Hoofdstuk 9 - Overgangsmatrices

bladzijde 232

1a Er zijn 497 auto's van de Eendweg die via het plein naar de Gansstraat gaan.
De som van de eerste kolom geeft het aantal auto's van de Eendweg, dus 900.

b De som van alle getallen in de matrix is 4000, het aantal auto's dat het Vogelplein passeert.

c $\frac{497}{900} \approx 0{,}55$

d

$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{ccc} E & F & G \end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c} E \\ F \\ G \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}01 & 0{,}49 & 0{,}47 \\ 0{,}44 & 0{,}01 & 0{,}53 \\ 0{,}55 & 0{,}50 & 0{,}00 \end{pmatrix} \end{array}$$

e $0{,}01 \times 1200 + 0{,}49 \times 1550 + 0{,}47 \times 2250 = 1829$ auto's verlaten het plein richting Eendweg
$0{,}44 \times 1200 + 0{,}01 \times 1550 + 0{,}53 \times 2250 = 1736$ auto's verlaten het plein richting Fuutlaan
$0{,}55 \times 1200 + 0{,}50 \times 1550 + 0{,}00 \times 2250 = 1435$ auto's verlaten het plein richting Gansstraat.

2a De onderzoeker moet deze gegevens bij de overheid opvragen.

b De som van de fracties uit P en S is 1.

c

$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{cc} S & P \end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c} S \\ P \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}98 & 0{,}08 \\ 0{,}02 & 0{,}92 \end{pmatrix} = A \end{array}$$

d $A \times B = \begin{array}{c} S \\ P \end{array} \begin{pmatrix} 62\,000 \\ 38\,000 \end{pmatrix}$

e Begin 2004 woonden er 62 000 mensen in de stad en 38 000 op het platteland.

3a In 2002 vierden $546 + 104 = 650$ personen Sinterklaas. Hiervan vierden 104 geen Sinterklaas in 2003.

b

$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{cc} W & N \end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c} W \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}84 & 0{,}20 \\ 0{,}16 & 0{,}80 \end{pmatrix} = M \end{array}$$

c $M \times \begin{pmatrix} 650 \\ 335 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} W \\ N \end{array} \begin{pmatrix} 613 \\ 372 \end{pmatrix}$ in 2003

$M \times \begin{pmatrix} 613 \\ 372 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} W \\ N \end{array} \begin{pmatrix} 589 \\ 396 \end{pmatrix}$ in 2004

$M \times \begin{pmatrix} 589 \\ 396 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} W \\ N \end{array} \begin{pmatrix} 574 \\ 411 \end{pmatrix}$ in 2005

In 2004 vierden 589 mensen Sinterklaas. In 2005 574.

4a

$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{cc} QT & WP \end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c} QT \\ WP \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}50 & 0{,}25 \\ 0{,}50 & 0{,}75 \end{pmatrix} = M \end{array}$$

b Het is een vereenvoudiging van de werkelijkheid en een wiskundige beschrijving van de overgangen.

$$M \times \begin{pmatrix} 300 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} QT \\ WP \end{array} \begin{pmatrix} 225 \\ 375 \end{pmatrix}$$

$$M \times \begin{pmatrix} 225 \\ 375 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} QT \\ WP \end{array} \begin{pmatrix} 206 \\ 394 \end{pmatrix}$$

Na één maand tanken 375 mensen bij de 'Witte Pomp'. Na twee maanden zijn dat er 394.

5a In 4 VWO blijft 8% zitten.

b In 6VWO slaagt $100 - 7 = 93\%$

c Als iemand een klas overslaat of teruggeplaatst wordt. In de praktijk zal dit vrijwel nooit het geval zijn.

d Er vertrekt niemand en er komt geen nieuwe leerling op school.

bladzijde 234

6a Van $A1$ via $B1$ naar C kan op $4 \times 6 = 24$ manieren.
Van $A1$ via $B2$ kan op $3 \times 3 = 9$ manieren.
Van $A1$ via $B3$ kan op $2 \times 2 = 4$ manieren.
Dus van $A1$ naar C in twee stappen kan op $24 + 9 + 4 = 37$ manieren.

b Dit kan op $5 \times 6 + 2 \times 3 + 3 \times 2 = 42$ manieren.

c

$$L \times K = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A1 & A2 \end{array} \\ C & \begin{pmatrix} 37 & 42 \end{pmatrix} \end{array}$$

De aantallen tweestapswegen van $A1$ respectievelijk $A2$ naar C.

