Hoofdstuk 1 - Exponentiële en logaritmische functies

Voorkennis: Exponenten en logaritmen

bladzijde 12

V-1a Elk jaar wordt het aantal heideblauwtjes vermenigvuldigd met een vast getal. Dit getal ligt tussen 0 en 1, dus is er sprake van exponentiële afname.

b $g_{\text{per jaar}} = 0,88$, $g_{\text{per 2 jaar}} = 0,88^2 = 0,77$

c $N(t) = b \cdot g^t = 75\,000 \cdot 0,88^t$

d $N(6) = 75\,000 \cdot 0,88^6 = 34\,830$ vlinders

e Opgelost moet worden $75\,000 \cdot 0,88^t = 10\,000$. Met de optie intersect van de GR volgt $t = 15,8$. Dus als het afnameproces op deze manier door blijft gaan zijn er in het jaar 2018 nog ongeveer $10\,000$ vlinders over zijn.

V-2a $g_{\text{per half uur}} = 2,3^{0,5} = 1,517$, $g_{\text{per kwartier}} = 2,3^{0,25} = 1,231$

b $g_{\text{per minuut}} = 2,3^{\frac{1}{60}} = 1,01398$

V-3a $g_{\text{per jaar}} = 1,035$, waaruit volgt $g_{\text{per 10 jaar}} = 1,035^{10} = 1,41$, dus de bevolking neemt in 10 jaar met 41% toe.

b $g_{\text{per 17 uur}} = 1,8$, waaruit volgt $g_{\text{per 6 uur}} = 1,8^{\frac{6}{17}} = 1,23$, dus de procentuele toename per 6 uur is 23%.

c $g_{\text{per 5 jaar}} = 2$, waaruit volgt $g_{\text{per 3 jaar}} = 2^{\frac{3}{5}} = 1,52$

bladzijde 13

V-4a $2^t = 3$, dus $t = {}^2\log 3 \approx 1,58$

b $5^{t+2} = 8$, waaruit volgt $t + 2 = {}^5\log 8$ en dus $t = {}^5\log 8 - 2 \approx -0,71$

c $3^{2t-1} = 7$, waaruit volgt $2t - 1 = {}^3\log 7$, dus $2t = {}^3\log 7 + 1$ en dus $t = \dfrac{{}^3\log 7 + 1}{2} \approx 1,39$

d $1 + 3 \cdot (\frac{1}{2})^t = 10$, waaruit volgt $3 \cdot (\frac{1}{2})^t = 9$ en dus $(\frac{1}{2})^t = 3$. Dit geeft $t = {}^{\frac{1}{2}}\log 3 \approx -1,58$

V-5a ${}^3\log 8 + {}^3\log 5 = {}^3\log(8 \cdot 5) = {}^3\log 40$

b ${}^2\log 18 - {}^2\log 3 = {}^2\log \dfrac{18}{3} = {}^2\log 6$

c ${}^3\log 6 + 2 \cdot {}^3\log 5 = {}^3\log 6 + {}^3\log 5^2 = {}^3\log(6 \cdot 5^2) = {}^3\log 150$

d $3 \cdot {}^3\log 4 - 2 \cdot {}^3\log 2 = {}^3\log 4^3 - {}^3\log 2^2 = {}^3\log \dfrac{4^3}{2^3} = {}^3\log 16$

V-6a ${}^2\log \frac{1}{4} = -2$, want $2^{-2} = \frac{1}{4}$

b ${}^{\frac{1}{2}}\log 4 = -2$, want $(\frac{1}{2})^{-2} = 4$

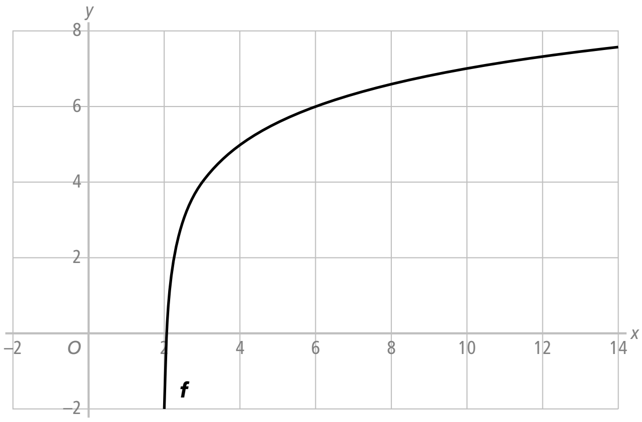
c ${}^{\frac{1}{4}}\log \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, want $(\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

d ${}^2\log 4\sqrt{2} = 2\frac{1}{2}$, want $2^{2\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2}$

e ${}^{0,5}\log 0,25 = 2$, want $0,5^2 = 0,25$

f ${}^8\log 4 = \frac{2}{3}$, want $8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$

V-7a



b Om de grafiek van de functie f te krijgen, moet je de grafiek van de functie g 4 omhoog en 2 naar rechts schuiven.

c $f(x)=0$ oplossen geeft $4+{}^{2}\log(x-2)=0$, waaruit volgt ${}^{2}\log(x-2)=-4$, dit geeft $x-2=2^{-4}=\frac{1}{16}$ en dus $x=2\frac{1}{16}$.

d $f(x)=3$ oplossen geeft $4+{}^{2}\log(x-2)=3$, waaruit volgt ${}^{2}\log(x-2)=-1$, dit geeft $x-2=2^{-1}=\frac{1}{2}$ en dus $x=2\frac{1}{2}$. De coördinaten van S zijn dus $(2\frac{1}{2},\ 3)$.

V-8a Invullen van $D=1{,}8$ meter in $\log D=-2+1{,}5\cdot\log H$ geeft $\log 1{,}8=-2+1{,}5\cdot\log H$, waaruit volgt $1{,}5\cdot\log H=2+\log 1{,}8$, dit geeft $\log H=\dfrac{2+\log 1{,}8}{1{,}5}=1{,}5035$ en dus $H=10^{1{,}5035}=31{,}88$ meter.

b Als de diameter 360 cm is, zou de hoogte 63,76 meter moeten zijn.
Invullen van $D=3{,}6$ meter in $\log D=-2+1{,}5\cdot\log H$ geeft $\log 3{,}6=-2+1{,}5\cdot\log H$, waaruit volgt $1{,}5\cdot\log H=2+\log 3{,}6$, dit geeft $\log H=\dfrac{2+\log 3{,}6}{1{,}5}=1{,}7042$ en dus $H=10^{1{,}7042}=50{,}61$ meter.
Conclusie: bomen met een twee maal zo grote diameter zijn niet twee maal zo hoog.

c $\log D=-2+1{,}5\cdot\log H=\log\frac{1}{100}+\log H^{1{,}5}=\log(\frac{1}{100}\cdot H^{1{,}5})$,
dus $D=\frac{1}{100}\cdot H^{1{,}5}$ met $p=\frac{1}{100}$ en $q=1{,}5$.

1.1 Een ander grondtal

bladzijde 14

1a $f_4(t)=2^{4t}=(2^4)^t=16^t$

b $2^a=8$ oplossen geeft $a={}^{2}\log 8=3$

c $2^a=\frac{1}{2}$ oplossen geeft $a={}^{2}\log\frac{1}{2}=-1$, $2^a=\sqrt{2}$ oplossen geeft $a=\frac{1}{2}$

d schatting: $2<a<3$, $2^a=7$ oplossen geeft $a={}^{2}\log 7\approx 2{,}8$

2a $0{,}5^a=5$ oplossen geeft $a={}^{0{,}5}\log 5\approx -2{,}32$, dus $f(t)=2\cdot 5^t=2\cdot(0{,}5^{-2{,}32})^t=2\cdot 0{,}5^{-2{,}32t}$

b $10^a=2{,}8$ oplossen geeft $a={}^{10}\log 2{,}8\approx 0{,}45$

c $h(t)=3\cdot 0{,}75^t$, $10^a=0{,}75$ oplossen geeft $a={}^{10}\log 0{,}75\approx -0{,}12$, dus $h(t)=3\cdot 10^{-0{,}12t}$
$k(t)=5\cdot(\frac{2}{3})^t$, $10^a=\frac{2}{3}$ oplossen geeft $a={}^{10}\log\frac{2}{3}\approx -0{,}18$, dus $k(t)=5\cdot 10^{-0{,}18t}$

d a heeft een negatieve waarde als $g<1$

bladzijde 15

3a $3^{2t}=5$ geeft $2t={}^{3}\log 5$ en dus $t=\frac{1}{2}\,{}^{3}\log 5\approx 0,73$

b $3\cdot 2^t=5$ geeft $2^t=\frac{5}{3}$ en dus $t={}^{2}\log\frac{5}{3}\approx 0,74$

c $2,3\cdot 0,7^t=1,8$ geeft $0,7^t=\dfrac{1,8}{2,3}$ en dus $t={}^{0,7}\log\left(\dfrac{1,8}{2,3}\right)\approx 0,69$

d $500\cdot 1,95^{t-1}=16\,000$ geeft $1,95^{t-1}=\dfrac{16\,000}{500}=32$ waaruit volgt $t-1={}^{1,95}\log 32$ en dus $t=1+{}^{1,95}\log 32\approx 6,19$

4a Groeifactor per 25 jaar is 2,7, dus groeifactor per jaar is $2,7^{\frac{1}{25}}\approx 1,04$

b $P(t)=b\cdot g^t=1,0\cdot 1,04^t=1,04^t$

c $1,04^T=2$ oplossen geeft $T={}^{1,04}\log 2\approx 17,7$ jaar

d $2^a=1,04$ geeft $a={}^{2}\log 1,04\approx 0,057$, dus $P(t)=1,0\cdot 2^{0,057t}=2^{0,057t}$

e $1,0\cdot 2^{at}=1,0\cdot 1,04^t$ geldt voor alle *t*, dus geldt ook voor de verdubbelingstijd *T*. $1,0\cdot 2^{aT}=1,0\cdot 1,04^T$ en daaruit volgt $2^{aT}=1,04^T=2$, (want *T* was de verdubbelingstijd bij groeifactor 1,04), dus geldt $aT=1$.

