$ en $y=7$
$\Delta x=8{,}72-5{,}61=3{,}11$
Van zes meter naar zeven meter duurt ruim drie jaar.
d $H=8-7\cdot\left(0,8^{\frac{1}{12}}\right)^t=8-7\cdot 0,9816^t$
e De groei in de zomermaanden is niet te vergelijken met de wintermaanden.

3.6 Gemengde opdrachten

bladzijde 84

38a Van 1 ml oplossing met sterkte D1 wordt $1 \cdot 100$ ml = 100 ml D2 gemaakt.
Van 1 deel oplossing met sterkte D2 wordt $100 \cdot 100$ ml = 10000 ml = 10^4 ml D3 gemaakt.
Van 1 deel oplossing met sterkte D3 wordt $10^4 \cdot 100$ ml = 10^6 ml D4 gemaakt.
Er wordt met sterkte D4, 10^6 ml = 1000 liter gemaakt.

b Elke keer moet het nieuwe ontstane mengsel 100 krachtige schokken ondergaan.
D4 heeft dan $4 \cdot 100 = 400$ schokken ondergaan.

c

sterkte	D1	D2	D3	D4	D5	D6
aantal ml	1	10^2	10^4	10^6	10^8	10^{10}
aantal schokken	100	200	300	400	500	600

c 1 ml oplossing met 9 ml water geeft 10 ml.
Het proces wordt twee keer toegepast, dus $10 \cdot 10 = 100$ ml.
Het aantal schokken met sterkte D2 is 20.

39a

jaar	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990
omvang in miljarden	1,65	1,75	1,86	2,07	2,30	2,52	3,02	3,70	4,45	5,30

Groeifactoren per 10 jaar:

$$\frac{1,75}{1,65} = 1,06\ ;\ \frac{1,86}{1,75} = 1,06\ ;\ \frac{2,07}{1,86} = 1,11\ ;\ \frac{2,30}{2,07} = 1,11\ ;\ \frac{2,52}{2,30} = 1,10\ ;\ \frac{3,02}{2,52} = 1,20\ ;$$

$$\frac{3,70}{3,02} = 1,22\ ;\ \frac{4,45}{3,70} = 1,20\ ;\ \frac{5,30}{4,45} = 1,19$$

b Exponentiële groei is er van 1920 tot en met 1950, met groeifactor $\left(\frac{2,52}{1,86}\right)^{\frac{1}{3}} = 1,1065$ per 10 jaar. De formule wordt dan: $B(t) = 1,86 \cdot 1,1065^t$ met B in miljarden en t in perioden van 10 jaar. $t = 0$ is 1920.

Ook is er exponentiële groei van 1950 tot en met 1990, met groeifactor $\left(\frac{5,30}{2,52}\right)^{\frac{1}{4}} = 1,2043$ per 10 jaar. De formule wordt dan: $B(t) = 2,52 \cdot 1,2043^t$ met B in miljarden en t in perioden van 10 jaar. $t = 0$ is 1950

c Van 1900 tot 1990 is 90 jaar.
De groeifactor per 90 jaar is $\frac{5,30}{1,65} \approx 3,2121$
De groeifactor per 10 jaar is dan $\left(\frac{5,30}{1,65}\right)^{\frac{1}{9}} = 1,1384$. De formule wordt dan
$B(t) = 1,65 \cdot 1,1384^t$ met B in miljarden en t in perioden van 10 jaar. $t = 0$ is 1900.

d Op basis van de tweede formule van opdracht b : Van 1950 tot 2050 is $t = 10$
De omvang wereldbevolking in 2050 : $B(10) = 2,52 \cdot 1,2043^{10} \approx 16,2$ miljard.
Op basis van de formule van opdracht c: van 1900 tot 2050 is $t = 15$
De omvang wereldbevolking in 2050 : $B(15) = 1,65 \cdot 1,1384^{15} \approx 11,5$ miljard.
Dit is niet erg reëel. Uit de bevolkingsaantallen van 1900 tot 1990 blijkt al dat er niet echt exponentiële groei is voor langere tijd. Bovendien zie je grote verschillen tussen de twee modellen.

bladzijde 85

40a Met de aanplant en het onderhoud zijn kosten gemaakt.

b $HW = 2,7^{-rt}(12t - 90)$ en $r = 0,06$
Plot, $y_1 = 2,7^{-0,06x} \cdot (12x - 90)$

c Zie grafiek van opdracht b,
Calc, maximum
$x \approx 24,28$ en $y \approx 47,38$
Na ruim 24 jaar is de huidige waarde maximaal, namelijk 47,38.

d De bijbehorende waarden voor de huidige maximale waarde en de tijd waarop dit maximum wordt bereikt, staan hieronder in de tabel verwerkt.

r	t_{max}	HW_{max}
0,03	41	118
0,06	24	47
0,12	16	15
0,24	12	3

Hoe groter *r* des groter het rentepercentage dus duurt het korter om de huidige maximale waarde te bereiken, want de kosten stijgen dan sneller, terwijl de waarde van het hout op dezelfde manier stijgt.
Dus je moet eerder kappen bij een grotere waarde voor *r*.

e Zie tabel hierboven, hoe groter de *r* des te kleiner de huidige maximale waarde.

