1. Kansrekening & Statistiek Wiskunde B HTV klas 6

Kansrekening en Statistiek-Herhaling klas 4

1. Multiple choice toets
Een certificatie-instituut moet een multiple choice toets ontwikkelen die voldoet aan het volgende criterium: *De kans dat iemand die van de stof niets weet, slaagt door enkel te gokken, is hoogstens 5%.*

a) Als het een toets van 40 vierkeuzevragen wordt, bij welk aantal goede antwoorden moet dan de grens tussen slagen een zakken (het aantal goede antwoorden dat benodigd is voor het verkrijgen van het certificaat) liggen, zodat nog net aan het criterium wordt voldaan?

b) Als het een toets van 40 vragen wordt en de grens tussen zakken en slagen ligt bij 20 (dus geslaagd bij 20 of meer goede antwoorden) hoeveel antwoordmogelijkheden moeten er dan minstens per vraag gegeven worden zodat aan het criterium wordt voldaan?

c) Als het een toets met vierkeuzevragen wordt en het certificaat is behaald als je minstens de helft van de antwoorden goed hebt, hoeveel vragen moeten er dan minstens worden gesteld zodat aan het criterium wordt voldaan?

2. Belspelletje
Bij een belspelletje moet je een code van n cijfers raden. Ieder cijfer op de juiste plaats levert tien euro op. Neem U = uitbetaling in euro's.

a) Waarom is U niet binomiaal verdeeld?
b) Bedenk bij dit spelletje een stochast die wel binomiaal verdeeld is.
c) Bij welke waarde van n is de verwachte uitbetaling 5 euro?

Variantie en standaardafwijking

3. In een vaas zitten 4 rode ballen en 16 witte.
a) X = het aantal rode ballen als je willekeurig 4 ballen trekt zonder teruglegging. Bereken $E(X)$ en $\sigma(X)$.
b) Voor iedere witte bal win je 3 euro, voor elke rode bal verlies je 4 euro. Y = je winst na het willekeurig trekken van 3 ballen met teruglegging. Bereken $E(Y)$ en $\sigma(Y)$.
c) Zelfde gegevens als bij b), maar nu begin je met een startkapitaal van 20 euro. Z = het bedrag dat je nog over hebt, na het willekeurig trekken van 3 ballen met teruglegging. Bereken $E(Z)$ en $\sigma(Z)$ zo eenvoudig mogelijk.
d) Je trekt steeds ballen zonder teruglegging, totdat je een witte bal trekt. Q = het aantal benodigde trekkingen. Bereken $E(Q)$ en $\sigma(Q)$.
e) Dezelfde gegevens als bij d). Iedere trekking levert 10 strafpunten op. R = het aantal gescoorde strafpunten. Bereken $E(R)$ en $\sigma(R)$ zo eenvoudig mogelijk.
f) Dezelfde gegevens als bij d). Je herhaalt dit experiment echter 5 keer. S = het voor de 5 experimenten totaal aantal benodigde trekkingen. T = het gemiddeld per experiment benodigde aantal trekkingen. Bereken $E(S)$, $\sigma(S)$, $E(T)$ en $\sigma(T)$ zo eenvoudig mogelijk.

N.B. Je mag bij deze vragen je GRM gebruiken.

1. Kansrekening & Statistiek Wiskunde B HTV klas 6

Normale verdeling

4. Bereken

a) Gegeven X~Norm(12,2). Bereken P(X≤13) en P(12≤X≤14).
b) Gegeven X~Norm(8;0,2) en bekend is dat P(X≤a)=80%. Bereken a.
c) Gegeven Q~Norm(110,10) en P(Q≤b) = 40%. Bereken b.
d) Gegeven B~Bin(120;0,3). Bereken P(36<X≤40).
e) Gegeven S~Norm(13,3) en P(10≤S≤q)=0,55. Bereken q.

5. Gegeven X~Norm(12,2), Y~Norm(μ,σ) en Z~Norm(0,1).

a) Controleer en beredeneer dat P(Z≤1,5) gelijk is aan de kans dat X maximaal een waarde aanneemt van 15. Leg bovendien uit dat geldt P(Z≤a)= P(Y≤μ+a·σ).
b) Bepaal de waarde van z waarvoor geldt P(Z≤z)= P(X≤11,5).
c) Als gegeven is dat P(Z≤z)= P(Y≤y) druk dan z uit in y.
d) Gebruik het resultaat van c) om het volgende vraagstuk op te lossen. Gegeven Q~Norm(μ,3). Voor welke waarde van μ geldt P(X≤12)=0,35?

6. Chocoladeletters

Van een partij chocoladeletters is gegeven dat het gewicht G van een letter Norm(200,3) verdeeld is.

a) Bereken de kans dat een willekeurig gekochte letter afgerond 198 gram weegt.
b) Welk gewicht hebben de 25% lichtste exemplaren in deze partij hoogstens?
c) Een leraar met de naam Blauw kan het niet nalaten zijn nieuwe spreadsheet-programma te testen door het gemiddelde gewicht van de tien door hem aangeschafte letters te bepalen. Bepaal E($\overline{G}$) en σ($\overline{G}$).
d) Bereken de kans dat de heer Blauw uit vraag c) op een gemiddeld gewicht uitkomt dat boven 200 g ligt.
e) Bereken de kans dat de heer Blauw in zijn pakket van tien letters meer dan 3 letters heeft die minder dan 197,5 gram wegen.
f) Wiskundelerares mevrouw van Bol hoort van de berekeningen die de heer Blauw heeft gedaan en in de koffiepauze spreekt ze de betreffende collega aan met de mededeling: "Als ik thuis het gemiddelde zou bepalen van de door mij gekochte chocoladeletters, dan zou de standaardafwijking 0,08 g zijn." Hoeveel letters heeft mevrouw van Bol gekocht?
g) Een overspannen leraar Managementvaardigheden neemt in een vlaag van verstandsverbijstering van elk van de tien letters van de heer Blauw een hap. Het gewicht dat deze docent afbijt van de letters is Norm(20,5) verdeeld. De heer Blauw neemt vervolgens willekeurig een letter uit de stapel. Wat is de kans dat het gewicht van deze letter tussen 170 en 180 gram ligt?