5a Periode $=\dfrac{2}{0,25}=8$ jaar.

b $\dfrac{2}{10}=0,2$, dus de formule wordt dan $N=10^{3,29\sin(0,2\,t)+5,18}$

c $N=2\cdot 10^{3,29\sin(0,2\,t)+5,18}$, $10^a=2$ oplossen geeft $a={}^{10}\log 2\approx 0,30$, dus $N=10^{0,30}\cdot 10^{3,29\sin(0,2\,t)+5,18}=10^{3,29\sin(0,2\,t)+5,18+0,30}=10^{3,29\sin(0,2\,t)+5,48}$

d Met de nieuwe formule is het maximum aantal konijnen veel kleiner, namelijk $N_{\max}=10^{2,18+5,18}=10^{7,36}\approx 23$ miljoen. (Met de oude formule was het maximum $N_{\max}=10^{3,29+5,18}=10^{8,47}\approx 295$ miljoen).

6a $f(t)=2^{at+b}=2^{-2t+0}=2^{-2t}=\left(2^{-2}\right)^t=\left(\frac{1}{4}\right)^t$. Dit is een exponentiële formule met groeifactor kleiner dan 1 (en groter dan 0), dus de grafiek van f daalt.

b 1. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^t=\left(2^{-1}\right)^t=2^{-t}$, dus $a=-1$ en $b=0$

2. $y=32\cdot 5^t=2^5\cdot\left(2^{{}^{2}\log 5}\right)^t=2^5\cdot 2^{{}^{2}\log 5\cdot t}=2^{{}^{2}\log 5\cdot t+5}$, dus $a={}^{2}\log 5\approx 2,32$ en $b=5$

3. $y=2^{{}^{2}\log 4,5}\cdot 2^{{}^{2}\log 0,6\cdot t}=2^{{}^{2}\log 0,6\cdot t+{}^{2}\log 4,5}$, dus $a={}^{2}\log 0,6\approx -0,74$ en $b={}^{2}\log 4,5\approx 2,17$

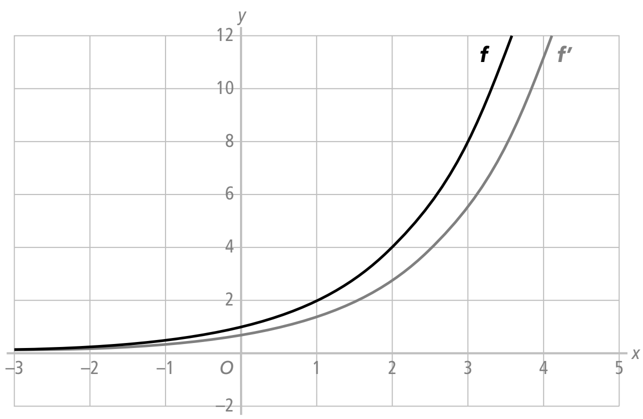
4. $y=3^{1-2t}=3^1\cdot 3^{-2t}=3\cdot\left(3^{-2}\right)^t=3\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^t=2^{{}^{2}\log 3}\cdot 2^{{}^{2}\log\frac{1}{9}\cdot t}=2^{{}^{2}\log\frac{1}{9}\cdot t+{}^{2}\log 3}$, dus

$a={}^{2}\log\frac{1}{9}\approx -3,17$ en $b={}^{2}\log 3\approx 1,585$.

1.2 Het getal e

bladzijde 16

7a



x	0	1	2	3	4	5
$\frac{dy}{dx}$	0,693	1,386	2,773	5,545	11,090	22,181

De hellingfunctie is zelf ook een exponentiële functie met groeifactor 2. (De helling wordt steeds met 2 vermenigvuldigd.)

b

x	0	1	2	3	4	5
$\frac{dy}{dx}$	0,693	1,386	2,773	5,545	11,090	22,181
$f'(x) \approx 0,69 \cdot f(x)$	0,69	1,38	2,76	5,52	11,04	22,08

De hellingfunctie komt redelijk goed overeen met $f'(x) \approx 0,69 \cdot f(x)$.

c $f'(x) \approx 0,69 \cdot f(x) \approx 0,69 \cdot 2^x$

8a $f(x) = 3^x$ en $f'(x) = 1,10 \cdot f(x)$, $h(x) = 0,7^x$ en $h'(x) = -0,36 \cdot h(x)$, $k(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en $k'(x) = -0,69 \cdot k(x)$, $m(x) = 1,3^x$ en $m'(x) = 0,26 \cdot m(x)$

b Er geldt $g > 1$ als $c_g > 0$ en $0 < g < 1$ als $c_g < 0$

9a $$\frac{f(x+0,001) - f(x)}{0,001} = \frac{g^{x+0,001} - g^x}{0,001} = \frac{g^x \cdot g^{0,001} - g^x}{0,001} = \frac{g^x(g^{0,001} - 1)}{0,001} = \frac{(g^{0,001} - 1)}{0,001} \cdot g^x$$

b $c_g \approx \dfrac{g^{0,001} - 1}{0,001}$

g	2	3	4	5	6	7
c_g	0,69	1,10	1,39	1,61	1,79	1,95

c

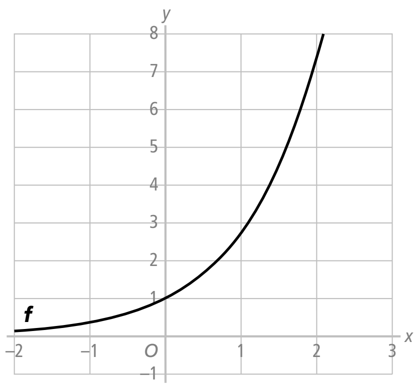
g	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2
c_g	0,79	0,88	0,96	1,03	1,10	1,16

$c_g \approx 1$ als $g \approx 2,72$

d $f(x) = g^x$, $f'(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$, dus als $c_g = 1$ zijn $f(x)$ en $f'(x)$ gelijk aan elkaar.

bladzijde 17

10a

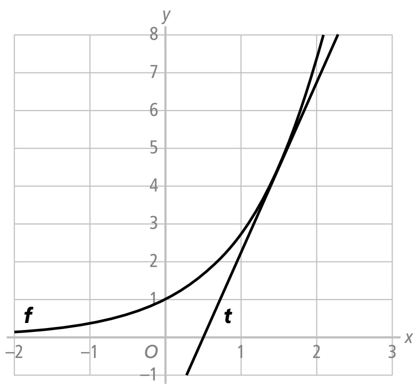


b $f(x)=2$ oplossen: $e^x = 2$ geeft $x = {}^{e}\log x$

$f(x)=3$ oplossen: $e^x = 3$ geeft $x = {}^{e}\log 3$

Conclusie: $2 \le f(x) \le 3$ als ${}^{e}\log 2 \le x \le {}^{e}\log 3$

c $f'(x) = e^x$, $f'(1{,}5) = e^{1{,}5}$



d $y = ax + b = e^{1{,}5}x + b$, invullen van het punt $(1{,}5; e^{1{,}5})$ geeft $e^{1{,}5} = e^{1{,}5} \cdot 1{,}5 + b$ en dus $b = e^{1{,}5} - 1{,}5 \cdot e^{1{,}5} = -0{,}5e^{1{,}5}$. Conclusie: de vergelijking van de raaklijn is $y = e^{1{,}5}x - 0{,}5e^{1{,}5} \approx 4{,}48x - 2{,}24$.

11a $f'(x) = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}$

b $f'(x) = e^{-2x} \cdot -2 = -2e^{-2x}$

c $f'(x) = e^{5-3x} \cdot -3 = -3e^{5-3x}$

d $f'(x) = 3x^2 \cdot e^{x^2} + x^3 \cdot e^{x^2} \cdot 2x = 3x^2 \cdot e^{x^2} + 2x^4 e^{x^2}$

e $f'(x) = e^{\sin 2x} \cdot \cos 2x \cdot 2 = 2\cos 2x \cdot e^{\sin 2x}$

f $f'(x) = \dfrac{(e^x+1)\cdot 2e^x - (2e^x - 3)\cdot e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{2e^{2x} + 2e^x - 2e^{2x} + 3e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{5e^x}{(e^x+1)^2}$

12a $h = 1{,}2 + 0{,}001t$ met h in km en t in seconden.

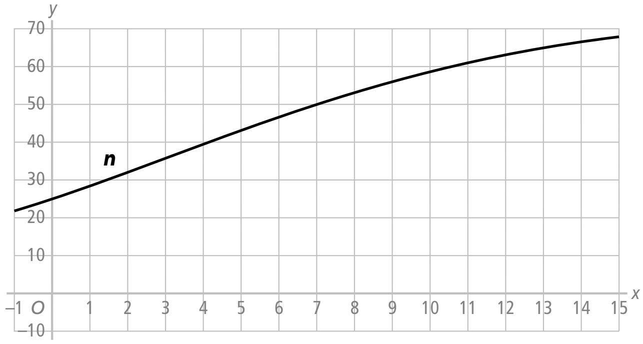
b $p = 1000 \cdot e^{-0{,}14h} = 1000 \cdot e^{-0{,}14\cdot(1{,}2+0{,}001t)} = 1000 \cdot e^{-0{,}168-0{,}00014t}$

c $p'(t) = 1000 \cdot e^{-0{,}168-0{,}00014t} \cdot -0{,}00014 = -0{,}14 \cdot e^{-0{,}168-0{,}00014t}$

$p'(0) = -0{,}14 \cdot e^{-0{,}168-0{,}00014\cdot 0} = -0{,}118$ millibar per seconde

13a $n(0)=\dfrac{75}{1+2\cdot \mathrm{e}^{-0{,}2\cdot 0}}=\dfrac{75}{1+2}=25$ vliegjes

b



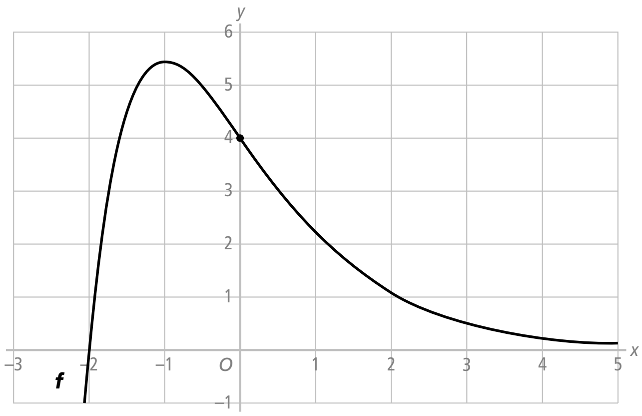
c $n'(t)=\dfrac{(1+2\cdot \mathrm{e}^{-0{,}2t})\cdot 0-75\cdot 2\mathrm{e}^{-0{,}2t}\cdot -0{,}2}{(1+2\cdot \mathrm{e}^{-0{,}2t})^2}=\dfrac{30\mathrm{e}^{-0{,}2t}}{(1+2\cdot \mathrm{e}^{-0{,}2t})^2}$

d $n'(5)=\dfrac{30\mathrm{e}^{-0{,}2\cdot 5}}{(1+2\cdot \mathrm{e}^{-0{,}2\cdot 5})^2}=3{,}66\approx 4$ vliegjes per dag

e Maak een plot van n' en bepaal het maximum. Dit levert $t\approx 3{,}47$.