41a Op tijdstip $t = 0$ is de groeifactor 1,3.
Het lichaamsgewicht na een succesvolle jacht is $1,5 \cdot 1,3 = 19,5$ gram.

b De tijdstip van uithongering is na 60 uur en dan weegt de vleermuis nog maar 78% van zijn normale lichaamsgewicht, dus $0,78 \cdot 15 = 11,7$ gram.
Onder de 11,7 gram verhongert de vleermuis.

c Binnen 60 uur moet hij vers bloed binnenkrijgen.
Dus 60 : 24 = 2,5 dag.
Na 2 nachten moet de vleermuis weer op jacht.

d Vul in de formule $M = \frac{a}{b+t}$ voor $M = 130$ en $t = 0$ de formule geeft dan :
$130 = \frac{a}{b} \Rightarrow a = 130b$ .....(1)
Vul in voor $M = 78$ en $t = 60$ de formule geeft dan $78 = \frac{a}{b+60} \Rightarrow a = 78(b+60)$ ....(2)
Substitueer (1) in (2) je krijgt dan :
$130b = 78(b+60) \Rightarrow 130b = 78b + 4680 \Rightarrow 52b = 4680 \Rightarrow b = 90$
$b = 90$ invullen in (1) geeft : $a = 130 \cdot 90 = 11700$.
Dus $a = 11700$ en $b = 90$
De formule wordt $M = \frac{11700}{90+t}$

e Als $t = 0$ geldt $E(0) = 76 + b \cdot g^0 = 130 \Rightarrow 76 + b = 130 \Rightarrow b = 54$
Invullen in de formule voor $t = 60$ en $E = 78$ geeft :
$76 + 54 \cdot g^{60} = 78 \Rightarrow 54 \cdot g^{60} = 2 \Rightarrow g^{60} = \frac{2}{54} \Rightarrow g = \left(\frac{2}{54}\right)^{\frac{1}{60}} \approx 0,947$
$E(t) = 76 + 54 \cdot 0,947^t$, met *t* in uren en *E* in procenten.

Test jezelf

T-1a De groeifactor per minuut is 0,75.
Het verschil tussen C en kamertemperatuur neemt met 25% per minuut af.

b Op tijdstip $t = 0$ is $S(0) = 20 + 40 \cdot 0,95^0 = 60$ °C.

c 20 geeft de kamertemperatuur aan.
40 geeft het verschil tussen de temperatuur van de chocolademelk of soep en de kamertemperatuur op tijdstip $t = 0$

d Plot, $y_1 = 20 + 40 \cdot 0,75^x$ en $y_2 = 20 + 40 \cdot 0,95^x$
De horizontale asymptoot van beide grafieken is $y = 20$
De asymptoot komt overeen met de kamertemperatuur.

e In de formules van C en S staat 20.
Neem t heel groot, dan nadert $40 \cdot 0,75^t$ en $40 \cdot 0,95^t$ naar nul.

T-2a Van 9.30 uur naar 11.00 uur is het verschil 1,5 uur (90 minuten)
De groeifactor per 30 minuten is 1,9
De groeifactor per 90 minuten is $1,9^{\frac{90}{30}} = 1,9^3$
Het aantal bacteriën om 11.00 uur is
$H = 3100 \cdot 1,9^3 \approx 21263$

b $H = 3100 \cdot 1,9^t$, met t per half uur en $t = 0$ om 9.30 uur

c Van 9.30 uur terug naar 9.00 uur is $t = -1$
Het aantal bacteriën $H(-1) = 3100 \cdot 1,9^{-1} \approx 1632$

d Van 9.30 uur naar 9.45 uur is $t = \frac{1}{2}$
Het aantal bacteriën $H(\frac{1}{2}) = 3100 \cdot 1,9^{\frac{1}{2}} \approx 4273$

T-3a $4^{-1} = \dfrac{1}{4}$

$2^{-5} = \dfrac{1}{2^5} = \dfrac{1}{32}$

$\left(\sqrt{5}\right)^{-4} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^4} = \dfrac{1}{25}$

b $\frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$

$\sqrt{32} = \sqrt{2^5} = 2^{\frac{5}{2}} = 2^{2\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{125} = \frac{1}{5^3} = 5^{-3}$

$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$

$0,25 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$

T-4a De groeifactor per 37 jaar is 3.
De groeifactor per jaar is $3^{\frac{1}{37}} \approx 1,03$

b Van 1950 tot 1960 is $t = 10$
Het aantal eilandbewoners in 1960 is
$98500 \cdot 1,03^{10} \approx 132376$

c De groeifactor is 2, dus $1{,}03^t = 2$
Plot, $y_1 = 1{,}03^x$ en $y_2 = 2$
Calc, intersect, $x \approx 23{,}4$
Dus in het jaar 1950 + 23 = 1973 wordt het aantal verdubbeld.