1. Kansrekening & Statistiek Wiskunde B HTV klas 6

Hypothesetoetsen

7. Voer de volgende toetsen uit

a) Jantina beweert dat de uitspraak “Jelle Klaassen raakt 5 op de 8 keer triple twintig” niet klopt. Zij denkt namelijk dat hij minder kans heeft. Ze kiest een significantieniveau van 5%, doet een steekproef van 80 pogingen en noteert 43 successen. Krijgt ze gelijk?

b) Karla heeft in de krant gelezen dat in april in De Bilt de zon gemiddeld 158,2 uur schijnt (met een standaardafwijking van 39,5). Dat lijkt haar te weinig. Ze gaat ervan uit dat de verdeling van de zonneschijnduur normaal verdeeld is en ze neemt een significantieniveau van 10%. Als ze gedurende de komende maand april meet dat de zon 210 uur schijnt, verwerpt ze dan de uitspraak uit de krant?

c) Een vulmachine die literpakken moet vullen heeft een standaardafwijking van 0,12 liter. Een keer per dag wordt een controle gehouden of de machine nog steeds gemiddeld 1 liter in een pak doet. Er wordt dan een steekproef van 50 pakken genomen en daarvan wordt de gemiddelde inhoud bepaald. Bepaal met een significantieniveau van 5% of de machine goed staat afgesteld als het steekproefgemiddelde 1,032 liter is. Bepaal met een significantieniveau van 10% of de machine goed staat afgesteld als het steekproefgemiddelde 0,975 liter is.

2. Goniometrie & krommen - Wiskunde B HTV klas 6

GONIOMETRIE herhaling klas 5

1. Vul de tabel in

x	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$
sin *x*									
cos *x*									
tan *x*									

2. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van de gegeven functie *f*(*x*) in het punt (*a*, *f*(*a*))

a) $f(x) = 2\sin x$, $a = ½\pi$
b) $f(x) = 4x + 2\tan x$, $a = ¼\pi$
c) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$, $a = ½\pi$
d) $f(x) = \cos^2 x$, $a = ¼\pi$

3. Bepaal $\int_a^b f(x)dx$ in de volgende gevallen.

a) $f(x) = \sin x$, $a = 0$ en $b = 2\pi$
a) $f(x) = 4\cos 5x$, $a = 0$ en $b = ½\pi$
a) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ $a = 4$ en $b = 7$
a) $f(x) = \cos x(1+\tan x)$ $a = \frac{1}{3}\pi$ en $b = \frac{5}{6}\pi$

Parameterkrommen

4. Beantwoord de vragen over de kromme

$$K=\begin{cases} x = \sin 3t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$$

a) Bepaal de periode van de kromme.
b) Bepaal de punten met verticale en horizontale raaklijn.
c) Bepaal de keerpunten.

5. Het reuzenrad

We bekijken een reuzenrad met een straal van 10m. Het laagste punt passeert op 1m boven de grond.

a) Beredeneer dat de kromme $R=\begin{cases} x = 10\sin t \\ y = 11 + 10\cos t \end{cases}$ een juiste voorstelling is van de beweging die een gondel in dit reuzenrad maakt. Hierin zijn *x* en *y* in meters en *t* in minuten.
b) Bepaal de helling van de raaklijn aan deze kromme in het punt dat hoort bij tijdstip $t=¼\pi$
c) Toon aan dat voor deze kromme geldt: $\frac{dy}{dx} = -\tan t$
d) We vragen ons af hoe snel een gondel beweegt in dit rad. Toon algebraïsch aan dat een gondel met constante snelheid beweegt.
e) Hoe lang doe je over een rondje?
f) Wat moet je aan de parametervoorstelling van opgave a) veranderen zodat een rondje vier minuten duurt?
g) Wat moet je aan de parametervoorstelling veranderen om het rad andersom te laten draaien?

2. Goniometrie & krommen - Wiskunde B HTV klas 6

6. Het kanon

In deze opgave schieten we een kanon af. De baan van de kogel hangt af van de hoek α waarin het kanon wordt ingesteld.
Bij de kogelbaan hoort de volgende parametervoorstelling

$$K=\begin{cases} x = 50t\cos\alpha \\ y = -5t^2 + 50t\sin\alpha \end{cases}$$

a) Bepaal hoever de kanonskogel aflegt in horizontale richting als de hoek α wordt ingesteld op $\frac{1}{3}\pi$.

b) Bepaal welke hoek je moet instellen om de kogel zover mogelijk te laten komen.

7. Een stukje parabool (parameterkrommen en gonioformules)
Een kromme is gegeven door de voorstelling

$$K=\begin{cases} x = \sin(t) \\ y = \cos(2t) \end{cases}$$

a) Bepaal de snijpunten met de assen en de keerpunten
b) Bepaal de helling in de keerpunten
c) Bepaal het punt of de punten op de kromme met een horizontale raaklijn
d) Bepaal het punt of de punten op de kromme waar de raaklijn helling -2 heeft.
e) De kromme ligt precies op een parabool. Wat is de formule van die parabool?