7a

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A1 & A2 \end{array} \\ \begin{array}{c} B1 \\ B2 \\ B3 \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = P \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} B1 & B2 & B3 \end{array} \\ \begin{array}{c} C1 \\ C2 \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = Q \end{array}$$

b

$$Q \times P = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A1 & A2 \end{array} \\ \begin{array}{c} C1 \\ C2 \end{array} & \begin{pmatrix} 24 & 27 \\ 13 & 15 \end{pmatrix} \end{array}$$

Er zijn 24 tweestapswegen van $A1$ naar $C1$ en 13 van $A1$ naar $C2$.
Van $A2$ naar $C1$ zijn dat er 27 en van $A2$ naar $C2$ zijn dat er 15.

8a Je kunt van $T1$ via $T2$ naar D op $2 \times 3 = 6$ manieren en via $T3$ naar D op $1 \times 1 = 1$ manier.
Totaal dus op 7 manieren.

b Van $T1$ naar $T1$ zijn er $2 \times 2 + 2 \times 2 + 1 \times 1 = 9$ twee stapswegen.
Van $T1$ naar $T2$ zijn er $2 \times 1 = 2$ tweestapswegen.
Van $T1$ naar $T3$ zijn er $2 \times 2 = 4$ tweestapswegen.

c

$$S \times S = \text{naar} \begin{array}{c} \\ \\ D \\ T1 \\ T2 \\ T3 \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{cccc} D & T1 & T2 & T3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 9 & 7 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Steeds het aantal tweestapswegen tussen twee knooppunten.

d Tel de getallen in elke kolom op. Dan zie je dat er vanuit $T2$ de meeste tweestapswegen vertrekken, namelijk 25.

bladzijde 235

9a

$$\text{naar} \begin{array}{c} \\ \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = M$$

b

$$\text{naar} \begin{array}{c} \\ \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = M$$

c Het aantal verbindingen tussen twee stations met slechts één tussenstop.

d Je kunt altijd van een station naar een volgend station en terug.

e In M^4 staat in rij 2 en kolom 5 een 6. Dus zijn er 6 vierstapswegen van La Fourche (5) naar Villiers (2).

f

$$\text{naar} \begin{array}{c} \\ \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = M + M^2$$

Deze matrix geeft het aantal manieren aan om van een station naar een ander station te komen met maximaal 1 tussenstation.

10a

$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{cccc} P & B & A & S \end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c} P \\ B \\ A \\ S \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}9 \end{pmatrix} = V \end{array}$$

b $V \times \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} P \\ B \\ A \\ S \end{array} \begin{pmatrix} 16 \\ 44 \\ 50 \\ 42 \end{pmatrix}$ in 2001 $\quad V \times \begin{pmatrix} 16 \\ 44 \\ 50 \\ 42 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} P \\ B \\ A \\ S \end{array} \begin{pmatrix} 6 \\ 32 \\ 52 \\ 53 \end{pmatrix}$ in 2002

c V^2 geeft de overgang per 2 jaar weer.

d $V^4 \times \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} P \\ B \\ A \\ S \end{array} \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 38 \\ 71 \end{pmatrix}$ in 2004.

e Het aantal leden neemt steeds verder af en dus zal de club worden opgeheven.

11a

$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{cccc} P & B & A & S \end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c} P \\ B \\ A \\ S \end{array} & \begin{pmatrix} 1{,}0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}9 \end{pmatrix} = V \end{array}$$

b $V^4 \times \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} P \\ B \\ A \\ S \end{array} \begin{pmatrix} 40 \\ 48 \\ 56 \\ 73 \end{pmatrix}$ na 4 jaar.

c $V^8 \times \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} P \\ B \\ A \\ S \end{array} \begin{pmatrix} 40 \\ 48 \\ 59 \\ 108 \end{pmatrix}$ na 8 jaar.