14a $f'(x)=2\cdot \mathrm{e}^{-x}+(2x+4)\cdot \mathrm{e}^{-x}\cdot -1=2\mathrm{e}^{-x}-2x\mathrm{e}^{-x}-4\mathrm{e}^{-x}=-2\mathrm{e}^{-x}-2x\mathrm{e}^{-x}=-2\mathrm{e}^{-x}(1+x)$
$f'(x)=0$ oplossen geeft $-2\mathrm{e}^{-x}(1+x)=0$ en dus $-2\mathrm{e}^{-x}=0$ of $1+x=0$. De eerste vergelijking heeft geen oplossing en de tweede vergelijking levert $x=-1$. De uiterste waarde van f is $f(-1)=(2\cdot -1+4)\cdot \mathrm{e}^1=2\mathrm{e}$.

b

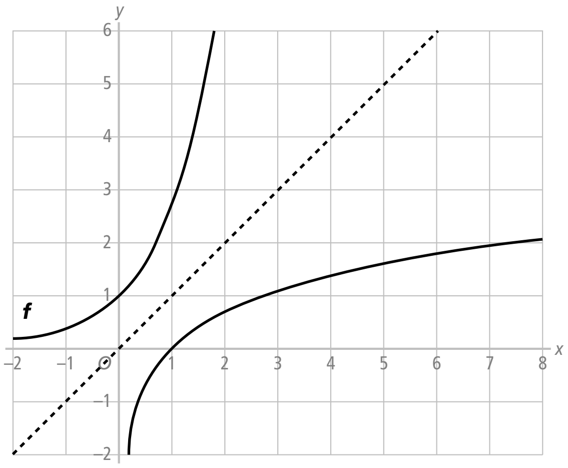


c $f''(x)=-2\mathrm{e}^{-x}\cdot -1\cdot(1+x)+-2\mathrm{e}^{-x}\cdot 1=2\mathrm{e}^{-x}+2x\mathrm{e}^{-x}-2\mathrm{e}^{-x}=2x\mathrm{e}^{-x}$
$f''(x)=0$ oplossen geeft $2x\mathrm{e}^{-x}=0$ waaruit volgt $2x=0$ of $\mathrm{e}^{-x}=0$. Alleen de eerste vergelijking heeft een oplossing, namelijk $x=0$. De coördinaten van het buigpunt zijn dus (0,4).

1.3 Natuurlijke logaritme

bladzijde 18

15a,b



c $(1,0)$, $(\mathrm{e},1)$ en $(\mathrm{e}^2,2)$

d De grafiek van f heeft een horizontale asymptoot $y=0$ en de grafiek van g heeft een verticale asymptoot $x=0$.

e Het domein van de functie g is $\langle 0,\rightarrow\rangle$.

16a $f(\ln p)=\mathrm{e}^{\ln p}=p$, dus het punt $A(\ln p,p)$ ligt op de grafiek van f .
$g(p)=\ln p$, dus het punt $B(p,\ln p)$ ligt op de grafiek van g .

b $f'(x)=\mathrm{e}^x$, $f'(\ln p)=\mathrm{e}^{\ln p}=p$

c $g'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g'(p)=\dfrac{1}{p}$

d Er geldt $f'(\ln p)=\dfrac{1}{g'(p)} \Rightarrow f'(\ln p)\cdot g'(p)=1$.

17a $f'(x)=4\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{4}{x}$

b $g'(x)=\dfrac{1}{-3x}\cdot -3=\dfrac{1}{x}$

c $h'(x)=\dfrac{1}{3x}\cdot 3-1=\dfrac{1}{x}-1$

d $k'(x)=2\cdot\ln x\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{2\ln x}{x}$

e $l'(x)=2x\cdot\ln x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}=2x\ln x+x$

f $m'(x)=\dfrac{x\cdot\dfrac{1}{x}-\ln x\cdot 1}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

bladzijde 19

18a $f'(x) = \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{1}{x}$ en $g'(x) = \frac{1}{x}$, dus de functies hebben dezelfde afgeleide.

b $v = f - g$, $v'(x) = f'(x) - g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$, de helling van de grafiek van v is gelijk aan nul voor elke waarde van x, dus de grafiek van v is een rechte lijn.

c $s = f + g$, $s'(x) = f'(x) + g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$

19a $f'(x) = \frac{1}{6-2x} \cdot -2 = \frac{-2}{6-2x} = \frac{1}{x-3}$

b $g'(x) = \mathrm{e}^x \cdot \ln x + \mathrm{e}^x \cdot \frac{1}{x}$

c $h'(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1} \cdot \mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}$

d $k'(x) = \dfrac{x^2 \cdot \frac{1}{x} - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{x - 2x \ln x}{x^4} = \dfrac{x(1 - 2\ln x)}{x^4} = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3}$

e $l'(x) = \dfrac{\ln^2 x \cdot 0 - 1 \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \dfrac{\frac{-2\ln x}{x}}{\ln^4 x} = \dfrac{-2}{x \ln^3 x}$

f $m'(x) = 3x^2 \cdot \ln^2 x + x^3 \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} = 3x^2 \cdot \ln^2 x + 2x^2 \cdot \ln x$

20a Er moet gelden $x > 0$ en $2 - \ln x \neq 0$, $2 - \ln x = 0$ als $\ln x = 2$, dus als $x = \mathrm{e}^2$.
Conclusie: $x > 0$ en $x \neq \mathrm{e}^2$.

b $f(x) = 0$ als $\ln x = 0$, dus als $x = 1$. Met behulp van de grafiek volgt dat $f(x) > 0$ als $1 < x < \mathrm{e}^2$.

c $f(\mathrm{e}^{-5}) = \dfrac{\ln \mathrm{e}^{-5}}{2 - \ln \mathrm{e}^{-5}} = \dfrac{-5}{2 - -5} = \dfrac{-5}{7}$, $f(\mathrm{e}^{-20}) = \dfrac{\ln \mathrm{e}^{-20}}{2 - \ln \mathrm{e}^{-20}} = \dfrac{-20}{2 - -20} = \dfrac{-20}{22}$ en

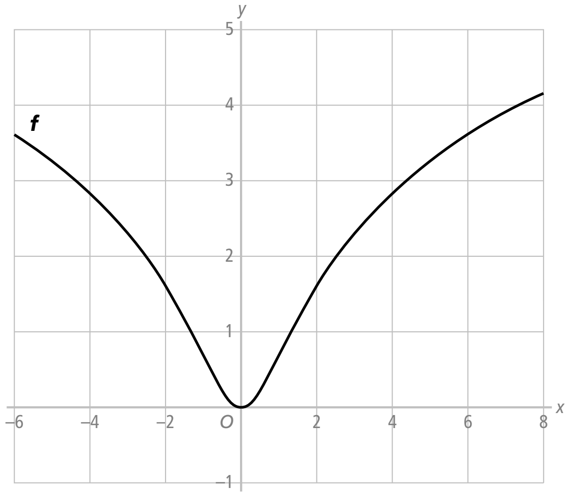
$f(\mathrm{e}^{-1000}) = \dfrac{\ln \mathrm{e}^{-1000}}{2 - \ln \mathrm{e}^{-1000}} = \dfrac{-1000}{2 - -1000} = \dfrac{-1000}{1002}$. Deze uitkomsten laten zien dat als x naar nul nadert, $f(x)$ naar -1 nadert.

d De verticale asymptoot van f is $x = \mathrm{e}^2$ en de horizontale asymptoot van f is $y = -1$.

e $f'(x) = \dfrac{(2 - \ln x) \cdot \frac{1}{x} - \ln x \cdot \frac{-1}{x}}{(2 - \ln x)^2} = \dfrac{\frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln x}{x}}{(2 - \ln x)^2} = \dfrac{\frac{2}{x}}{(2 - \ln x)^2} = \dfrac{2}{x(2 - \ln x)^2}$

$f'(x) = 0$ heeft geen oplossing (want $2 \neq 0$), dus $f(x)$ heeft geen uiterste waarden.

21a



Het domein van f is $\mathbb{R}$.

b $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+1}\cdot 2x=\dfrac{2x}{x^2+1}$, $f'(x)=0$ als $2x=0$ dus als $x=0$. De helling is gelijk aan 0 in het punt $(0,0)$.

c $f'(x)=\frac{1}{2}$ oplossen met behulp van de optie intersect van de GR geeft $x\approx 0,27$ en $x\approx 3,73$.

d De grafiek van f' plotten en met de GR het maximum bepalen geeft $x=1$. Dus in het punt $(1,\ln 2)$ van de grafiek van f is de helling maximaal.