Omwentelingslichamen

8. Gegeven een vlakdeel *V*. Het omwentelingslichaam *P* ontstaat door het vlakdeel *V* te wentelen om de *x*-as en het omwentelingslichaam *Q* ontstaat door vlakdeel *V* te wentelen om de *y*-as. Bereken de inhoud van *P* en van *Q* als

a) vlakdeel *V* wordt ingesloten door $f(x)=\sqrt{x}$, *x*=0, *x*=9 en de x-as

b) vlakdeel *V* wordt ingesloten door $f(x)=\dfrac{4+4x}{x}$ en *y*=9 - *x*

c) vlakdeel *V* wordt ingesloten door $f(x)=8-\frac{1}{2}x^4$ en de positieve *x*-as

2. Goniometrie & krommen - Wiskunde B HTV klas 6

9. Wentelen van krommen

Gegeven de kromme

$$K=\begin{cases} x=\cos(2t) \\ y=-\sin(-t) \end{cases}$$

a) Geef de periode van *K* en het bereik van *x* en van *y.*

b) Geef een schets van *K*.

c) Bepaal de snijpunten met de assen en de keerpunten.

d) Bepaal de helling in de keerpunten en in het snijpunt met de positieve *y*-as.

e) Toon aan dat alle punten van *K* liggen op de kromme met vergelijking $x=1-2y^2$.

Het oppervlak dat wordt ingesloten door *K* en de *y*-as noemen we *V. M* is het omwentelingslichaam dat ontstaat als *V* om de *x*-as wordt gewenteld. *N* is het omwentelingslichaam dat ontstaat als *V* om de *y*-as wordt gewenteld.

f) Bereken de oppervlakte van *V* en de inhoud van *M* en *N.*

Gonioformules

10. Toon aan dat

a) $\tan a+\tan b=\dfrac{2\sin(a+b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)}$

b) $\dfrac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)}=\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{\tan(a)-\tan(b)}$

c) $3\sin\alpha-\sin 3\alpha=2\sin\alpha(1-\cos 2\alpha)$

d) $\sin(2\alpha+\beta)=2\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta$

3. Analyse - Wiskunde B HTV klas 6

1. **Bepaal exact de extreme waarden en asymptoten van**

a) $f(x) = 2x + 4 + \dfrac{8}{x}$

b) $g(x) = \dfrac{12x^2 - 10x + 5}{2x - 1}$

c) $h(x) = \ln(3x - 6) - x$

2. **Differentieer**

a) $f(x) = 6 \cdot (5x - 4)^3$

b) $g(x) = \dfrac{2}{3x + 4}$

c) $h(x) = \dfrac{4x^5 - x \cdot \sqrt[3]{x}}{3x^2}$

3. **Primitiveer**

a) $f(x) = \left(2x - x^{-2}\right) \cdot 3\sqrt{x}$

b) $g(x) = 45 \cdot (6x - 7)^8$

4. **Werken met parameters**

a) Gegeven $f(x) = \sqrt{16 - ax}$ met $a > 0$

Voor welke a is de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f, de y-as en de x-as gelijk aan 32?

b) Gegeven $f(x) = -x^4 + px^2$ met $p > 0$

Voor welke p is de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f en de x-as gelijk aan 64,8?

WB HTV klas 6 – Antwoorden Kansrekening en Statistiek

1.

Neem X = aantal antwoorden goed gegokt
n = aantal gestelde vragen

p = gokkans per vraag = $\dfrac{1}{\text{aantal antwoordmogelijkheden per vraag}}$

a) Er geldt in dit geval n = 40 en p = 0,25
We zoeken de k waarvoor geldt dat P ($X \geq k$) < 0,05
P ($X \geq k$) = 1 – P($X \leq k$ - 1)
GRM: Y1 = 1 – binomcdf(40, 0.25, X-1)
Met TABLE vind je

X	$Y1$
14	0,1032
15	0,0544
16	0,0262

Als dus de grens ligt op 16 goede antwoorden dan is de kans dat je slaagt door louter gokken minder dan 5%.

b) Er geldt in dit geval n = 40 en p = ?
We zoeken de p waarvoor geldt dat P ($X \geq 20$) < 0,05
P ($X \geq 20$) = 1 – P($X \leq$ 19)
GRM: Y1 = 1 – binomcdf(40, X, 19)
Niet schrikken van de errors in je TABLE: X is nu een kans en moet dus tussen 0 en 1 liggen.
Met TABLE vind je

X	$Y1$
1/2	0,5627
1/3	0,0214
1/4	0,0005

Als dus de gokkans per vraag 1/3 is dan is de kans dat je slaagt door louter gokken minder dan 5%. Er moeten dus per vraag 3 antwoordmogelijkheden gegeven worden.

c) Er geldt in dit geval n = ? en p = 0,25
We zoeken de k waarvoor geldt dat P ($X \geq k$) < 0,05
Het aantal gestelde vragen is dan $n = 2k$
P ($X \geq k$) = 1 – P($X \leq k$ - 1)
GRM: Y1 = 1 – binomcdf(2X, 0.25, X-1)
Met TABLE vind je

X	$Y1$
5	0,0781
6	0,0544
7	0,0383
8	0,0271

Als k = 6 dan is de kans dat je slaagt door louter gokken minder dan 5%. Dus als er 2*6 = 12 vragen gesteld worden.

