Blok 3 - Vaardigheden

bladzijde 176

1a $(x^2+4)(4-x)\geq 0$

$4-x\geq 0$

$x\leq 4$

Dus is het domein van *f*: $\langle\leftarrow, 4]$

b $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{(x^2+4)(4-x)}}\cdot(2x(4-x)+(x^2+4)\cdot -1)=-\dfrac{3x^2-8x+4}{2\sqrt{(x^2+4)(4-x)}}$

c Stel $f'(x)=0$ dan volgt $3x^2-8x+4=0\Leftrightarrow(3x-2)(x-2)=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$ of $x=2$.

$f(\frac{2}{3})=\sqrt{\left(\frac{4}{9}+4\right)\left(4-\frac{2}{3}\right)}=\sqrt{\frac{40}{9}\cdot\frac{10}{3}}=\dfrac{20}{3\sqrt{3}}$ en $f(2)=\sqrt{(4+4)(4-2)}=4$

Dus zijn $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{20}{3\sqrt{3}}\right)$ en $(2,4)$ de punten met een horizontale raaklijn.

d $\pi\int_0^4\left(f(x)\right)^2\,dx=\pi\int_0^4(x^2+4)(4-x)\,dx=$

$\int_0^4 4x^2+16-x^3-4x\,dx=\left[\frac{4}{3}x^3+16x-\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_0^4=$

$(\frac{256}{3}+64-64-32)=53\frac{1}{3}\pi$

2a $x^2-4x\sqrt{x}+4x=0\Leftrightarrow x(x-4\sqrt{x}+4)=0$

$x=0$ of $x-4\sqrt{x}+4=0$

$x=0$ of $(\sqrt{x}-2)^2=0$

$x=0$ of $\sqrt{x}=2$

$x=0$ of $x=4$

b $f'(x)=2x-6\sqrt{x}+4=2(x-3\sqrt{x}+2)$

Uit $x-3\sqrt{x}+2=0$ volgt $(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)=0$.

Dus geldt: $x=1$ of $x=4$.

c In het randpunt $(0,0)$ geldt $f'(0)=4$. De raaklijn heeft vergelijking $y=4x$.

d Oppervlakte =

$\int_0^4(x^2-4x\sqrt{x}+4x)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3-4\cdot\frac{2}{5}\cdot x^{2\frac{1}{2}}+2x^2\right]_0^4=\frac{1}{3}\cdot 64-\frac{8}{5}\cdot 32+32=2\frac{2}{15}$

3a $f_{-2}(x)=\ln^2 x-2\ln x\Rightarrow f'_{-2}(x)=2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x}=2\cdot\dfrac{\ln x-1}{x}$

$f'_{-2}(x)=0\Rightarrow\ln x=1$ en dus is $x=e$. De top is $(e,\ f(e))=(e,-1)$.

b $f''_{-2}(x)=2\cdot\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-(\ln x-1)\cdot 1}{x^2}=2\cdot\dfrac{2-\ln x}{x^2}$

$f''_{-2}(x)=0$ als $x=e^2$. Dus is $(e^2,\ f(e^2))=(e^2,\ 0)$ het buigpunt.

c De buigraaklijn heeft helling $f'_{-2}(e^2) = 2 \cdot \dfrac{2-1}{e^2} = \dfrac{2}{e^2}$

De buigraaklijn heeft vergelijking $y = \dfrac{2}{e^2}(x - e^2) + 0 = \dfrac{2}{e^2} \cdot x - 2$.

d $F'_{-2}(x) = 1 \cdot \ln^2 x + x \cdot 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x} - 4\ln x - 4x \cdot \dfrac{1}{x} + 4 =$

$\ln^2 x + 2\ln x - 4\ln x - 4 + 4 = \ln^2 x - 2\ln x = f_{-2}(x)$

e Het gevraagde gebied ligt onder de x-as dus

Oppervlakte = $-\int_1^{e^2} \ln^2 x - 2\ln x \, dx = -\Big[x\ln^2 x - 4x\ln x + 4x\Big]_1^{e^2} =$

$-(e^2 \cdot 2^2 - 4 \cdot e^2 \cdot 2 + 4e^2) + (0 - 0 + 4) = 4$

f De nulpunten van $f_p(x) = \ln x \cdot (\ln x + p)$ zijn $x = 1$ en $x = e^{-p}$.