22a $f(x)={}^{3}\log x=\dfrac{\ln x}{\ln 3}$

b $h(x)=\log(x^2+1)=\dfrac{\ln(x^2+1)}{\ln 10}$

c $g(x)={}^{4}\log(\dfrac{2}{x})=\dfrac{\ln\frac{2}{x}}{\ln 4}$

1.4 Afgeleide functies

bladzijde 20

23 $f'(x)=\dfrac{\ln 2\cdot\frac{1}{x}-\ln x\cdot 0}{\ln^2 2}=\dfrac{1}{x\ln 2}$

24a $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln 6}$

b $f'(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)\ln 2}\cdot 2x=\dfrac{2x}{(x^2+1)\ln 2}$

c $f'(x)=\dfrac{1}{(2x-4)\ln 5}\cdot 2=\dfrac{2}{(2x-4)\ln 5}$

d $f'(x)=\dfrac{1}{\frac{2}{x}\ln 3}\cdot -2x^{-2}=\dfrac{x}{2\ln 3}\cdot\dfrac{-2}{x^2}=\dfrac{-1}{x\ln 3}$

25a $f(x) = g(x)$ oplossen geeft achtereenvolgens

$^2\log(5-x) = 2 - {}^2\log x$

$^2\log(5-x) = {}^2\log 4 - {}^2\log x$

$^2\log(5-x) = {}^2\log \frac{4}{x}$

$5 - x = \frac{4}{x}$

$5x - x^2 = 4$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$(x-1)(x-4) = 0$

$x = 1$ of $x = 4$

De coördinaten zijn dus $A(1,2)$ en $B(4,0)$

b $CD = f(p) - g(p) = {}^2\log(5-p) - 2 + {}^2\log p = {}^2\log(5-p) - {}^2\log 4 + {}^2\log p = {}^2\log(\frac{5-p}{4} \cdot p)$

$= {}^2\log \frac{5p - p^2}{4} = {}^2\log(1,25p - 0,25p^2)$

c $CD' = \frac{1}{(1,25p - 0,25p^2)\ln 2} \cdot (1,25 - 0,5p) = \frac{(1,25 - 0,5p)}{(1,25p - 0,25p^2)\ln 2}$

$CD' = 0$ oplossen geeft $1,25 - 0,5p = 0$, waaruit volgt $1,25 = 0,5p$ en dus $p = \frac{1,25}{0,5} = 2,5$.

26a $e^a = 3$ geeft $a = \ln 3$

b $f'(x) = e^{\ln 3x} \cdot \ln 3 = \ln 3 \cdot 3^x$

c $f(x) = 2^{x-1} = e^{\ln(2)\cdot(x-1)}$, $f'(x) = e^{\ln(2)\cdot(x-1)} \cdot \ln 2 = \ln 2 \cdot 2^{x-1}$

d $g(x) = 3 \cdot (\frac{1}{2})^x = 3 \cdot e^{\ln(\frac{1}{2})x}$, $g'(x) = 3 \cdot e^{\ln(\frac{1}{2})x} \cdot \ln\frac{1}{2} = 3\ln\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2})^x$

bladzijde 21

27a $f'(x) = \ln 4 \cdot 4^x$

b $g'(x) = -\ln(\frac{1}{3}) \cdot (\frac{1}{3})^x$

c $h'(x) = 7 \cdot \ln 8 \cdot 8^x$

d $j'(x) = \ln 2 \cdot 2^{-3x} \cdot -3 = -3\ln 2 \cdot 2^{-3x}$

e $k'(x) = 3 \cdot \ln 4 \cdot 4^{2x+1} \cdot 2 = 6\ln 4 \cdot 4^{2x+1}$

f $m'(x) = 1 \cdot 5^x + x \cdot \ln 5 \cdot 5^x = 5^x + x\ln 5 \cdot 5^x$

28a $g = 0,99988$

b $f(t) = b \cdot g^t = 0,14 \cdot 0,99988^t$

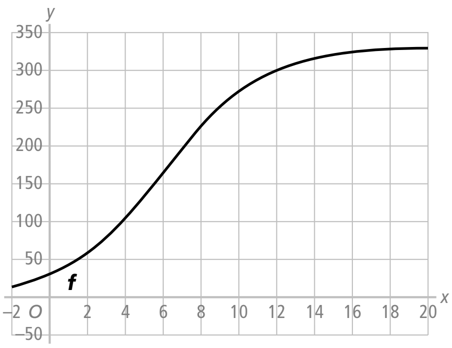
c $f'(t) = 0,14 \cdot \ln 0,99988 \cdot 0,99988^t$, $f'(50) = 0,14 \cdot \ln 0,99988 \cdot 0,99988^{50} = -1,67 \cdot 10^{-5}$
milligram per jaar.

d Oplossen van de vergelijking $100 \cdot 0,99988^t = 2$ geeft $t = 32\,598$ jaar.

29a $f(x) = x^p = e^{\ln x^p} = e^{p \cdot \ln x}$

b $f'(x) = e^{p\cdot\ln x} \cdot \frac{p}{x} = x^p \cdot p \cdot x^{-1} = p \cdot x^{p-1}$

30a



Als $t=0$ geldt $Q=\frac{330}{1+10}=30$, als t groter wordt, wordt het exponentiële deel van de functie steeds kleiner, dus de grafiek nadert naar 330.

b Oplossen met de GR van: $\frac{330}{1+10e^{-0,3818x}}=110$ geeft $t=4,2$ jaar.

c $\frac{dQ}{dt}=\frac{(1+10\cdot e^{-0,3818t})\cdot 0-330\cdot(10\cdot -0,3818\cdot e^{-0,3818t})}{(1+10\cdot e^{-0,3818t})^2}=\frac{1259,94\cdot e^{-0,3818t}}{(1+10\cdot e^{-0,3818t})^2}$

d De noemer van $\frac{dQ}{dt}$ is een kwadraat en dus altijd positief. De teller van $\frac{dQ}{dt}$ is een vermenigvuldiging van een positief getal met een e-macht en dus ook altijd positief. Als geheel is de deling $\frac{dQ}{dt}$ dus ook altijd positief. Als de helling positief is, weet je dat de grafiek van Q stijgt.

1.5 Primitieven

bladzijde 22

31a $F_a'(x)=\frac{1}{a}\cdot e^{ax}\cdot a=e^{ax}=f_a(x)$

b $f_a(x)=2^x=e^{\ln 2x}$, dus $a=\ln 2$

c $F_a(x)=\frac{1}{\ln 2}\cdot e^{\ln 2x}+C=\frac{1}{\ln 2}\cdot 2^x$

32a $h(x)=\begin{cases}\ln x & x>0\\ \ln(-x) & x<0\end{cases}$

b $x>0:\ h'(x)=\frac{1}{x}$

c $x<0:\ h'(x)=\frac{1}{-x}\cdot -1=\frac{1}{x}$

33a $f'(x)=\frac{1}{3x}\cdot 3=\frac{1}{x}$, $g'(x)=\frac{1}{-5x}\cdot -5=\frac{1}{x}$

b $F'(x)=\frac{1}{ax}\cdot a=\frac{1}{x}=f(x)$

c In het kleurvak staat een speciaal geval van de uitkomst van opdracht b, namelijk het geval $a=1$.

34a $F(x)=\frac{1}{\ln 10}\cdot 10^x+C$

b $G(x)=5\cdot\frac{1}{\ln 4}\cdot 4^x+C=\frac{5}{\ln 4}\cdot 4^x+C$

c $H(x)=-3\cdot\frac{1}{\ln\frac{1}{3}}\cdot(\frac{1}{3})^x+C=\frac{-3}{\ln\frac{1}{3}}\cdot(\frac{1}{3})^x+C$

d $K(x)=12\cdot\frac{1}{\ln 5}\cdot 5^{7x}\cdot\frac{1}{7}=\frac{12}{7\ln 5}\cdot 5^{7x}+C$

35a $F(x)=-3\cdot\ln|x|+C$

b $G(x)=\frac{1}{3}\ln|3x|+C$

c $K(x)=3\ln|x-6|+C$

bladzijde 23

36a $F'(x)=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}=\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}\neq f(x)$

b $G'(x)=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1=\ln x+1-1=\ln x=g(x)$

c $F'(x)=1\cdot\ln^2 x+x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}-2\ln x-2x\cdot\frac{1}{x}+2=\ln^2 x+2\ln x-2\ln x-2+2=\ln^2 x=f(x)$

d $f(x)=g(x)$ oplossen geeft $\ln^2 x=\ln x$, waaruit volgt $\ln x=1$ of $\ln x=0$ en dus $x=\mathrm{e}$ of $x=1$.
De coördinaten van de snijpunten zijn dus $(1,0)$ en $(\mathrm{e},1)$.

e $\int_1^{\mathrm{e}}(g(x)-f(x))\,\mathrm{d}x=\left[x\cdot\ln x-x-x\cdot\ln^2 x+2x\cdot\ln x-2x\right]_1^{\mathrm{e}}=(\mathrm{e}-\mathrm{e}-\mathrm{e}+2\mathrm{e}-2\mathrm{e})-(-1-2)=3-\mathrm{e}$

37a $F(x)=-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x+5}+C$

b $f(x)=\mathrm{e}^{\ln x}=x$, $F(x)=\frac{1}{2}x^2+C$

c $f(x)=\mathrm{e}^{2x}(1-\mathrm{e}^{-2x})=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{2x}\cdot\mathrm{e}^{-2x}=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^0=\mathrm{e}^{2x}-1$, $F(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-x+C$

d $f(x)=\frac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}}{3}=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{3}+\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{3}=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2x}$,

$F(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{3}\cdot-\frac{1}{2}\cdot\mathrm{e}^{-2x}+C=\frac{1}{6}\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-2x}+C$

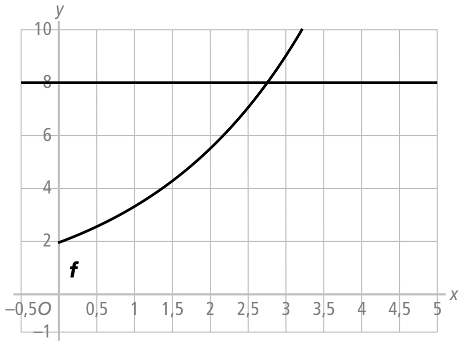
e $F(x)=\frac{1}{\ln 3}\cdot 3^{2x-1}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x^4+C=\frac{1}{2\ln 3}\cdot 3^{2x-1}+\frac{1}{4}x^4+C$