2.

a) U is niet binomiaal verdeeld omdat U niet het aantal successen telt.

b) Neem bijvoorbeeld X = het aantal cijfers goed geraden. Dan is $X \sim$ Bin (n, 0,1).

c) X is Binomiaal verdeeld dus het verwachte aantal cijfers goed is
E(X) = $n \cdot p$ = 0,1 n
Per goed cijfer krijg je tien euro uitbetaald, dus de verwachte uitbetaling is
10 · 0,1 n = n. De verwachte uitbetaling is dus vijf euro als de te raden cijferreeks bestaat uit 5 cijfers.

WB HTV klas 6 – Antwoorden Kansrekening en Statistiek

3.

a)

x	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	0,3756	0,4623	0,1486	0,0132	0,0002

Voer 0 t/m 4 in bij L1, en de kansen bij L2. Geef vervolgens de opdracht 1-Var Stats L1,L2. $E(X)=0{,}8$ rode ballen en $\sigma(X)=0{,}734$

b)

y	-12	-5	2	9
$P(Y=y)$	0,008	0.096	0,384	0,512

$E(Y)=4{,}80$ euro
$\sigma(Y)=4{,}85$ euro

c) $Z=Y+20$ dus $E(Z) = E(Y)+20 = 24{,}80$ euro en $\sigma(Z)=\sigma(Y)=4{,}85$ euro

d)

q	1	2	3	4	5
$P(Q=q)$	0,8	0,168	0,028	0,003	0,0002

$E(Q)=1{,}23$
$\sigma(Q)=0{,}51$

e) $R = 10*Q$ dus $E(R)=10*E(Q)=12{,}3$ en $\sigma(R)=10*\sigma(Q)=5{,}1$

f) $S= Q_1+ Q_2+ Q_3+ Q_4+ Q_5$ dus $E(S)=5*E(Q)=6{,}15$ en $\sigma(S)=\sqrt{5}*E(Q)=2{,}75$
$T=S/5$ dus $E(T)=E(S)/5=5*E(Q)/5=E(Q)=1{,}23$ en
$\sigma(T)= \sigma(S)/5=\sqrt{5}*E(Q)/5=E(Q)/\sqrt{5}=0{,}55$

Wijzigingen: door een tikfout was het niet goed mogelijk om de opgave 4e) en opgave 5) te maken. Dit is hierboven reeds hersteld: bij opgave 4e) moest 11 eigenlijk 10 zijn. Bij opgave 5 moest Norm(1,0) eigenlijk Norm(0,1) zijn.

4.

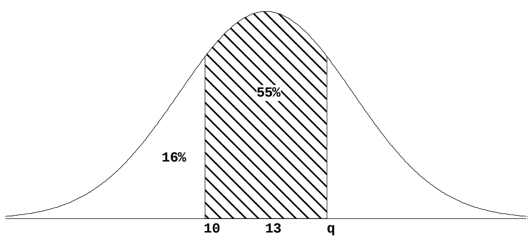
a) $P(X \le 13)$ = normalcdf(-100,13,12,2) = 0,691
$P(12 \le X \le 14)$ = normalcdf(12,14,12,2) = 0,341

b) a = invNorm(0.80,8,0.2) = 8,17

c) b = invNorm(0.40,110,10) = 107,5

d) $P(36 \le X \le 40) = P(X \le 40) - P(X \le 36)$
= binomcdf(120, 0.3, 40) – binomcdf(120, 0.3, 36) = 0,27

e)



MAAK EEN SCHETS!!!
Je weet dat 10 precies één standaardafwijking minder is dan de verwachtingswaarde, dus je weet dat de kans op 10 of minder 16% is. Dus de kans op minder dan q is 16+55=71%.
q = invNorm(0.71, 13, 3) = 14,7

5.

a) $P(Z \le 1{,}5)$ = normalcdf(-100, 1.5, 0, 1) = 0,933
$P(X \le 15)$ = normalcdf(-100, 15, 12, 2) = 0,933
In beide gevallen bereken je de kans op een realisatie van hoogstens 1,5 standaardafwijking boven de verwachtingswaarde.
Omdat $E(Z) = 0$ en $\sigma(Z)=1$ geldt $P(Z \le a)$ = P(Z is hoogstens a)
= P(Z ligt hoogstens $a \cdot 1$ boven 0)
= P(Z ligt hoogstens a maal de standaardafwijking boven de verwachtingswaarde)

b) $P(X \le 11{,}5) = P(X \le 12-0{,}25\cdot 2) = P(X \le \mu - 0{,}25\sigma) = P(Z \le -0{,}25)$

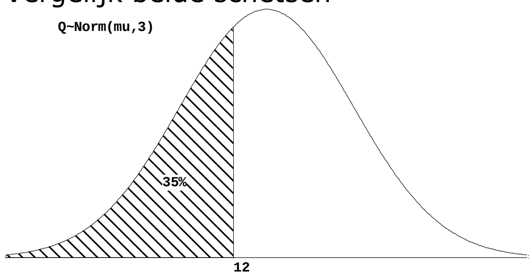
c) $P(Z \le z) = P(Y \le \mu + z \cdot \sigma) = P(Y = y)$