T-5a Van $t = 2$ naar $t = 5$ is de groeifactor per drie eenheden $\frac{12}{4} = 3$

Van $t = 2$ naar $t = 8$ is de groeifactor per zes eenheden $3^{\frac{6}{3}} = 3^2 = 9$

$H = 4 \cdot 9 = 36$

b De groeifactor per 3 eenheden is de groeifactor 3 dus is de groeifactor per eenheid is
$3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3} \approx 1,442$
De beginhoeveelheid op $t = 0$ is dan $4 \cdot \left(\sqrt[3]{3}\right)^{-2} \approx 1,923$
$H(t) = 1,923 \cdot 1,442^t$.

T-6a Bij een afname van 10% is de groeifactor 0,9 per meter.
De groeifactor per vijf meter is $0{,}9^5 \approx 0{,}59$
De groeifactor per tien meter is $0{,}9^{10} \approx 0{,}35$
De lichtsterkte op vijf meter is 59% en op tien meter diepte 35%.

b De beginhoeveelheid is 100%, want $L(0) = 100$.
De formule wordt $L(d) = 100 \cdot 0,9^d$, met d in meter.

c De groeifactor is dan $\frac{1}{2}$, dus $0{,}9^t = \frac{1}{2}$
Plot, $y_1 = 0{,}9^x$ en $y_2 = 0{,}5$
Calc, intersect, $x \approx 6{,}58$
Op een diepte van bijna 6,6 m is de lichtsterkte gehalveerd.

T-7a
$$25 \cdot 5^x = \frac{1}{125}$$
$$5^2 \cdot 5^x = \frac{1}{5^3}$$
$$5^{2+x} = 5^{-3}$$
$$x + 2 = -3 \Rightarrow x = -5$$

b
$$16^x = 8$$
$$(2^4)^x = 2^3$$
$$2^{4x} = 2^3$$
$$4x = 3 \Rightarrow x = \tfrac{3}{4}$$

c
$$0,25^{x-3} > 16^{2+2x}$$
$$0,25^{x-3} = 16^{2+2x}$$
$$(\tfrac{1}{4})^{x-3} = (4^2)^{2+2x}$$
$$(4^{-1})^{x-3} = (4^2)^{2+2x}$$
$$4^{-x+3} = 4^{4+4x}$$
$$-x + 3 = 4 + 4x \Rightarrow -5x = 1 \Rightarrow x = -\tfrac{1}{5}$$

Plot $y_1 = 0,25^{x-3}$ en $y_2 = 16^{2+2x}$
En lees de oplossing af: $\left\langle \leftarrow, -\tfrac{1}{5} \right\rangle$

d
$$(\tfrac{1}{3})^x < \tfrac{1}{9}$$
$$(\tfrac{1}{3})^x = \tfrac{1}{9}$$
$$(3^{-1})^x = \tfrac{1}{3^2}$$
$$3^{-x} = 3^{-2}$$
$$-x = -2 \Rightarrow x = 2$$

Plot beide grafieken en lees de oplossing af: $\langle 2, \rightarrow \rangle$

T-8a $1,44^{0,5t-1} = 1,44^{0,5t} \cdot 1,44^{-1} = (1,44^{0,5})^t \cdot 1,44^{-1} = 1,2^t \cdot 1,44^{-1}$
Dus de groeifactor per uur is 1,2.

b $N(t) = 4,32 \cdot 1,44^{0,5t-1} = 4,32 \cdot 1,44^{-1} \cdot 1,2^t = 3 \cdot 1,2^t$
dus $N(t) = 3 \cdot 1,2^t$, met t in uren.

T-9a Bij een afname van 3% per maand is de groeifactor 0,97.
$S = 2,2 \cdot 0,97^m$, met m in maanden en S in bar.

b $2,2 \cdot 0,97^m > 1,8$
Plot, $y_1 = 2,2 \cdot 0,97^x$ en $y_2 = 1,8$
Calc, intersect, $x \approx 6,59$
oplossing : $m < 6,6$
Bijna 6,6 maanden hoeft de band niet te worden opgepompt.

c Neem voor een maand 30 dagen.
$m = 6,59$, dus met tussenpozen van $6,59 \cdot 30 \approx 198$ dagen moet de band worden opgepompt.

d Bij afname van 2% per 20 dagen is de groeifactor 0,98 per 20 dagen.
De groeifactor per maand is $0,98^{\frac{30}{20}} \approx 0,97$
$S = 2,3 \cdot 0,97^m$, met m in maanden en S in bar.
$S = 1,9$
Plot, $y_1 = 2,3 \cdot 0,97^x$ en $y_2 = 1,9$
Calc, intersect, $x \approx 6,27$
$m = 6,27$, dus met tussenpozen van $6,27 \cdot 30 \approx 188$ dagen moet er worden opgepompt.
Merk B moet vaker worden opgepompt.