$V^{12} \times \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} P \\ B \\ A \\ S \end{array} \begin{pmatrix} 40 \\ 48 \\ 60 \\ 132 \end{pmatrix}$ na 12 jaar.

d Uiteindelijk zal de verdeling worden:

$$\begin{array}{c} P \\ B \\ A \\ S \end{array} \begin{pmatrix} 40 \\ 48 \\ 60 \\ 180 \end{pmatrix}$$

Je vindt dit door bijvoorbeeld $V^{50} \times \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}$ te berekenen.

bladzijde 236

12a 0,90 geeft aan dat 90% van de gezonde leerlingen twee dagen later nog gezond is.
0,60 geeft aan dat 60% van de zieke leerlingen twee dagen later gezond is.
0,40 geeft aan dat 40% van de zieke leerlingen twee dagen later nog ziek is.

b Op 12 januari was het aantal gezonde leerlingen $0{,}90 \times 1803 + 0{,}60 \times 227 \approx 1759$
Het aantal zieke leerlingen was $2030 - 1759 = 271$.

c $V^3 \times B = \begin{array}{c} g \\ z \end{array}\begin{pmatrix} 1742 \\ 288 \end{pmatrix}$, de aantallen op 16 januari.

d $\begin{pmatrix} 0,9 & 0,6 \\ 0,1 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1803 \\ 227 \end{pmatrix}$

Uitschrijven hiervan geeft onder andere $0,9g + 0,6z = 1803$

e Het totale aantal leerlingen is $g + z$ en dat is 2030.

f $g + z = 2030 \Rightarrow g = 2030 - z$

g $\frac{1803 - 0,6z}{0,9} = 2030 - z$

$1803 - 0,6z = 0,9(2030 - z)$

$1803 - 0,6z = 1827 - 0,9z$

$0,3z = 24$

$z = 80$ en $g = 1950$

13a $V^{-1} \times B = \begin{array}{c} g \\ z \end{array}\begin{pmatrix} 1950 \\ 80 \end{pmatrix}$ en dit klopt met opdracht 12g.

b $V \times (V^{-1} \times B) = V^{-1} \times (V \times B) = B$

Je rekent 2 dagen terug en dan weer 2 dagen vooruit of andersom.

In beide situaties krijg je de situatie van 10 januari.

14a $S \times V = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{pmatrix} 4490 \\ 5040 \\ 4470 \end{pmatrix}$ in de eerste week van november

en $S^5 \times V = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{pmatrix} 4642 \\ 4676 \\ 4682 \end{pmatrix}$ na vijf maanden.

b $S^{-1} \times V = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{pmatrix} 4800 \\ 7000 \\ 2200 \end{pmatrix}$ in de eerste week van september.

c $S^{-1} \times S \times V = V$ want $S^{-1} \times S = I$ (de eenheidsmatrix)

15a $S \times \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{pmatrix} 6000 \\ 5000 \\ 8500 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{pmatrix} 4100 \\ 7100 \\ 8300 \end{pmatrix}$ dus 4100 ton A, 7100 ton B en 8300 ton C.

b $S^{-1} \times B \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{pmatrix} 2200 \\ 6500 \\ 7300 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{pmatrix} 4000 \\ 9000 \\ 3000 \end{pmatrix}$ dus 4000 ton uit bron 1, 9000 ton uit bron 2 en 3000 ton uit bron 3.

c $0,4 \times 1 + 0,2 \times 0,2 + 0,4 \times 0,25 = 0,54$ dus wordt 54% van de aardolie uit bron 1 tot benzine verwerkt.

d
$$\begin{array}{r} \\ \text{benzine} \\ \text{kerosine} \\ \text{smeerolie} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0{,}2 & 0{,}25 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}25 \\ 0 & 0{,}0 & 0{,}50 \end{pmatrix} \end{array} = T$$

$$T \times S = \begin{array}{r} \\ b \\ k \\ s \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}54 & 0{,}225 & 0{,}38 \\ 0{,}26 & 0{,}525 & 0{,}42 \\ 0{,}20 & 0{,}250 & 0{,}20 \end{pmatrix} \end{array} = E$$

De getallen geven van de drie bronnen de verdeling over de eindproducten weer. Zo wordt 38% van de aardolie van bron 3 verwerkt tot benzine.