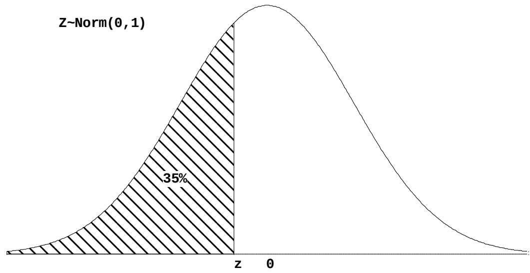
$y = \mu + z \cdot \sigma$

$y - \mu = z \cdot \sigma$

$z = \dfrac{y - \mu}{\sigma}$

d) Vergelijk beide schetsen





Bereken eerst z = invNorm(0.35, 0, 1) = -0,385. Hieruit volgt dat

P(Q is hoogstens de verwachtingswaarde min 0,385 standaardafwijkingen) = 0,35

Dus $12 = \mu - 0{,}385\sigma$

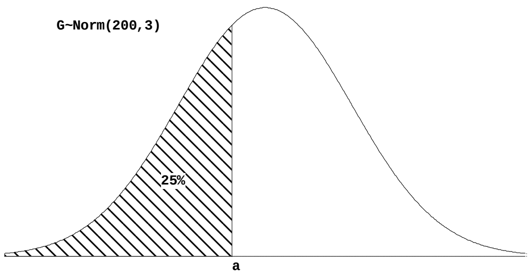
$12 = \mu - 0{,}385 \cdot 3$

$\mu = 12 + 0{,}385 \cdot 3 = 13{,}2$

6.

a) P(G afgerond 198 gram) = P(197,5 ≤ G ≤ 198,5)
= normalcdf(197.5, 198.5, 200, 3) = 0,106

b)



zie schets

a = invNorm(0.25, 200, 3) = 197,98

dus de 25% lichtste exemplaren wegen hoogstens 197,98 gram

c) E($\overline{G}$) = E(G) = 200 en $\sigma(\overline{G}) = \dfrac{\sigma(G)}{\sqrt{n}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}} = 0{,}95$

d) P($\overline{G}$ >200)=normalcdf(200,1000,200,3/√10)=0,5

e) Neem p = P(een willekeurige letter weegt minder dan 197,5 gram) = normalcdf(-100,197.5,200,3) = 0,202.
Er wordt tien keer een letter gekocht, steeds is de kans dat deze te licht is, is steeds hetzelfde. Dus er is sprake van herhaling van hetzelfde experiment en dus is n = 10.
Neem X = aantal letters dat te licht is, dan X ~ Bin (10; 0,202).
P(3 lichte letters) = binompdf(10, 0.202, 3) = 0.204

f) $\sigma(\overline{G}) = \dfrac{\sigma(G)}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow 0{,}08 = \dfrac{3}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \sqrt{n} = \dfrac{3}{0{,}08} \Leftrightarrow n = \left(\dfrac{3}{0{,}08}\right)^2 = 1406$

Mevrouw van Bol zou dan het idiote aantal van 1406 letters gekocht hebben!

g) Neem A=afgebeten gewicht en N=nieuw gewicht, dan geldt $N = G - A$.
Omdat beide stochasten onafhankelijk zijn geldt

E(N)=E(G)-E(A)=200-20 en $\sigma(N) = \sqrt{\sigma^2(G) + \sigma^2(A)} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$

P(170 ≤ N ≤ 180) = normalcdf(170,180,180,√34)=0,457

WB HTV klas 6 – Antwoorden Kansrekening en Statistiek

7.

a) H_0: $p = 5/8$ H_1: $p < 5/8$ $\alpha = 5\%$ $n = 80$ $X = 43$
Als stochast X de steekproefuitkomst voorstelt, dan geldt onder H_0 dat X~Bin(80,5/8) en P(X≤43) = binomcdf(80, 5/8, 43) = 0.068 > α. De nulhypothese wordt niet verworpen en ze krijgt dus geen gelijk.

b) H_0: $\mu = 158,2$ H_1: $\mu > 158,2$ $\alpha = 10\%$ $n = 1$ $X = 210$
(N.B. Hier wordt een steekproef van maar één maand gedaan)
Als stochast X de steekproefuitkomst voorstelt, dan geldt onder H_0 dat X~Norm(158,2;39,5) en P(X≥210) = normalcdf(210,1000, 158.2, 39.5) = 0.095 < α. De nulhypothese wordt dus verworpen en Karla verwerpt de uitspraak uit de krant.

c) H_0: $\mu = 1$ H_1: $\mu \neq 1$ $\alpha = 5\%$ $n = 50$ $X = 1,032$
(N.B. Hier wordt een tweezijdige toets gedaan)
Als stochast X de steekproefuitkomst voorstelt, dan geldt onder H_0 dat
$\overline{X}$ ~Norm(1; $\frac{0,12}{\sqrt{50}}$) en

P($\overline{X}$ ≥1,22) = normalcdf(1.032,100, 1, 0.12/√50) = 0.030 > ½α = 2,5%.
De nulhypothese wordt dus niet verworpen.

H_0: $\mu = 1$ H_1: $\mu \neq 1$ $\alpha = 10\%$ $n = 50$ $X = 0,975$
(N.B. Hier wordt een tweezijdige toets gedaan)
Als stochast X de steekproefuitkomst voorstelt, dan geldt onder H_0 dat X
$\overline{X}$ ~Norm(1; $\frac{0,12}{\sqrt{50}}$) en

P($\overline{X}$ ≤0,82) = normalcdf(-100, 0.975, 1, 0.12/√50) = 0.07 > ½α = 5%. De nulhypothese wordt dus niet verworpen.