Voor $p \neq 0$ vallen deze niet samen en zijn er twee verschillende nulpunten, voor $p = 0$ vallen deze wel samen en is er dus maar één nulpunt.

g Stel $f'_p(x) = \dfrac{2\ln x}{x} + \dfrac{p}{x} = 0$ dan is $\ln x = -\frac{1}{2}p$ en geldt $x_{Top} = e^{-\frac{1}{2}p}$.

Dan is $y_{Top} = f_p(e^{-\frac{1}{2}p}) = (-\frac{1}{2})^2 + p \cdot -\frac{1}{2}p = -\frac{1}{4}p^2$.

De top is dus $\left(e^{-\frac{1}{2}p}, -\frac{1}{4}p^2\right)$

Tenslotte geldt: $g(x_{Top}) = g(e^{-\frac{1}{2}p}) = -(\ln e^{-\frac{1}{2}p})^2 = -(-\frac{1}{2}p)^2 = -\frac{1}{4}p^2 = y_{Top}$, dus ligt de top op de grafiek van $g(x)$.

bladzijde 177

4a $2 + \cos x \neq 0$ voor elke waarde van x.

b $f'(x) = \dfrac{\cos x \cdot (2 + \cos x) - \sin x \cdot -\sin x}{(2 + \cos x)^2} = \dfrac{2\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(2 + \cos x)^2} = \dfrac{1 + 2\cos x}{(2 + \cos x)^2}$

c Uit $f'(x) = 0$ volgt $1 + 2\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$.

d $f''(x) = \dfrac{-2\sin x \cdot (2 + \cos x)^2 - (1 + 2\cos x) \cdot 2 \cdot (2 + \cos x) \cdot -\sin x}{(2 + \cos x)^4} =$

$\dfrac{-2\sin x \cdot (2 + \cos x) + (1 + 2\cos x) \cdot 2\sin x}{(2 + \cos x)^3} =$

$\dfrac{-4\sin x - 2\sin x\cos x + 2\sin x + 4\sin x\cos x}{(2 + \cos x)^3} =$

$\dfrac{-2\sin x + 2\sin x\cos x}{(2 + \cos x)^3} = \dfrac{-2\sin x + \sin 2x}{(2 + \cos x)^3}$

e Voor de buigpunten moet gelden $f''(x) = 0$. Dit is het geval als $\sin x = 0$ of als $\cos x = 1$.

Als $\sin x = 0$ dan is ook $f(x) = 0$ en dus liggen de bijbehorende buigpunten op de x-as.

Als $\cos x = 1$ dan geldt .. $x = 0$ of $x = 2\pi$ .. dus ook dan is $f(x) = 0$ en dus liggen de hierbij behorende buigpunten ook op de x-as.

5a Uit $f(x) = (2\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$ volgt $\sin x = -\frac{1}{2}$ of $\sin x = 1$. Op het domein geeft dit de nulpunten $x = -\frac{1}{6}\pi$ of $x = 1\frac{1}{6}\pi$ of $x = \frac{1}{2}\pi$.

Met behulp van de grafiek vind je dat $f(x) < 0$ is voor $-\frac{1}{6}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$ of $\frac{1}{2}\pi < x < 1\frac{1}{6}\pi$.

b $f'(x) = 4\sin x\cos x - \cos x = \cos x \cdot (4\sin x - 1) = 0 \Rightarrow \cos x = 0$ of $\sin x = \frac{1}{4}$

c $\cos x = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}\pi$ of $x = \frac{1}{2}\pi x = 1\frac{1}{2}\pi$

$f(-\frac{1}{2}\pi) = 2\cdot(-1)^2 - -1 - 1 = 2$; $f(\frac{1}{2}\pi) = 2\cdot(1)^2 - 1 - 1 = 0;$