e
$$E \times \begin{pmatrix} 18\,000 \\ 15\,000 \\ 20\,000 \end{pmatrix} = \begin{array}{r} b \\ k \\ s \end{array}\begin{pmatrix} 20\,695 \\ 20\,955 \\ 11\,350 \end{pmatrix}$$

dus: 20 695 ton benzine, 20 955 ton kerosine en 11 350 ton smeerolie.

bladzijde 238

16a
$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \text{naar } B \\ \end{array}\begin{array}{r} \\ A \\ \\ C \end{array}\begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix} \end{array} = M$$

b $M \times \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{array}{r} A \\ B \\ C \end{array}\begin{pmatrix} 36 \\ 24 \\ 30 \end{pmatrix}$ is de verdeling aan het eind van de dag.

c

dag	1	2	3	4	5	6
A	36	38	39	40	40	40
B	24	22	21	20	20	20
C	30	30	30	30	30	30

d Na vier dagen verandert de verdeling niet meer.

bladzijde 239

17a 170 inwoners blijven in A, zodat de overgangskans van A naar A gelijk is aan $\frac{170}{200} = 0{,}85$

$$\text{naar}\ \begin{array}{r} \\ \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}05 & 0{,}06 \\ 0{,}05 & 0{,}88 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}07 & 0{,}84 \end{pmatrix} \end{array} = M$$

b $M^2 \times \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{pmatrix} 227 \\ 342 \\ 431 \end{pmatrix}$ in jaar 2006

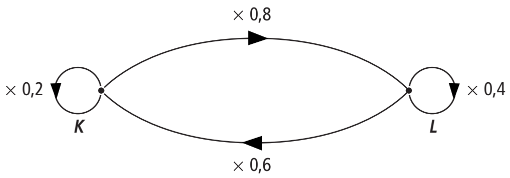
c $M^{-1} \times \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{pmatrix} 181 \\ 268 \\ 551 \end{pmatrix}$ in jaar 2003

d Bijvoorbeeld $M^{100} \times \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{pmatrix} 267 \\ 394 \\ 339 \end{pmatrix} = V$

en $M \times V = V$ dus is de stabiele verdeling: 267 in A, 394 in B en 339 inwoners in C.

e Het model houdt geen rekening met bijvoorbeeld immigratie, emigratie, geboorte en sterfte.

18a



b In een stabiele situatie moet gelden: $0{,}8K = 0{,}6L$ dus $8K = 6L$.

c Uit $8K = 6L$ volgt $K = 0{,}75L$

Omdat ook geldt $K + L = 1400$ vind je $0{,}75L + L = 1400$

Dus is $L = \frac{1400}{1{,}75} = 800$ en is $K = 600$.

d $\text{Overgangsmatrix}^6 \times \begin{pmatrix} 700 \\ 700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 800 \end{pmatrix}$ dus is na 6 perioden de situatie stabiel.

19a $V \times \begin{pmatrix} 2000 \\ 1500 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} K \\ H \end{array}\begin{pmatrix} 2050 \\ 1450 \end{pmatrix}$

b Het aantal verhuizingen vanuit koopwoningen is $0{,}1 \times 10\,000 = 1000$ en vanuit huurwoningen $0{,}1 \times 20\,000 = 2000$

Dan geldt: $V^2 \times \begin{pmatrix} 1000 \\ 2000 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} K \\ H \end{array}\begin{pmatrix} 1600 \\ 1400 \end{pmatrix}$ dus na 2 jaar kom je 1600 – 1000 = 600 koopwoningen tekort en staan er 2000 – 1400 = 600 huurwoningen leeg.

c 15% van 10000 is 1500 en 5% van 20000 is 1000.

$V \times \begin{pmatrix} 1500 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} K \\ H \end{array}\begin{pmatrix} 1500 \\ 1000 \end{pmatrix}$ dus een stabiele verdeling.

bladzijde 240

20a Op $t = 0$ zijn er 2000 nul-jarigen, op $t = 1$ zijn er 1000 één-jarigen.