WB HTV klas 6 – Antwoorden Goniometrie en krommen

1.

x	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$
sin x	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1
cos *x*	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
tan *x*	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

2.

a) $y = 2$

b) $y = 8x + 2 - \pi$ (zie formulekaart voor afgeleide van tan x)

c) $y = 1$ (is jouw afgeleide gelijk aan $f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$???)

d) $y = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\pi$

3.

a) 0 **b)** $\frac{4}{5}$ **c)** 3 **d)** 1

4.

a) periode x: $\frac{2}{3}\pi$, periode y: π , dus periode K: 2π

NB: Ga na waarom de periode van $y = \cos^2 t$ niet 2π is maar π

b)c) Eerst nulpunten van de afgeleiden van x en y bepalen

$$\frac{dx}{dt} = 3\cos 3t$$

Los op: $3\cos 3t = 0$

$$\cos 3t = 0$$

$$3t = \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$$

$$t = \tfrac{1}{6}\pi + k \cdot \tfrac{1}{3}\pi$$

$$\frac{dy}{dt} = 2\cos t \cdot -\sin t = -2\sin t \cdot \cos t$$

Los op: $-2\sin t \cdot \cos t = 0$

$\sin t = 0$ of $\cos t = 0$

$t = 0 + k \cdot \pi$ of $t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$

$t = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} \neq 0; \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow$ horizontale raaklijn in (0,1)

$t = \frac{1}{6}\pi \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 0; \frac{dy}{dt} \neq 0 \Rightarrow$ verticale raaklijn in $(1, \frac{3}{4})$

$t = \frac{1}{2}\pi \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 0; \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow$ keerpunt in (-1,0)

$t = \frac{5}{6}\pi \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 0; \frac{dy}{dt} \neq 0 \Rightarrow$ verticale raaklijn in $(1, \frac{3}{4})$

$t = \pi \Rightarrow \frac{dx}{dt} \neq 0; \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow$ horizontale raaklijn in (0,1)

$t = 1\frac{1}{6}\pi \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 0; \frac{dy}{dt} \neq 0 \Rightarrow$ verticale raaklijn in $(-1, \frac{3}{4})$

$t = 1\frac{1}{2}\pi \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 0; \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow$ keerpunt in (1,0)

$t = 1\frac{5}{6}\pi \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 0; \frac{dy}{dt} \neq 0 \Rightarrow$ verticale raaklijn in $(-1, \frac{3}{4})$

5.

a) Volgens de definitie is sin t de y-coördinaat van een punt op de eenheidscirkel en cos t de x-coördinaat. Door deze te verwisselen, blijft er sprake van een cirkel. De vermenigvuldiging met 10 levert een grotere straal op en de verticale verschuiving met 11 zorgt ervoor dat het middelpunt van de cirkel op hoogte 11 komt te liggen waardoor het laagste punt van de cirkel op hoogte 1 terecht komt.

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-10\sin t}{10\cos t}$; voor $t = \frac{1}{4}\pi$ geldt $\frac{dy}{dx} = \frac{-10\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}}{10\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}} = -1$

de helling is dus -1

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{-10\sin t}{10\cos t} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\tan t$

d) baansnelheid =

$\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2} = \sqrt{(10\cos t)^2 + (-10\sin t)^2} = \sqrt{100\cos^2 t + 100\sin^2 t}$

$= \sqrt{100(\cos^2 t + \sin^2 t)} = \sqrt{100\cdot 1} = 10$

dus constant.

e) De periode is 2π dus 6,28 minuten

f) Om periode 4 te krijgen, los op: $\frac{2\pi}{c} = 4 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}\pi$ dus R= $\begin{cases} x = 10\sin\frac{1}{2}\pi t \\ y = 11 + 10\cos\frac{1}{2}\pi t \end{cases}$

g) Twee van de mogelijke antwoorden:

R= $\begin{cases} x = 10\cos t \\ y = 11 + 10\sin t \end{cases}$ en R= $\begin{cases} x = -10\sin t \\ y = 11 - 10\cos t \end{cases}$

6.

a) Los op: $-5t^2 + 50t \sin\alpha = 0$; $-5t^2 + 50t \cdot 0{,}5\sqrt{3} = 0$; $-5t(t - 5\sqrt{3}) = 0$; t=0 of t=5√3; Het gaat natuurlijk om de tweede oplossing. Invulling in x geeft x=50*0,5√3*cos$\frac{1}{3}\pi \approx$216,5 m

b) Wanneer raakt de kogel de grond?
Los op: $-5t^2 + 50t \sin\alpha = 0$; $-5t(t - 10\sin\alpha) = 0$; t=0 of t= 10 sin α
Hoever is de kogel dan gekomen? Vul t=10 sin α in in de formule van x.
$s(\alpha) = 50\cdot 10\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 500\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
Het maximum van s vind je via het nulstellen van de afgeleide. Ga na dat de kogel het verst komt (250 meter) als je kiest voor een hoek van $\alpha = \frac{1}{4}\pi$

7.

a) snijpt (0,1), ($\frac{1}{2}\sqrt{2}$,0) en (-$\frac{1}{2}\sqrt{2}$,0) keerpt (-1,-1) en (1,-1)

b) 4 en -4

c) (0,1)

d) $\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2\sin 2t}{\cos t} = -2$

Als je het hoofdstuk over goniometrische formules hebt doorgewerkt, kun je deze vergelijking exact oplossen. Gebruik anders je GRM.