38a $A(1)=\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=\left[4\mathrm{e}^{0,5x}\right]_{-1}^{1}=4\mathrm{e}^{0,5}-4\mathrm{e}^{-0,5}$

b $A(p)=\int_{-1}^{p}f(x)\,\mathrm{d}x=\left[4\mathrm{e}^{0,5x}\right]_{-1}^{p}=4\mathrm{e}^{0,5p}-4\mathrm{e}^{-0,5}$

c $A(p)=16\Rightarrow 4\mathrm{e}^{0,5p}-4\mathrm{e}^{-0,5}=16$ oplossen met de GR geeft $p\approx 3,055$

d



De x-coördinaat van het snijpunt van de grafiek van f met de lijn $y=8$:
$2e^{0,5x}=8$ geeft $e^{0,5x}=4$ en dus $x=2\ln 4$.
De oppervlakte van het gevraagde gebied is

$$8\cdot 2\ln 4-\int_0^{2\ln 4} f(x)\,dx = 16\ln 4-\left[4e0,5x\right]_0^{2\ln 4} = 16\ln 4-(4e^{0,5\cdot 2\ln 4}-4e^{-0,5\cdot 0}) = 16\ln 4-16+4 = 16\ln 4-12$$

39 $f(x)=0$ als $x^2-4x+3=0$. Ontbinden in factoren geeft $(x-1)(x-3)=0$ en dus $x=1$ of $x=3$.

$$f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2}=\frac{x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}+\frac{3}{x^2}=1-\frac{4}{x}+3x^{-2}$$

De gevraagde oppervlakte is

$$-\int_1^3 f(x)\,dx = -\left[x-4\ln|x|-3x^{-1}\right]_1^3 = -(3-4\ln 3-\frac{3}{3})+(1-0-\frac{3}{1}) = -(-4\ln 3+2)+-2 = 4\ln 3-4$$

40a $\int_5^{10} f(x)\,dx = \left[3\ln|x-4|\right]_5^{10} = 3\ln 6-3\ln 1 = 3\ln 6$

b $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = \left[3\ln|x-4|\right]_{-3}^{3} = (3\ln 1-3\ln 7) = -3\ln 7$

c

Het gebied waarover de integraal berekend moet worden bevat de verticale asymptoot van de functie f. Het ene stuk van de grafiek ligt onder de x-as en het andere stuk van de grafiek ligt boven de x-as. Conclusie: de gevraagde integraal is niet te berekenen.

1.6 Gemengde opdrachten

bladzijde 24

41a $h = 8218 \cdot \ln\left(\frac{p_0}{p}\right) = 8218 \cdot \ln\left(\frac{1013}{800}\right) \approx 1940$

b $\frac{dh}{dp} = 8218 \cdot \frac{1}{\frac{1013}{p}} \cdot -1013 \cdot p^{-2} = 8218 \cdot \frac{p}{1013} \cdot \frac{-1013}{p^2} = \frac{-8218}{p}$

$\left.\frac{dh}{dp}\right|_{p=1000} = \frac{-8218}{1000} = -8,218 \text{ m/mbar}$

$\left.\frac{dh}{dp}\right|_{p=800} = \frac{-8218}{800} = -10,273 \text{ m/mbar}$

De afgeleide waarde geeft aan hoe snel de hoogte verandert als de luchtdruk verandert. Als de luchtdruk 1000 mbar is, daalt de hoogte 8,218 m/mbar. Als de luchtdruk 800 mbar is, daalt de hoogte 10,273 m/mbar.

c $h = 8218 \cdot \ln\frac{1013}{750} = 2470,3$ meter,

$h = 8218 \cdot \ln\frac{1013}{680} = 3275,5$ meter,

dus men is $3275,5 - 2470,3 = 805,2$ meter gestegen.

d Stel je begint bij een luchtdruk p mbar. De hoogte is dan

$h = 8218 \cdot \ln\frac{1013}{p} = 8218 \cdot (\ln 1013 - \ln p) = 8218 \cdot \ln 1013 - 8218 \cdot \ln p$ meter.

De luchtdruk halveert tot $\frac{1}{2}p$ mbar. De hoogte is dan

$h = 8218 \cdot \ln\frac{1013}{\frac{1}{2}p} = 8218 \cdot (\ln 1013 - \ln\frac{1}{2}p) = 8218 \cdot \ln 1013 - 8218 \cdot \ln\frac{1}{2}p =$

$8218 \cdot \ln 1013 - 8218 \cdot \ln\frac{1}{2} - 8218 \cdot \ln p$

Het hoogteverschil dat je moet overbruggen is

$(8218 \cdot \ln 1013 - 8218 \cdot \ln p) - (8218 \cdot \ln 1013 - 8218 \cdot \ln\frac{1}{2} - 8218 \cdot \ln p) = 8218 \cdot \ln\frac{1}{2} = 5696,3$ meter.

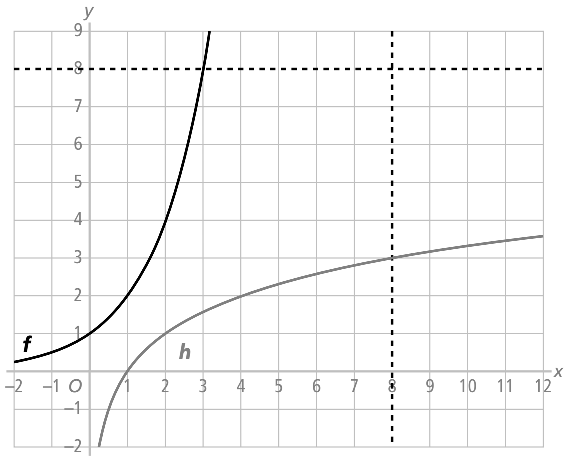
Conclusie: op één dag kun je niet 5696,3 meter hoogteverschil overbruggen, dus op één dag kun je niet zoveel klimmen dat de luchtdruk gehalveerd wordt.

42a $\int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{1}{\ln 3} \cdot 3^x\right]_0^1 = \frac{3}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3} = \frac{2}{\ln 3} \approx 1,82$

b $\text{opp}_{\text{blauw gebied}} = 3 \cdot 1 - \frac{2}{\ln 3} = 3 - \frac{2}{\ln 3} \approx 1,18$

c Het rode gebied is een spiegeling van het blauwe gebied in de lijn $y = x$, dus de oppervlakten zijn gelijk aan elkaar.

d $f(x)=2^x$, $h(x)={}^2\log x$



De oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as, de y -as en de lijn $x=3$ is $\int_0^3 f(x)\,dx=\left[\frac{1}{\ln 2}\cdot 2^x\right]_0^3=\frac{8}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}=\frac{7}{\ln 2}$.

De oppervlakte van het blauwe gebied is dan $8\cdot 3-\frac{7}{\ln 2}=24-\frac{7}{\ln 2}$.

De oppervlakte van het rode gebied is dus $24-\frac{7}{\ln 2}$.

43a Controleren of geldt $f_p(1)=g(1)$: $f_p(1)=2p\ln 1-1^2=-1$ en $g(1)=-1^2=-1$, dus de grafiek van elke functie f_p snijdt de grafiek van g in het punt $(1,-1)$.

b $g'(x)=-2x$, $g'(1)=-2$

c $f'(1)\cdot g'(1)=-1$, invullen van $g'(1)=-2$ geeft $f'(1)\cdot -2=-1$ en dus $f'(1)=\frac{1}{2}$.

$f'(1)=\frac{1}{2}$ combineren met $f_p'(x)=2p\cdot\frac{1}{x}-2x=\frac{2p}{x}-2x$ levert $\frac{2p}{1}-2\cdot 1=\frac{1}{2}$, waaruit volgt $2p=2\frac{1}{2}$ en dus $p=1\frac{1}{4}$.

d Als de top van de grafiek van f op de x -as ligt, moet gelden: $f_p(x)=0$ en $f_p'(x)=0$.

$f_p'(x)=0$ oplossen geeft achtereenvolgens

$\frac{2p}{x}-2x=0$

$2p-2x^2=0$

$2p=2x^2$

$p=x^2$ (1)

Invullen van (1) in $f_p'(x)=0$ geeft achtereenvolgens

$2p\ln x-x^2=0$

$2x^2\ln x-x^2=0$

$x^2(2\ln x-1)=0$

$x^2=0$ of $2\ln x-1=0$

$x=0$ of $2\ln x=1$, waaruit volgt $\ln x=\frac{1}{2}$ en dus $x=e^{\frac{1}{2}}$.

De oplossing $x=0$ is niet van toepassing (zie $f_p'(x)$, waar x in de noemer staat), dus

$p=x^2=\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2=e$.

bladzijde 25

44a $I' = (4-6t)\cdot e^{-2t} + (4t-3t^2)\cdot e^{-2t}\cdot -2 = (4-6t)\cdot e^{-2t} + -2\cdot(4t-3t^2)\cdot e^{-2t}$

$I' = 0$ oplossen geeft achtereenvolgens

$(4-6t)\cdot e^{-2t} + -2\cdot(4t-3t^2)\cdot e^{-2t} = 0$

$(4-6t)\cdot e^{-2t} = 2\cdot(4t-3t^2)\cdot e^{-2t}$

$(4-6t) = 2\cdot(4t-3t^2)$

$4-6t = 8t-6t^2$

$6t^2 - 14t + 4 = 0$

De abc-formule levert $t=2$ en $t=\frac{1}{3}$. Plotten van de grafiek van I laat zien dat het bij $t=2$ om een minimum gaat en bij $t=\frac{1}{3}$ om een maximum. $I_{\max} = 0{,}51$ mega-ampere.

b $J'(t) = \frac{1}{4}e^{-2t}\cdot -2\cdot(6t^2-2t-1) + \frac{1}{4}e^{-2t}\cdot(12t-2) = -3t^2e^{-2t} + te^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-2t} + 3te^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-2t}$

$-3t^2e^{-2t} + 4te^{-2t} = (4t-3t^2)\cdot e^{-2t} = I(t)$, dus $J(t)$ is een primitieve van $I(t)$.

c $\int_0^{0,8} I(t)\,dt = \left[\frac{1}{4}e^{-2t}(6t^2-2t-1)\right]_0^{0,8} = 0{,}0626 - -0{,}25 = 0{,}3126$ Coulomb.