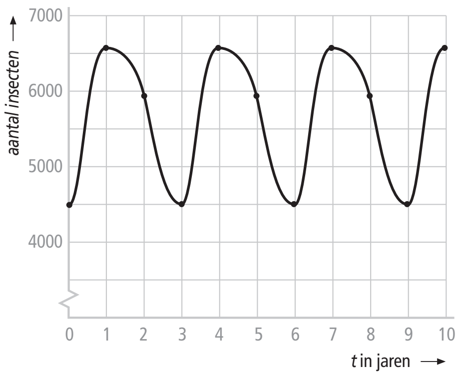
Dus is de overlevingskans 0,5.

b Van de 1500 één-jarigen zijn er na één jaar nog 600 in leven, de overlevingskans is $\frac{600}{1500} = 0{,}4$.

c Op $t=0$ zijn er 1000 twee-jarigen en op $t=1$ zijn er 5000 nul-jarigen, dus gemiddeld zijn er 5 nakomelingen per insect.

d Op $t=2$ zijn er 3000 nul-jarigen, 2500 één-jarigen en 400 twee jarigen.
Op $t=3$ zijn dat er achtereenvolgens: 2000; 1500 en 1000.

e



f De verdeling herhaalt zich elke drie jaar.

21a 80% uit leeftijdsklasse 2 leeft na één jaar nog.

b Een pijl naar links gaat over nakomelingen, een pijl naar rechts gaat over de overlevingskans.

c Het vruchtbaarheidscijfer van leeftijdsklasse 2 is 1,2.

d

$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \text{naar}\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}0 & 1{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}9 & 0{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}8 & 0{,}0 \end{pmatrix} = L \end{array}$$

e

$$L \times B = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{pmatrix} 160 \\ 90 \\ 80 \end{pmatrix}$$

De getallen zijn de aantallen marmotten in elke leeftijdsklasse na één jaar.

fgh Tabel voor grafiek a (vruchtbaarheidscijfer 1,2)

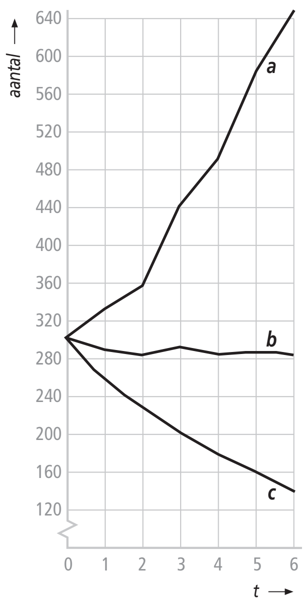
t	0	1	2	3	4	5	6
aantal	300	330	356	443	479	581	645

Tabel voor grafiek b (vruchtbaarheidscijfer 0,79)

t	0	1	2	3	4	5	6
aantal	300	289	282	292	284	289	285

Tabel voor grafiek c (vruchtbaarheidscijfer 0,5)

t	0	1	2	3	4	5	6
aantal	300	286	230	197	178	156	137



bladzijde 241

22a

	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$
0	1000	1500	1200	1800	1440
1	1000	800	1200	960	1440
2	0	900	720	1080	864
3	0	0	630	567	813

b Vissen van 3 jaar en ouder hebben nog 10% kans om één jaar later nog in leven te zijn.

c Vissen van 2 jaar en ouder kunnen gevangen worden want deze planten zich niet meer voort.

d Dat kun je niet zeggen want 10% overleeft steeds. Toch is het erg onwaarschijnlijk dat een vis van 3 jaar over twee jaar nog leeft. De kans daarop is slechts $0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}01$

e $0{,}8 \times 0{,}9 \times 0{,}7 \times 0{,}1 = 0{,}0504$ dus ruim 5%

f De populatie neemt steeds verder toe. Zo zullen er volgens dit model over 20 jaar al 6192 nul-jarigen, 6192 één-jarigen, 3715 twee-jarigen en 3497 drie-jarigen zijn.