$f(-1\frac{1}{2}\pi) = 2\cdot(-1)^2 - -1 - 1 = 2$

Als $\sin x = \frac{1}{4}$ dan is $f(\sin x = \frac{1}{4}) = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = \frac{2}{16} - \frac{1}{4} - 1 = -1\frac{1}{8}$.

d $F'(x) = -\frac{1}{2}\cdot\cos 2x \cdot 2 - \sin x = -\cos 2x - \sin x = -(1 - 2\sin^2 x) - \sin x = 2\sin^2 x - \sin x - 1 = f(x)$

Dus *F* is een primitieve van *f*.

e Oppervlakte A = Oppervlakte B als Oppervlakte A – Oppervlakte B = 0 Dus als

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x - \left(-\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} f(x)\,\mathrm{d}x\right) = 0 \Rightarrow \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\tfrac{1}{2}\sin 2x + \cos x\right]_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} = (-\tfrac{1}{2}\sin\pi + \cos\tfrac{1}{2}\pi) - (-\tfrac{1}{2}\sin(-\pi) + \cos(-\tfrac{1}{2}\pi) =$$

$0 + 0 - (0 + 0) = 0$.

Dus geldt Oppervlakte A = Oppervlakte B.

6a $f(x) = 12\cdot(x^2+4)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = 12\cdot -\frac{1}{2}\cdot(x^2+4)^{-1\frac{1}{2}}\cdot 2x = -12x\cdot(x^2+4)^{-1\frac{1}{2}}$

$f''(x) = -12\cdot(x^2+4)^{-1\frac{1}{2}} + -12x \cdot -1\frac{1}{2}\cdot(x^2+4)^{-2\frac{1}{2}}\cdot 2x =$

$$\frac{-12}{(x^2+4)^{1\frac{1}{2}}} + \frac{36x^2}{(x^2+4)^{2\frac{1}{2}}} = \frac{-12(x^2+4)+36x^2}{(x^2+4)^{2\frac{1}{2}}} = \frac{24x^2-48}{(x^2+4)^{2\frac{1}{2}}} = \frac{-12(4-2x^2)}{(x^2+4)^{2\frac{1}{2}}}$$

b Uit $f''(x) = 0$ volgt $x^2 = 2$. Omdat $x > 0$ geldt voor het buigpunt $x = \sqrt{2}$.

$f(\sqrt{2}) = \dfrac{12}{\sqrt{2+4}} = \dfrac{12}{\sqrt{6}} = \dfrac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}$. Dus is $(\sqrt{2}, 2\sqrt{6})$ het buigpunt.

c Voor het spiegelbeeld van de grafiek van *f* geldt $x = \dfrac{12}{\sqrt{y^2+4}} \Rightarrow x^2 = \dfrac{144}{y^2+4}$.

Dus geldt $y^2 + 4 = \dfrac{144}{x^2}$ en is $y^2 = \dfrac{144}{x^2} - 4 = \dfrac{144}{x^2} - \dfrac{4x^2}{x^2} = \dfrac{144-4x^2}{x^2}$

Dus is de grafiek van $g(x) = \sqrt{\dfrac{144-4x^2}{x^2}}$ het spiegelbeeld van de grafiek van *f*.

d In plaats van te wentelen om de *y*-as kun je de grafiek van *g* wentelen om de *x*-as.
Het interval [1, 6] op de *y*-as gaat dan over in het interval [1, 6] op de *x*-as.
Inhoud =

$$\pi\int_1^6 \left(\sqrt{\frac{144-4x^2}{x^2}}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi\int_1^6 \frac{144-4x^2}{x^2} = \int_1^6 (144\cdot x^{-2} - 4)\,\mathrm{d}x = \pi\left[144\cdot -x^{-1} - 4x\right]_6 =$$

$\pi\left[(-24-24) - (-144-4)\right] = 100\pi$.

bladzijde 178

7a Uit $y = t + \frac{4}{t} - 5 = 0$ volgt $t^2 + 4 - 5t = 0$.