45a $S(t) = 20\cdot\dfrac{1}{-0{,}4}\cdot e^{-0{,}4t} = -50e^{-0{,}4t}$,

$\int_0^2 s(t)\,dt = \left[-50e^{-0{,}4t}\right]_0^2 = -50e^{-0{,}8} + 50 \approx 27{,}53$

b In de eerste twee seconden wordt er 27,53 mol/liter cyclopropaan omgezet in propeen.

c $\int_0^{\infty} s(t)\,dt = \left[-50e^{-0{,}4t}\right]_0^{\infty} = 0 - -50 = 50$

d $\int_0^{a} s(t)\,dt = 25$ oplossen geeft achtereenvolgens

$\left[-50e^{-0{,}4t}\right]_0^{a} = 25$

$-50e^{-0{,}4a} + 50 = 25$

$-50e^{-0{,}4a} = -25$

$e^{-0{,}4a} = \frac{1}{2}$

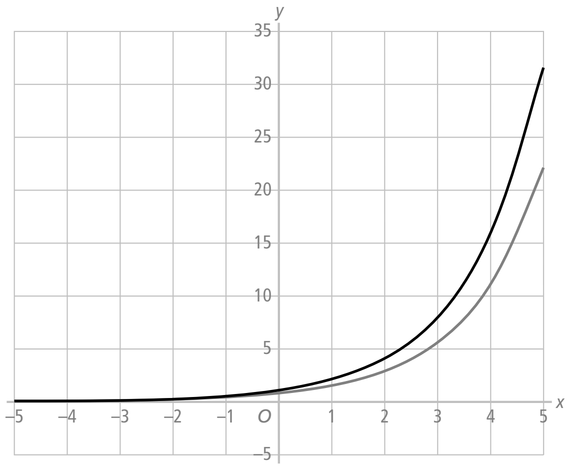
$-0{,}4a = \ln\frac{1}{2}$

$a = \dfrac{\ln\frac{1}{2}}{-0{,}4} \approx 1{,}73$

ICT Het getal e en de natuurlijke logaritme

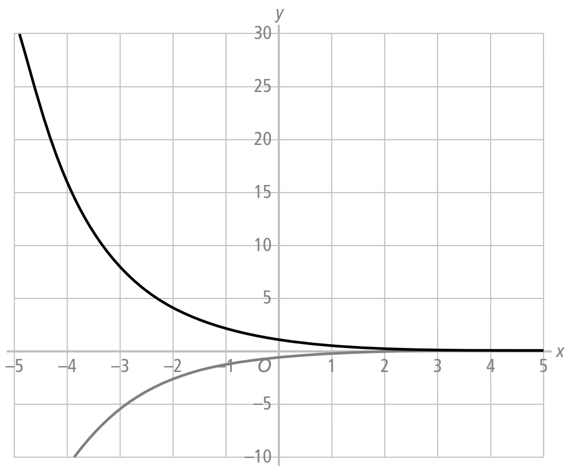
bladzijde 26

I-1a



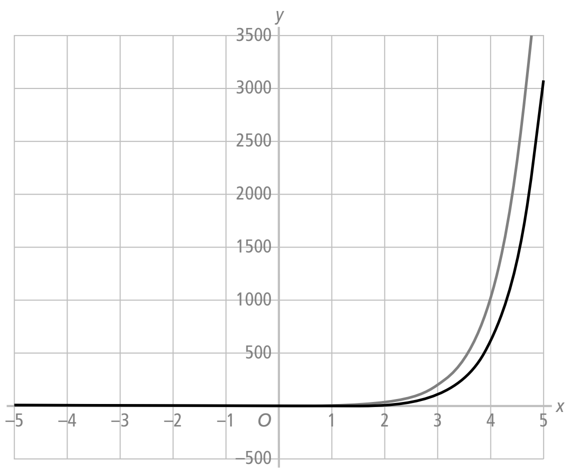
$f'(x) = 0,69 \cdot f(x) = 0,69 \cdot 2^x$

b

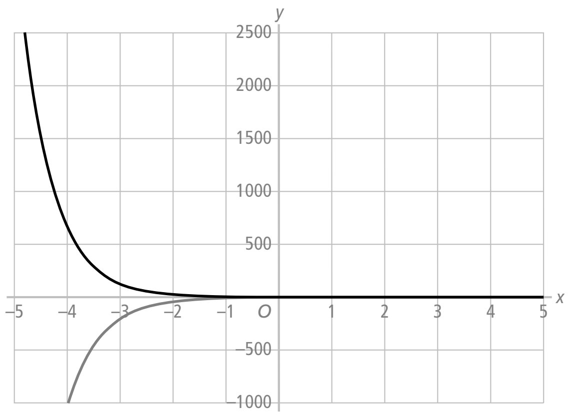


$g'(x) = -0,69 \cdot g(x) = -0,69 \cdot 0,5^x$

c



$h'(x) = 1,61 \cdot h(x) = 1,61 \cdot 5^x$



$k'(x) = -1,61 \cdot k(x) = -1,61 \cdot 0,2^x$

I-2a $\dfrac{f(x+0,001)-f(x)}{0,001} = \dfrac{g^{x+0,001}-g^x}{0,001} = \dfrac{g^x \cdot g^{0,001}-g^x}{0,001} = \dfrac{g^{0,001}-1}{0,001} \cdot g^x$

Met $c_g \approx \dfrac{g^{0,001}-1}{0,001}$ volgt $f'(x) = c_g \cdot g^x$.

b Met de grafieken volgt dat $c_g > 0$ als $g > 1$ en $c_g < 0$ als $g < 1$.

Met $c_g \approx \dfrac{g^{0,001}-1}{0,001}$ kun je zien dat $c_g < 0$ als $g^{0,001}-1 < 0$, dus als $g < 1$ en dat $c_g > 0$ als $g^{0,001}-1 > 0$, dus als $g > 1$.

I-3a $g \approx 2,7$

b $\dfrac{g^{0,001}-1}{0,001} = 1$ geeft $g^{0,001}-1 = 0,001$, waaruit volgt $g^{0,001} = 1,001$ en dus

$g = \sqrt[0,001]{1,001} \approx 2,7$

I-4a $f'(x) = \mathrm{e}^{4-3x} \cdot -3 = -3\mathrm{e}^{4-3x}$

b $f'(x) = \mathrm{e}^{\sin x} \cdot \cos x = \cos x \cdot \mathrm{e}^{\sin x}$

c $f'(x) = 2x \cdot \mathrm{e}^x + x^2 \cdot \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \cdot (2x + x^2)$

d $f'(x) = \dfrac{(\mathrm{e}^x+2)\cdot \mathrm{e}^x - (\mathrm{e}^x-2)\cdot \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+2)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+2)^2} = \dfrac{4\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+2)^2}$

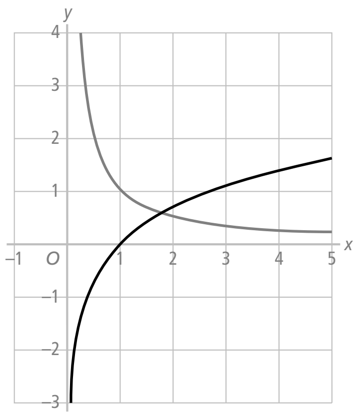
I-5 $f'(x) = \mathrm{e}^x$ en dus $f'(1,5) = \mathrm{e}^{1,5}$
$y = ax + b = \mathrm{e}^{1,5}x + b$, invullen van het punt $(1,5; \mathrm{e}^{1,5})$ geeft $\mathrm{e}^{1,5} = \mathrm{e}^{1,5} \cdot 1,5 + b$ en dus $b = \mathrm{e}^{1,5} - 1,5 \cdot \mathrm{e}^{1,5} = -0,5\mathrm{e}^{1,5}$.
Conclusie: de vergelijking van de raaklijn is $y = \mathrm{e}^{1,5}x - 0,5\mathrm{e}^{1,5}$.

bladzijde 27

I-6a Voor een top geldt dat de raaklijn horizontaal loopt. Voor een buigpunt geldt dat de raaklijn direct links van het buigpunt net onder de grafiek loopt en direct rechts van het buigpunt net boven de grafiek loopt (of andersom).

b $f'(x) = 2e^{-x} + (2x+4) \cdot -e^{-x} = 2e^{-x} - (2x+4) \cdot e^{-x}$, $f'(x) = 0$ oplossen geeft achtereenvolgens
$2e^{-x} - (2x+4) \cdot e^{-x} = 0$
$2e^{-x} = (2x+4) \cdot e^{-x}$, omdat $e^{-x} > 0$ voor elke x geldt dus
$2 = 2x+4$ waaruit volgt $2x = -2$ en dus $x = -1$.
De coördinaten van de top zijn $(-1, 2e)$.
$f''(x) = -2e^{-x} - \{2e^{-x} + (2x+4) \cdot -e^{-x}\} =$
$-2e^{-x} - 2e^{-x} + (2x+4) \cdot e^{-x} = -4e^{-x} + (2x+4) \cdot e^{-x}$ $f''(x) = 0$ oplossen geeft achtereenvolgens
$-4e^{-x} + (2x+4) \cdot e^{-x} = 0$
$-4e^{-x} = -(2x+4) \cdot e^{-x}$
$-4 = -(2x+4)$
$-4 = -2x - 4$ en dus $x = 0$.
De coördinaten van het buigpunt zijn $(0, 4)$.