$\frac{-2\sin 2t}{\cos t} = -2$

$\frac{\sin 2t}{\cos t} = 1$

$\frac{2\sin t\cos t}{\cos t} = 1$

$2\sin t = 1$

$\sin t = \frac{1}{2}$

$t = \frac{1}{6}\pi + k\cdot 2\pi \text{ of } t = \frac{5}{6}\pi + k\cdot 2\pi$

De gevraagde punten zijn dus $K_{t=\frac{1}{6}\pi}(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ en $K_{t=\frac{1}{6}\pi}(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

e) $y=\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t = 1 - 2\cdot(\sin t)^2 = 1 - 2x^2$

WB HTV klas 6 – Antwoorden Goniometrie en krommen

8.
a) **uitwerkingen in apart bestand (zie website)**

9.
a) per $x = \pi$, per $y = 2\pi$ dus per $K = 2\pi$
$B_x=[-1,1]$, $B_y=[-1,1]$
b)
c) snijpt x-as via $y=0$
$-\sin(-t) = 0 \Rightarrow -t = 0 + k \cdot \pi \Rightarrow t = 0 + k \cdot \pi$
snijpt y-as via $x=0$
$\cos(2t) = 0 \Rightarrow 2t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \Rightarrow t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$
snijpunten assen:
$K_{t=0}(1,0); K_{t=\pi}(1,0); K_{t=\frac{1}{4}\pi}(0,\frac{1}{2}\sqrt{2}); K_{t=\frac{3}{4}\pi}(0,\frac{1}{2}\sqrt{2}); K_{t=\frac{5}{4}\pi}(0,-\frac{1}{2}\sqrt{2}); K_{t=\frac{7}{4}\pi}(0,-\frac{1}{2}\sqrt{2})$

keerpunten:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -2\sin 2t \Rightarrow -2\sin 2t = 0 \Rightarrow 2t = 0 + k \cdot \pi \Rightarrow t = 0 + k \cdot \frac{1}{2}\pi \\ \frac{dy}{dt} = \cos(-t) \Rightarrow \cos(-t) = 0 \Rightarrow -t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \Rightarrow t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \end{array}\right\} K_{t=\frac{1}{2}\pi}(-1,1) \quad en \quad K_{t=1\frac{1}{2}\pi}(-1,-1)$$

d) Bepaal $\dfrac{dy/dt}{dx/dt}$ voor $t = \frac{1}{2}\pi + 0{,}01$ en voor $t = 1\frac{1}{2}\pi + 0{,}01$. Dit geeft helling -0,25 en 0,25 in de keerpunten.
Bepaal $\dfrac{dy/dt}{dx/dt}$ voor $t = \frac{1}{4}\pi$. Dit geeft helling = $\dfrac{\cos(-\frac{1}{4}\pi)}{-2\sin(\frac{1}{2}\pi)} = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{-2} = -\frac{1}{4}\sqrt{2}$ in het snijpunt met de positieve y-as.
e) $x = \cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t) = 1 - 2 \cdot (\sin(t))^2 = 1 - 2y^2$
f) opp $V = \int_{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} 1 - 2y^2 dy = [y - \frac{2}{3}y^3]_{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$

$$\sum schijfjes\ NAAST\ elkaar = \sum \pi r^2 \cdot h = \sum \pi y^2 \cdot \Delta x = \pi \sum y^2 \cdot \Delta x = \pi \sum (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}x)\Delta x$$

(want $x=1-2y^2$ dus $2y^2 = 1-x$ en $y^2 = ½-½x$)

Inhoud $M = \pi \int_0^1 (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x)dx = \pi \cdot [\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2]_0^1 = \frac{1}{4}\pi$

$$\sum schijfjes\ OP\ elkaar = \sum \pi r^2 \cdot h = \sum \pi x^2 \cdot \Delta y = \pi \sum x^2 \cdot \Delta y = \pi \sum (1 - 2y^2)^2 \Delta x = \pi \sum (1 - 4y^2 + 4y^4)\Delta y$$

Inhoud $N = \pi \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} (1 - 4y^2 + 4y^4)dy = \pi \cdot [y - \frac{4}{3}y^3 + \frac{4}{5}y^5]_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{4}{5}\pi\sqrt{2}$

10.
a) er geldt:

$$\tan a + \tan b = \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} + \frac{\cos a \sin b}{\cos a \cos b} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b}$$

tevens geldt:

$$\frac{2\sin(a+b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)} = \frac{2(\sin a\cos b+\cos a\sin b)}{\cos a\cos b-\sin a\sin b+\cos a\cos b+\sin a\sin b} =$$

$$\frac{2(\sin a\cos b+\cos a\sin b)}{2\cos a\cos b} = -\frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b}$$

conclusie: $\tan a+\tan b = \dfrac{2\sin(a+b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)}$

b) Er geldt: $\dfrac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \dfrac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\sin a\cos b-\cos a\sin b}$

Tevens geldt: $\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{\tan(a)-\tan(b)} = \dfrac{\frac{\sin a}{\cos a}+\frac{\sin b}{\cos b}}{\frac{\sin a}{\cos a}-\frac{\sin b}{\cos b}} = \dfrac{\frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b}}{\frac{\sin a\cos b-\cos a\sin b}{\cos a\cos b}} = \dfrac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\sin a\cos b-\cos a\sin b}$

Conclusie: $\dfrac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{\tan(a)-\tan(b)}$

c) Er geldt:

$3\sin\alpha-\sin3\alpha = 3\sin\alpha-\sin(\alpha+2\alpha) = 3\sin\alpha-(\sin\alpha\cos2\alpha+\cos\alpha\sin2\alpha) =$

$3\sin\alpha-\sin\alpha\cos2\alpha-\cos\alpha\sin2\alpha = 3\sin\alpha-\sin\alpha\cos2\alpha-\cos\alpha\cdot2\sin\alpha\cos\alpha =$

$3\sin\alpha-\sin\alpha\cos2\alpha-2\sin\alpha\cos^2\alpha = 3\sin\alpha-\sin\alpha(2\cos^2\alpha-1)-2\sin\alpha\cos^2\alpha =$