$(t-1)(t-4) = 0$

$t = 1$ of $t = 4$

$x(1) = \frac{1}{4} - 3 = -2\frac{3}{4}$ en $x(4) = \frac{1}{4} \cdot 16 - 3 \cdot 4 = -8$

Dus zijn de snijpunten met de x-as: $(-8,\ 0)$ en $(-2\frac{3}{4},\ 0)$.

$x = \frac{1}{4}t^2 - 3t = 0$ volgt $t = 12$ ($t = 0$ voldoet niet)

$y(12) = 12 + \frac{1}{3} - 5 = 7\frac{1}{3}$.

Dus is $(0,\ 7\frac{1}{3})$ het snijpunt met de y-as.

b Uit $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}t - 3 = 0$ volgt $t = 6$

Uit $\frac{dy}{dt} = 1 - \frac{4}{t^2} = 0$ volgt $t = 2$ ($t = -2$ voldoet niet)

Uit bovenstaande volgt dat er een verticale raaklijn is in het punt $(x(6),\ y(6)) = (-9,\ 1\frac{2}{3})$ en er een horizontale raaklijn is in het punt $(x(2),\ y(2)) = (-5,\ -1)$.

c Als $t \downarrow 0$ dan $x \to 0$ en $y \to \infty$ en dus is $x = 0$ verticale asymptoot.

Als $t \to \infty$ dan $x \to \infty$ en $y \to \infty$ en dus is er geen horizontale asymptoot.

d Het linker snijpunt is het punt $(-8,\ 0)$ en hierbij hoort $t = 4$.

Voor de helling in een punt geldt $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \frac{4}{t^2}}{\frac{1}{2}t - 3}$ Invullen van $t = 4$ geeft

$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \frac{4}{16}}{\frac{1}{2} \cdot 4 - 3} = \frac{\frac{12}{16}}{-1} = -\frac{3}{4}$.

Dus is $y = -\frac{3}{4}(x + 8) + 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x - 6$ een vergelijking van de raaklijn.

e De grafiek van x als functie van t is een parabool met symmetrieas $t = 6$. Dus geldt $x(6 - p) = x(6 + p)$.

f In het punt P moet dan gelden $y(6 - p) = y(6 + p)$.

Uit $6 - p + \frac{4}{6-p} - 5 = 6 + p + \frac{4}{6+p} - 5$ volgt $-p + \frac{4}{6-p} = p + \frac{4}{6+p}$

$\frac{-p(6-p)}{6-p} + \frac{4}{6-p} = \frac{p(6+p)}{6+p} + \frac{4}{6+p}$

$\frac{-p(6-p)+4}{6-p} = \frac{p(6+p)+4}{6+p}$

$-p(6-p)(6+p) + 4(6+p) = p(6+p)(6-p) + 4(6-p)$

$-p(36-p^2) + 24 + 4p = p(36-p^2) + 24 - 4p$

$-36p + p^3 + 4p = 36p - p^3 - 4p$

$2p^3 - 64p = 0$

$p = 0$ of $p^2 = 32$

$p = 0$ voldoet niet want dit geeft het punt $(x(6),\ y(6)) = (-9,\ 1\frac{2}{3})$.

$p = \pm\sqrt{32} = \pm 4\sqrt{2}$ geeft het punt $(x(6 + 4\sqrt{2}),\ y(6 + 4\sqrt{2})) = (-1,\ 7)$ want:

$x(6 + 4\sqrt{2}) = \frac{1}{4}(6 + 4\sqrt{2})^2 - 3(6 + 4\sqrt{2}) = \frac{1}{4}(36 + 48\sqrt{2} + 32) - 18 - 12\sqrt{2} = -1$ en

$y(6 + 4\sqrt{2}) = 6 + 4\sqrt{2} + \frac{4}{6 + 4\sqrt{2}} - 5 = 6 + 4\sqrt{2} + \frac{4}{6 + 4\sqrt{2}} \cdot \frac{6 - 4\sqrt{2}}{6 - 4\sqrt{2}} - 5 = 7$

Dus $p = 4\sqrt{2}$ of $p = -4\sqrt{2}$.

g De snijpunten van K met de x-as krijg je voor $t = 1$ en voor $t = 4$.