23a $\frac{148\,000}{168\,000} \approx 0{,}881$; $\frac{113\,000}{127\,000} \approx 0{,}890$; $\frac{52\,000}{93\,000} \approx 0{,}560$

b $\frac{11\,000}{168\,000} \approx 0{,}065$; $\frac{115\,000}{127\,000} \approx 0{,}906$; $\frac{800}{93\,000} \approx 0{,}009$

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}065 & 0{,}906 & 0{,}009 & 0 \\ 0{,}881 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}890 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}560 & 0 \end{pmatrix}$$

c -

d
$$P^2 \times \begin{pmatrix} 168\,000 \\ 127\,000 \\ 93\,000 \\ 38\,000 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} 0-24 \\ 25-49 \\ 50-74 \\ 75-100 \end{array} \begin{pmatrix} 143\,000 \\ 111\,710 \\ 132\,000 \\ 63\,000 \end{pmatrix}$$

e Bereken $P^5 \times \begin{pmatrix} 168\,000 \\ 127\,000 \\ 93\,000 \\ 38\,000 \end{pmatrix}$ dan zie je dat de klasse 75 – 100 zo'n 18% van het totaal uitmaakt.

Ook zie je dan dat de omvang van de bevolking afneemt.

f De overgang is steeds per 25 jaar dus moeten ook de klassen 25 jaar breed zijn.

bladzijde 242

24a

$$\text{pikt naar}\quad \begin{array}{c} \\ K1 \\ K2 \\ K3 \\ K4 \\ K5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} K1 & K2 & K3 & K4 & K5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

b Kip 2 pikt naar 3 andere kippen (som kolom 2) en wordt slechts door één andere kip (som rij 2) gepikt. Kip 2 lijkt de baas te zijn.

c Kip 1 heeft via Kip 2 en Kip 5 indirect overwicht op Kip 3. Dus op twee manieren.

d

$$P^2 = \begin{array}{c} \\ K1 \\ K2 \\ K3 \\ K4 \\ K5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} K1 & K2 & K3 & K4 & K5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

De getallen geven aan op hoeveel manieren een kip via één andere kip, dus indirect, overwicht heeft op een andere kip.

e

$$P + P^2 + P^3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} 13 & 17 & 13 & 11 & 7 \end{array}$$

Ook volgens deze matrix is kip 2 de baas.

De pikorde lijkt te zijn: Kip 2, Kip 1 en Kip 3, Kip 4 en tenslotte Kip 5

f De baas zijn over jezelf is wat onzinnig.

g Je krijgt dan als resultaat de matrix $\begin{pmatrix} - & 1,7 & 1,5 & 1,3 & 0,8 \\ 1,0 & - & 0,8 & 0,5 & 0,3 \\ 1,3 & 1,8 & - & 1,2 & 1,0 \\ 1,2 & 1,8 & 1,3 & - & 0,5 \\ 1,8 & 2,5 & 1,7 & 1,8 & - \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccccc} 5,3 & 7,8 & 5,3 & 4,8 & 2,6 \end{array}$$

De pikorde verandert niet door deze aanpak.

25a Van volwassene naar jong: 3

De overige: 1

b

$$\text{naar} \begin{array}{c} \\ j \\ v \end{array}\begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{cc} j & v \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = L$$

$$L^{10} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} j \\ v \end{array}\begin{pmatrix} 6954 \\ 5366 \end{pmatrix}$$

c

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
aantal	2	8	14	38	80	194	434	1016	2318	5366	12320

De groeifactoren zijn achtereenvolgens: 4; 1,8; 2,7; 2,1; 2,4; 2,2; 2,3; 2,3; 2,3; 2,3

Dus na verloop van tijd is de groeifactor zo'n 2,3 per 0,1 jaar.

d Er zijn ongeveer $6954 : 5366 \approx 1,3$ keer zoveel jonge als volwassen muizen.

bladzijde 243

26a De kans is 70% dat het morgen zonnig is als het vandaag zonnig is.

bc $M^2 = \begin{pmatrix} 0,61 & 0,52 \\ 0,39 & 0,48 \end{pmatrix}$

0,61 is de kans dat het overmorgen zonnig is als het vandaag zonnig is.
0,39 is de kans dat het overmorgen bewolkt is als het vandaag zonnig is.
0,52 is de kans dat het overmorgen zonnig is als het vandaag bewolkt is.
0,48 is de kans dat het overmorgen bewolkt is als het vandaag bewolkt is.