$3\sin\alpha-2\sin\alpha\cos^2\alpha+\sin\alpha-2\sin\alpha\cos^2\alpha = 4\sin\alpha-4\sin\alpha\cos^2\alpha$

Tevens geldt:

$2\sin\alpha(1-\cos2\alpha) = 2\sin\alpha(1-(2\cos^2\alpha-1)) = 2\sin\alpha(2-2\cos^2\alpha) = 4\sin\alpha-4\sin\alpha\cos^2\alpha$

Conclusie:

$3\sin\alpha-\sin3\alpha = 2\sin\alpha(1-\cos2\alpha)$

d) Er geldt:

$\sin(2\alpha+\beta) = \sin2\alpha\cos\beta+\cos2\alpha\sin\beta = 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta+(2\cos^2\alpha-1)\sin\beta =$

$2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta+2\cos^2\alpha\sin\beta-\sin\beta$

Tevens geldt:

$2\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta = 2\cos\alpha(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)-\sin\beta =$

$2\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta+2\cos^2\alpha\sin\beta-\sin\beta$

$= 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta+2\cos^2\alpha\sin\beta-\sin\beta$

Conclusie:

$\sin(2\alpha+\beta) = 2\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta$

WB HTV klas 6 – Antwoorden Analyse

1.

a) maximum $f(-2)=-4$ en minimum $f(2)=12$
VA: $x=0$ SA: $y=2x+4$

b) maximum $g(0)=-5$ en minimum $g(1)=7$
VA: $x=\frac{1}{2}$ SA: $y=6x-2$

c) maximum $h(3)=\ln 3 - 3$
VA: $x=2$

N.B. Let op! Geef getallen als we vragen om extreme waarden en punten als we vragen om toppen!

2.

a) $f'(x)=90(5x-4)^2$

b) $g'(x)=-\dfrac{6}{(3x+4)^2}$

c) $h'(x)=4x^2+\dfrac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$

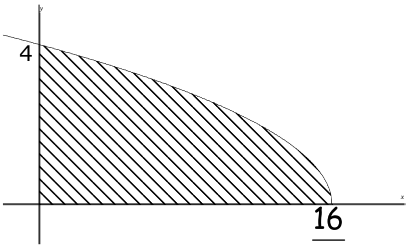
3.

a) $F(x)=2{,}4x^2\sqrt{x}+\dfrac{6}{\sqrt{x}}$

b) $G(x)=\frac{5}{6}(6x-7)^9$

4.

a) schetsje



$\dfrac{16}{a}$

Los op: $\sqrt{16-ax}=0 \Rightarrow ax=16 \Rightarrow x=\dfrac{16}{a}$

Opp vlakdeel:

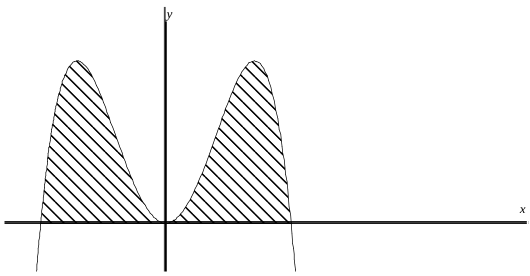
$$\int_0^{\frac{16}{a}}(16-ax)^{\frac{1}{2}}\,dx=\left[\frac{2}{3}(16-ax)^{1\frac{1}{2}}\cdot-\frac{1}{a}\right]_0^{\frac{16}{a}}=\left[-\frac{2}{3a}(16-ax)\sqrt{16-ax}\right]_0^{\frac{16}{a}}=$$

$$\left(-\frac{2}{3a}(16-a\cdot\frac{16}{a})\sqrt{16-a\cdot\frac{16}{a}}\right)-\left(-\frac{2}{3a}(16-0)\sqrt{16-0}\right)=$$

$$\left(-\frac{2}{3a}(16-16)\sqrt{16-16}\right)-\left(-\frac{2}{3a}\cdot16\cdot4\right)=\frac{128}{3a}$$

Los op: $\dfrac{128}{3a}=32 \Rightarrow 128=96a \Rightarrow a=\dfrac{128}{96}=\dfrac{4}{3}$

b) schetsje:



WB HTV klas 6 – Antwoorden Analyse

Bepaal snijpunten x-as
Los op: $-x^4 + px^2 = 0 \Rightarrow -x^2(x^2 - p) = 0 \Rightarrow x = 0 \; of \; x = -\sqrt{p} \; of \; x = \sqrt{p}$

Opp vlakdeel:
$\int_{-\sqrt{p}}^{\sqrt{p}} -x^4 + px^2 dx = \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}px^3\right]_{-\sqrt{p}}^{\sqrt{p}} = \left(-\frac{1}{5}p^2\sqrt{p} + \frac{1}{3}p \cdot p\sqrt{p}\right) - \left(-\frac{1}{5} \cdot -p^2\sqrt{p} + \frac{1}{3}p \cdot -p\sqrt{p}\right) =$
$-\frac{1}{5}p^2\sqrt{p} + \frac{1}{3}p^2\sqrt{p} - \frac{1}{5}p^2\sqrt{p} + \frac{1}{3}p^2\sqrt{p} = \frac{4}{15}p^2\sqrt{p}$

Los op:
$\frac{4}{15}p^2\sqrt{p} = 64{,}8 \Rightarrow p^2\sqrt{p} = 243 \Rightarrow p = 243^{\frac{2}{5}} = 9$