I-7a



b De grafiek van f is afnemend stijgend, dus de helling van de grafiek van f wordt steeds kleiner, dat wil zeggen de hellinggrafiek is een dalende grafiek.

c De hellinggrafiek heeft twee asymptoten: de verticale asymptoot $x = 0$ en de horizontale asymptoot $y = 0$, omdat de minimale helling van de grafiek van f nul is en de maximale helling van de grafiek van f gelijk is aan de helling van een verticale raaklijn.

d $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

I-8 $f(x) = {}^{e}\log x$ geeft $e^{f(x)} = x$.
Differentiëren geeft $e^{f(x)} \cdot f'(x) = 1$, waaruit volgt $x \cdot f'(x) = 1$ en dus $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

I-9a $f'(x) = \dfrac{1}{4-4x} \cdot -4 = \dfrac{-4}{4-4x}$

b $g'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = 2x \cdot \ln x + x$

c $p'(x) = 2\ln x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{4x \ln x^2}{x^2} = \frac{4\ln x^2}{x}$

d $h'(x) = \frac{1}{2x} \cdot 2 - 2 = \frac{1}{x} - 2$

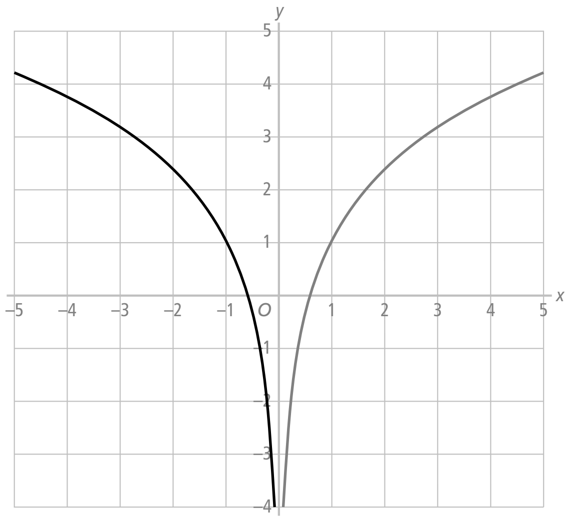
e $k'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

f $q(x) = \ln \mathrm{e}^x = x$, $q'(x) = 1$

I-10a $f'(x) = \frac{1}{x}$ en $g'(x) = \frac{1}{\mathrm{e}x} \cdot \mathrm{e} = \frac{1}{x}$, dus de functies f en g hebben dezelfde afgeleide.

b Met de rekenregel ${}^g\log a + {}^g\log b = {}^g\log ab$ volgt
$s(x) = f(x) + g(x) = \ln x + \ln(\mathrm{e}x) = \ln(\mathrm{e}x^2)$.

c



De functie $y = \ln x + \ln(\mathrm{e}x)$ bestaat alleen voor $x > 0$. Je ziet de grafiek rechts van de y-as. Vanwege het kwadraat in $y = \ln(\mathrm{e}x^2)$ bestaat deze functie voor alle x . De bijbehorende grafiek is symmetrisch in de y-as.

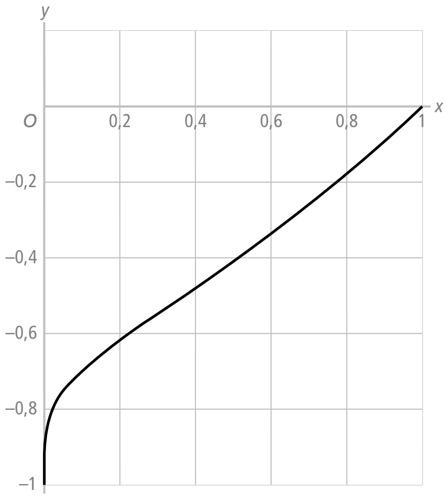
I-11a Het domein van f is $x > 0$ en $x \neq \mathrm{e}$.

b Als de raaklijn horizontaal is geldt $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \frac{(1 - \ln x) \cdot \frac{1}{x} - \ln x \cdot \frac{-1}{x}}{(1 - \ln x)^2} = \frac{\frac{1}{x} - \ln x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \frac{1}{x}}{(1 - \ln x)^2} = \frac{1}{x \cdot (1 - \ln x)^2}$$

$f'(x) = 0$ als de teller gelijk aan nul is. Deze vergelijking heeft geen oplossing.
Conclusie: er zijn geen punten met een horizontale raaklijn.

c Wanneer $x\downarrow 0$ gaat dan gaat $f(x)\downarrow -1$. De helling wordt als x steeds dichter bij 0 komt steeds groter.
Het punt $(0,-1)$ hoort niet bij de grafiek. De grafiek is dus bijna verticaal in de buurt van $(0,-1)$ Vlak bij de y-as heeft de grafiek een verticale raaklijn.



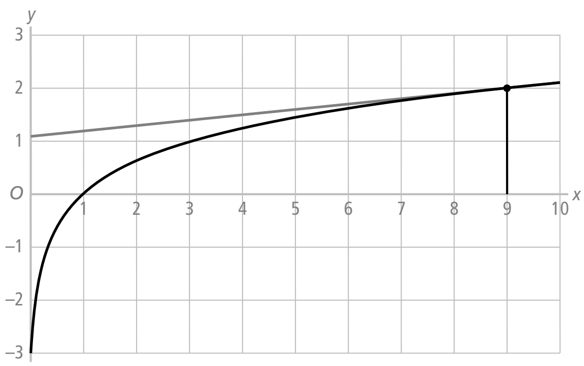
ICT Afgeleide functies

bladzijde 28

I-12a Voor $g=\mathrm{e}$ geldt $h(x)=\dfrac{\ln x}{\ln e}=\dfrac{\ln x}{1}=\ln x=f(x)$

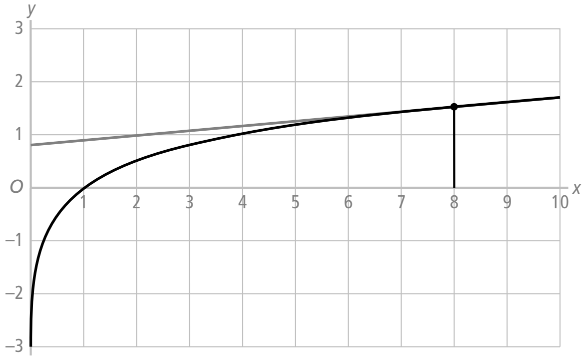
b Voor $g=10$ geldt $h(x)=\dfrac{\ln x}{\ln 10}={}^{10}\log x=\log x$

c Voor $g=3$ geldt $h(x)=\dfrac{\ln x}{\ln 3}={}^{3}\log x$.



De helling van de grafiek van h in het punt $(9,2)$ is 0,1011. Er geldt $\dfrac{1}{\ln 3}\cdot\dfrac{1}{9}=0{,}1011$.

d Voor $g = 4$ geldt $h(x) = \frac{\ln x}{\ln 4} = {}^4\log x$.



De helling van de grafiek van h in het punt $(8, 1\frac{1}{2})$ is 0,0902. Er geldt $\frac{1}{\ln 4} \cdot \frac{1}{8} = 0{,}0902$.

I-13a $f'(x) = \frac{1}{x \ln 6}$

b $f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\ln 2} \cdot 2x = \frac{2x}{(x^2+1)\ln 2}$

c $f'(x) = \frac{1}{(2x-4)\ln 5} \cdot 2 = \frac{2}{(2x-4)\ln 5}$

d $f'(x) = \frac{1}{\frac{2}{x}\ln 3} \cdot -2x^{-2} = \frac{x}{2\ln 3} \cdot \frac{-2}{x^2} = \frac{-1}{x \ln 3}$

I-14a $f(x) = g(x)$ oplossen geeft achtereenvolgens

${}^2\log(5-x) = 2 - {}^2\log x$

${}^2\log(5-x) = {}^2\log 4 - {}^2\log x$

${}^2\log(5-x) = {}^2\log \frac{4}{x}$

$5 - x = \frac{4}{x}$

$5x - x^2 = 4$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$(x-1)(x-4) = 0$

$x = 1$ of $x = 4$

De coördinaten zijn dus $A(1,2)$ en $B(4,0)$

b Plot de grafiek van v en bepaal het maximum. v is maximaal voor $p = 2{,}5$.

c $CD = y_C - y_D = f(p) - g(p) = v(p) = {}^2\log(5-p) - 2 + {}^2\log p =$

${}^2\log(5-p) - {}^2\log 4 + {}^2\log p = {}^2\log(\frac{5-p}{4} \cdot p) =$

${}^2\log \frac{5p-p^2}{4} = {}^2\log(1{,}25p - 0{,}25p^2)$.

$v'(p) = \frac{1}{1{,}25p - 0{,}25p^2} \cdot (1{,}25 - 0{,}5p) = \frac{1{,}25 - 0{,}5p}{1{,}25p - 0{,}25p^2}$

$v'(p) = 0$ geeft $1{,}25 - 0{,}5p = 0 \Rightarrow p = 2{,}5$. Dus CD is maximaal voor $p = 2{,}5$.

De maximale lengte van CD is

$v(2{,}5) = {}^2\log(1{,}25 \cdot 2{,}4 - 0{,}25 \cdot 2{,}4^2) = {}^2\log 1{,}5625 = {}^2\log 1\frac{9}{16}$.

bladzijde 29

I-15a Als $e^a = \frac{1}{2}$ dan $a = \ln\frac{1}{2} = -0,69$, als $e^a = 1\frac{1}{2}$ dan $a = \ln 1\frac{1}{2} = 0,41$, als $e^a = 2\frac{1}{2}$ dan $a = \ln 2\frac{1}{2} = 0,92$, als $e^a = 3\frac{1}{2}$ dan $a = \ln 3\frac{1}{2} = 1,25$ en als $e^a = 4\frac{1}{2}$ dan $a = \ln 4\frac{1}{2} = 1,50$.

b Klopt.

c $h'(x) = e^{\ln 3x} \cdot \ln 3 = \ln 3 \cdot 3^x$

d $l(x) = 3 \cdot (\frac{1}{2})^x = 3 \cdot e^{\ln(\frac{1}{2})x}$, $l'(x) = 3 \cdot e^{\ln(\frac{1}{2})x} \cdot \ln\frac{1}{2} = 3\ln\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2})^x$

I-16a $f'(x) = \ln 4 \cdot 4^x$

b $g'(x) = -\ln(\frac{1}{3}) \cdot (\frac{1}{3})^x$

c $h'(x) = 7 \cdot \ln 8 \cdot 8^x$

d $j'(x) = \ln 2 \cdot 2^{-3x} \cdot -3 = -3\ln 2 \cdot 2^{-3x}$

e $k'(x) = 3 \cdot \ln 4 \cdot 4^{2x+1} \cdot 2 = 6\ln 4 \cdot 4^{2x+1}$

f $m'(x) = 1 \cdot 5^x + x \cdot \ln 5 \cdot 5^x = 5^x + x\ln 5 \cdot 5^x$

I-17a $g = 0,99988$

b $f(t) = b \cdot g^t = 0,14 \cdot 0,99988^t$
Halveringstijd: $\frac{1}{2} = 0,99988^t$ oplossen geeft $t = {}^{0,99988}\log\frac{1}{2} = 5776$ jaar.

c $f'(t) = 0,14 \cdot \ln 0,99988 \cdot 0,99988^t$, dus de snelheid waarmee de hoeveelheid C_{14} afneemt op het tijdstip T_h is wel afhankelijk van de beginhoeveelheid.

d $f'(50) = 0,14 \cdot \ln 0,99988 \cdot 0,99988^{50} = -1,67 \cdot 10^{-5}$ milligram per jaar, dus een afname met $1,67 \cdot 10^{-5}$ mg/jaar

e Je vindt de leeftijd van dit fossiel door op te lossen: $100 \cdot 0,99988^t = 2$. Dit geeft $t = 32\,598$ jaar.