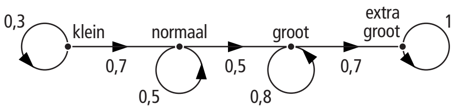
d Uit bijvoorbeeld $M^{20} \approx \begin{pmatrix} 0,57 & 0,57 \\ 0,43 & 0,43 \end{pmatrix}$ volgt dat $M^{20} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = M^{20} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,57 \\ 0,43 \end{pmatrix}$

Dus maakt het niet uit of het vandaag zonnig of bewolkt is: over 20 dagen is de kans dat het zonnig is 0,57 en dat het bewolkt is 0,43. De verhouding hiervan is ongeveer $4:3$.

e Volgens dit model kun je ongeveer $\frac{4}{7} \times 365 \approx 209$ zonnige dagen per jaar verwachten.

27a De kans is $0,7 \times 0,5 = 0,35$

b



c

$$\begin{array}{ccc} & & \text{van} \\ & & \begin{array}{cccc} \text{klein} & \text{normaal} & \text{groot} & \text{extra groot} \end{array} \\ \text{naar} & \begin{array}{c} k \\ n \\ g \\ e \end{array} & \begin{pmatrix} 0,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 1 \end{pmatrix} = L \end{array}$$

d $L \times \begin{pmatrix} 650 \\ 1100 \\ 1050 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} k \\ n \\ g \\ e \end{array} \begin{pmatrix} 195 \\ 1005 \\ 1390 \\ 810 \end{pmatrix}$ eind 2003

e $L \times \begin{pmatrix} 195+1100 \\ 1005 \\ 1390-1000 \\ 810-100 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} k \\ n \\ g \\ e \end{array} \begin{pmatrix} 389 \\ 1409 \\ 814 \\ 788 \end{pmatrix}$ eind 2004

f Hij plant $1500 - 389 = 1111$ nieuwe bomen, dat kost € 2777,50
Hij kapt en verkoopt $1409 - 1000 = 409$ normale bomen, $814 - 500 = 314$ grote bomen en $788 - 600 = 188$ extra grote bomen. Dat levert $408 \cdot (8-1) + 314 \cdot (20-1) + 188 \cdot (50-1) = 18\,041$ euro op.
De verwachte winst is dan $18\,041 - 2\,777,50 = 15\,263,50$ euro.

g $L \times \begin{pmatrix} 1500 \\ 1000 \\ 500 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} k \\ n \\ g \\ e \end{array} \begin{pmatrix} 450 \\ 1550 \\ 900 \\ 700 \end{pmatrix}$ eind 2005

Hij plant 1050 nieuwe bomen, dat kost € 2 625,-
Hij kapt en verkoopt 550 normale, 400 grote en 100 extra grote bomen.
De verwachte winst is dan $16\,350 - 2\,625 = 13\,725$ euro.

h Hij plant dan 1365 nieuwe bomen, dat kost € 3412,50
Hij kapt en verkoopt 90 normale, 995 grote en 280 extra grote bomen.
Dat levert $90 \times 7 + 995 \times 19 + 280 \times 49 = 32\,255$ euro op.
De winst over twee jaar is dan $32\,255 - 3\,412{,}50 = 29\,842{,}50$ euro.
Dit is meer dan twee keer zoveel als het antwoord bij g dus is per 2 jaar kappen rendabeler.

bladzijde 246

T-1a

$$\begin{array}{cc} & \text{periode 1} \\ & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \text{periode 2} \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix} = M \end{array}$$

b $M^2 \times \begin{pmatrix} 625 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} A \\ B \end{array} \begin{pmatrix} 391 \\ 734 \end{pmatrix}$

T-2a

$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{cccc} K & L & M & N \end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c} K \\ L \\ M \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = D \end{array}$$

b Er is 1 tweestapsweg van L via M naar N.
Er is 1 tweestapsweg van N via K naar L.

c

$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{cccc} K & L & M & N \end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c} K \\ L \\ M \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = D^3 \end{array}$$

d 5 driestapswegen van K naar N namelijk 4 routes $KNKN$ en één route $KLMN$ en 5 driestapswegen van M naar L.

e De som van de derde rij is 3. Er eindigen dus 3 driestapswegen in M.
De som van de derde kolom is 9. Er beginnen dus 9 driestapswegen in M.

f De som van de eerste kolom van D^4 is 9. Er zijn dus 9 vierstapswegen die in K beginnen.

T-3a $W \times \begin{pmatrix} 940 \\ 460 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} S \\ E \end{array} \begin{pmatrix} 985 \\ 415 \end{pmatrix}$ op 22 mei

$W \times \begin{pmatrix} 985 \\ 415 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} S \\ E \end{array} \begin{pmatrix} 1019 \\ 381 \end{pmatrix}$ op 29 mei

b $W^6 \times \begin{pmatrix} 940 \\ 460 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} S \\ E \end{array} \begin{pmatrix} 1088 \\ 312 \end{pmatrix}$ dus na 6 weken

c $W^{-1} \times \begin{pmatrix} 940 \\ 460 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} S \\ E \end{array} \begin{pmatrix} 880 \\ 520 \end{pmatrix}$ op 8 mei.

T-4 $W^{26} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} S \\ E \end{array} \begin{pmatrix} 800 \\ 200 \end{pmatrix}$ dus 200 klanten

en $W \times \begin{pmatrix} 800 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} S \\ E \end{array} \begin{pmatrix} 800 \\ 200 \end{pmatrix}$, er treedt geen verandering meer op.

bladzijde 247

T-5a Een dier in klasse 1 brengt in één periode gemiddeld 0,6 jongen voort. Een dier in klasse 2 brengt gemiddeld in één periode 1,2 jongen voort.

b 80% van de dieren in klasse 1 overleeft.
50% van de dieren in klasse 2 overleeft.

c $L \times \begin{pmatrix} 80 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 168 \\ 64 \\ 50 \end{pmatrix}$

d $L \times \begin{pmatrix} 168 \\ 64 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 178 \\ 134 \\ 32 \end{pmatrix}$ na 2 perioden

$L \times \begin{pmatrix} 178 \\ 134 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 268 \\ 142 \\ 67 \end{pmatrix}$ na 3 perioden

e De populatie neemt steeds verder toe.

T-6a $A_1 \times \begin{pmatrix} 450 \\ 210 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} t1 \\ t2 \\ t3 \end{array} \begin{pmatrix} 2160 \\ 1200 \\ 3270 \end{pmatrix}$

2160 kg tussenproduct 1, 1200 kg tussenproduct 2 en 3270 kg tussenproduct 3.

b $A_1^{-1} \times \begin{pmatrix} 2970 \\ 1655 \\ 4550 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} g1 \\ g2 \\ g3 \end{array} \begin{pmatrix} 640 \\ 300 \\ 375 \end{pmatrix}$

640 kg grondstof 1, 300 kg grondstof 2 en 375 kg grondstof 3.

c

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} t1 & t2 & t3 \end{array} \\ \begin{array}{c} e1 \\ e2 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = A_2$$

$$A_2 \times A_1 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} g1 & g2 & g3 \end{array} \\ \begin{array}{c} e1 \\ e2 \end{array} & \begin{pmatrix} 31 & 8 & 15 \\ 14 & 2 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Voor eindproduct 1 is 31 kg grondstof 1; 8 kg grondstof 2 en 15 kg grondstof 3 nodig.
Voor eindproduct 2 is 14 kg grondstof 1; 2 kg grondstof 2 en 8 kg grondstof 3 nodig.

d $$A_2 \times A_1 \times \begin{pmatrix} 500 \\ 270 \\ 310 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} e1 \\ e2 \end{array} & \begin{pmatrix} 22\,310 \\ 10\,020 \end{pmatrix} \end{array}$$

Er kunnen 22310 eindproducten 1 en 10020 eindproducten 2 worden gemaakt.

T-7a Beide beschrijven hoe je vanuit een situatie naar een volgende situatie, een periode later, kunt berekenen.
Een overgangsmatrix bestaat uit kansen om van een categorie naar een volgende categorie te komen. Een populatiematrix bevat daarnaast ook reproductiecijfers per leeftijdsklasse.

b De kolom onder *C* want vanuit *C* vertrekt geen enkele route.
Ook zal de kolom onder *C* in G^4 uitsluitend nullen bevatten want er zal uit *C* geen enkele vierstapsweg kunnen vertrekken. Ergo: in elke macht van *G* zal de kolom onder *C* uitsluitend nullen bevatten.

c De som van de getallen van elke kolom is 1.