Test jezelf

bladzijde 32

T-1a $2^a = 1,169$ geeft $a = {}^2\log 1,169 \approx 0,225$, dus $B = 60 \cdot 2^{0,225t}$

b $120 = 60 \cdot 1,169^t$ geeft $2 = 1,169^t$ en dus $t = {}^{1,169}\log 2 \approx 4,44$ periodes van tien jaar. De verdubbelingstijd is dus 44,4 jaar.

c In 1980 zijn er 60 miljoen inwoners. Oplossen van $480 = 60 \cdot 1,169^t$ geeft $8 = 1,169^t$ en dus $t = {}^{1,169}\log 8 \approx 13,3$ periodes van 10 jaar. Conclusie: in het jaar 2113 (1980+133) is de bevolking acht keer zo groot als in 1980.

d Voor 1970 geldt $t = -1$, dus $B = 60 \cdot 1,169^{-1} = 51,3$ miljoen. Voor 1960 geldt $t = -2$ dus $B = 60 \cdot 1,169^{-2} = 43,9$ miljoen.

e De verdubbelingstijd geeft aan na hoeveel tijd de bevolking verdubbeld is. Als je terug gaat in de tijd, geeft de verdubbelingstijd aan na hoeveel tijd de bevolking gehalveerd is. Dus de bevolkingsgrootte is ongeveer 30 miljoen in het jaar 1935 ($1980 - 44,4$).

T-2a $f'(x)=0,5\mathrm{e}^{0,5x+3}$

b $g'(x)=3x^2\cdot\mathrm{e}^{-x+3}+x^3\cdot-\mathrm{e}^{-x+3}=3x^2\cdot\mathrm{e}^{-x+3}-x^3\cdot\mathrm{e}^{-x+3}=(3x^2-x^3)\cdot\mathrm{e}^{-x+3}$

c $h'(x)=\dfrac{x\cdot 3\mathrm{e}^{2x}\cdot 2-3\mathrm{e}^{2x}\cdot 1}{x^2}=\dfrac{6x\cdot\mathrm{e}^{2x}-3\mathrm{e}^{2x}}{x^2}=\dfrac{(6x-3)\cdot\mathrm{e}^{2x}}{x^2}$

d $k(x)=\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{2x+1}=\mathrm{e}^{3x+1}$, $k'(x)=3\mathrm{e}^{3x+1}$

T-3a $f'(x)=\dfrac{1}{-2x}\cdot-2=\dfrac{1}{x}$

b $g'(x)=\dfrac{1}{6-2x}\cdot-2=\dfrac{-2}{6-2x}=\dfrac{-1}{3-x}$

c $h'(x)=\dfrac{1}{x}\cdot(\ln x-2)+(\ln x-1)\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{2}{x}+\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2\ln x}{x}-\dfrac{3}{x}$

d $k'(x)=\frac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2-3x}\cdot-3=\dfrac{-3}{4-6x}$

e $l'(x)=-2\mathrm{e}^{-2x}\cdot(\ln x)^2+\mathrm{e}^{-2x}\cdot 2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}=-2\mathrm{e}^{-2x}\cdot(\ln x)^2+\dfrac{2\mathrm{e}^{-2x}\ln x}{x}$

f $m'(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\cdot(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$

T-4a $h'(x)=3\cdot 2^x\cdot\ln 2=3\ln 2\cdot 2^x$

b $g'(x)=3-2^{-x}\cdot\ln 2\cdot-1=3+\ln 2\cdot 2^{-x}$

c $f'(x)=3^{1-2x}\cdot-2\cdot\ln 3=-2\ln 3\cdot 3^{1-2x}$

d $k'(x)=(\sqrt{5})^x\cdot\ln\sqrt{5}=\frac{1}{2}\ln 5\cdot(\sqrt{5})^x$

e $l'(x)=\dfrac{1}{3x^2\cdot\ln 3}\cdot 6x=\dfrac{6}{\ln 3\cdot 3x}=\dfrac{2}{x\ln 3}$

f $m'(x)=2x\cdot{}^5\log(2x)+x^2\cdot\dfrac{1}{2x\ln 5}\cdot 2=2x\cdot{}^5\log(2x)+\dfrac{x}{\ln 5}$

T-5a $F(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x+1}+C$

b $G(x)=-\dfrac{1}{\ln 3}\cdot 3^{1-x}+C$

c $H(x)=-\frac{1}{3}\ln|3x+2|+C$

d $J(x)=x+\dfrac{1}{\ln 3}\cdot 3^{-2x}+C$

e $K(x)=2(x-1)^{-3}+\dfrac{1}{x-1}$, $K(x)=-(x-1)^{-2}+\ln|x-1|+C=\dfrac{-1}{(x-1)^2}+\ln|x-1|+C$

f $L(x)=\frac{3}{4}\ln|4x-9|+C$

bladzijde 33

T-6a $g_{\text{per dag}}=\mathrm{e}^{-0,006}=0,994$

b Oplossen van $20=40\cdot\mathrm{e}^{-0,006t}$ geeft $\frac{1}{2}=\mathrm{e}^{-0,006t}$ en dus

$-0,006t=\ln\frac{1}{2}\Rightarrow t=\dfrac{\ln\frac{1}{2}}{-0,006}\approx 115,52$ dagen.

Dus na 116 dagen is het vermogen gehalveerd.

c $P'=40\cdot\mathrm{e}^{-0,006t}\cdot-0,006=-0,24\mathrm{e}^{-0,006t}$ en $P'=-0,24\mathrm{e}^{-0,006\cdot 100}=-0,132$ watt per dag.

T-7a $f'(x) = (4x+3) \cdot e^{-x} + (2x^2+3x) \cdot -e^{-x} = (4x+3) \cdot e^{-x} - (2x^2+3x) \cdot e^{-x} =$
$(-2x^2+x+3) \cdot e^{-x}$.

b De raaklijn gaat door $(0,0)$ dus is van de vorm $y = ax$ met $a = f'(0) = 3 \cdot 1 - 0 = 3$.
De raaklijn in O is dus $y = 3x$.

c $f'(x) = 0$ oplossen geeft achtereenvolgens
$(-2x^2+x+3) \cdot e^{-x} = 0$
$-2x^2+x+3 = 0$
$x^2 - \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2} = 0$
$(x+1)(x-1\frac{1}{2}) = 0$
$x = -1$ of $x = 1\frac{1}{2}$

De uiterste waarden van f zijn $f(-1) = -e$ en $f(1\frac{1}{2}) = 9e^{-1\frac{1}{2}} = \dfrac{9}{e\sqrt{e}}$.

d Snijpunten bepalen: $f(x) = g(x)$ oplossen geeft achtereenvolgens
$(2x^2+3x)e^{-x} = -e^{-x}$
$2x^2+3x = -1$
$2x^2+3x+1 = 0$
$x^2 + 1\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0$
$(x+1)(x+\frac{1}{2}) = 0$
$x = -1$ of $x = -\frac{1}{2}$
De oppervlakte van het ingesloten gebied is $\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left(g(x) - f(x)\right)dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} -e^{-x} - (2x^2+3x) \cdot e^{-x}\ dx$.
Met de GR vind je de oppervlakte 0,09.

T-8a $f'(x) = -2 + \dfrac{6}{x}$, $f'(x) = 0$ oplossen geeft $-2 + \dfrac{6}{x} = 0$ waaruit volgt $\dfrac{6}{x} = 2$ en dus $x = 3$.
De coördinaten van de top van de grafiek van f zijn $(3, -6+6\ln 3)$.

b $f'(x) = 18$ oplossen geeft $-2 + \dfrac{6}{x} = 18$ waaruit volgt $\dfrac{6}{x} = 20$ en dus $x = 0{,}3$.
De coördinaten van het punt op de grafiek waar de helling gelijk is aan 18 zijn
$(0{,}3; -7{,}82)$.

c $f'(1) = -2+6 = 4$ dus $y = ax+b = 4x+b$. Invullen van het punt $(1,-2)$ levert
$-2 = 4 \cdot 1 + b$ en dus $b = -6$. De vergelijking van de raaklijn is dus $y = 4x-6$.
Hiermee vind je $A(1\frac{1}{2}, 0)$ en $B(0,-6)$. De oppervlakte van de driehoek OAB is dus
$\text{opp} = \frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 6 = 4\frac{1}{2}$.

T-9a $f(x) = 0$ als $2 + 2\ln x = 0$. Dit geeft $2\ln x = -2$ waaruit volgt $\ln x = -1$ en dus
$x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.

b Verticale asymptoot: $x = 0$, horizontale asymptoot: $y = 0$.

c $f'(x) = \dfrac{x \cdot \frac{2}{x} - (2+2\ln x) \cdot 1}{x^2} = \dfrac{2-2-2\ln x}{x^2} = \dfrac{-2\ln x}{x^2}$
$f'(x) = 0$ als $-2\ln x = 0$. Dit geeft $\ln x = 0$ en dus $x = 1$. De uiterste waarde van f is
$f(1) = \dfrac{2+0}{1} = 2$. Dus een maximum 2 voor $x = 1$.

d $F'(x) = 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x} + 2 \cdot \dfrac{1}{x} = (2+2\ln x) \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{2+2\ln x}{x} = f(x)$

e $A(p) = \int_{e^{-1}}^{p} f(x)\,dx = \left[(\ln x)^2 + 2\ln x\right]_{e^{-1}}^{p} = (\ln p)^2 + 2\ln p - (1-2) = (\ln p)^2 + 2\ln p + 1$

f $A(p)=4$ geeft $(\ln p)^2+2\ln p+1=4$. Toepassen van de substitutie $u=\ln p$ geeft achtereenvolgens
$u^2+2u+1=4$
$u^2+2u-3=0$
$(u-1)(u+3)=0$
$u=1$ of $u=-3$
$\ln p=1$ geeft $p=\mathrm{e}$ en $\ln p=-3$ geeft $p=\mathrm{e}^{-3}$. Alleen de eerste oplossing is in deze situatie van toepassing. Dus $p=\mathrm{e}$.