De lengte van dat deel van $K = \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt =$

$\int_1^4 \sqrt{(\frac{1}{2}t - 3)^2 + (1 - \frac{4}{t^2})^2}\ dt \approx 5{,}762$

De integraal benader je met de GR.

8a $d(A, O) = \sqrt{(x-0)^2 + (\sqrt{16 - x^2} - 0)^2} = \sqrt{x^2 + 16 - x^2} = \sqrt{16} = 4$

b Stel X is een willekeurig punt van de grafiek van f_p, dan $X\ (x, \sqrt{16 + px - x^2}\ )$.

Dan geldt voor de afstand van X tot $M\ (\frac{1}{2}p, 0)$:

$d(X, M) = \sqrt{(x - \frac{1}{2}p)^2 + (\sqrt{16 + px - x^2} - 0)^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{1}{4}p^2 + 16 + px - x^2} = \sqrt{16 + \frac{1}{4}p^2}$.

Dus is deze afstand een constante bij gegeven p en daarmee ligt X op een cirkel met middelpunt M.

c $f_6(x) = \sqrt{16 + 6x - x^2}$ Domein van f:

$16 + 6x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 - 9 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow$
$(x-3)^2 - 25 \leq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 \leq 25 \Leftrightarrow\ -5 \leq x - 3 \leq 5 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 8$

Dus is het domein $[-2, 8]$.

d Inhoud $= \pi \int_{-2}^{8} f_6(x)\, dx = \int_{-2}^{8} (16 + 6x - x^2)\ dx = \pi\left[16x + 3x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{\ \ 8} = 166\frac{2}{3}\pi$

Of met de formule $\frac{4}{3}\pi r^3$ voor de inhoud van een bol: $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 = \frac{500}{3}\pi = 166\frac{2}{3}\pi$.

e Dan moet $f_p(16) = 0$. Dan geldt

$16 + p \cdot 16 - 16^2 = 0$
$16p - 240 = 0$
$16p = 240$
$p = 15$

f De toppen liggen steeds boven het middelpunt $M(\frac{1}{2}p, 0)$.

Voor de straal r geldt $r = \sqrt{16 + \frac{1}{4}p^2}$.

Dus is $(\frac{1}{2}p, \sqrt{16 + \frac{1}{4}p^2})$ de top.

Invullen van de coördinaten van de top in $y = \sqrt{16 + x^2}$ geeft

$\sqrt{16 + (\frac{1}{2}p)^2} = \sqrt{16 + \frac{1}{4}p^2}$ en dus liggen de toppen op de grafiek van g.

bladzijde 179

9a $\tan\alpha = \frac{AC}{AP} = \frac{50}{x}$ en $\tan\beta = \frac{AB}{AP} = \frac{20}{x}$

b $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta} =$

$$\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{1 + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

c $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\dfrac{50}{x}-\dfrac{20}{x}}{1+\dfrac{50}{x}\cdot\dfrac{20}{x}}=\dfrac{\dfrac{30}{x}}{1+\dfrac{1000}{x^2}}=\dfrac{30}{x+\dfrac{1000}{x}}=\dfrac{30x}{x^2+1000}$

d De grafiek van $y=\tan x$ is stijgend op het interval $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$ dus als

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{30x}{x^2+1000}$ maximaal is, is ook de kijkhoek maximaal.

e $f'(x)=\dfrac{30(x^2+1000)-30x\cdot 2x}{(x^2+1000)^2}=\dfrac{30\,000-30x^2}{(x^2+1000)^2}$

Dan is *f* maximaal als $x^2=1000$. In deze situatie is dat het geval als

$x=\sqrt{1000}\approx 31,62$ meter.

f $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{30\cdot\sqrt{1000}}{1000+1000}=\dfrac{300\sqrt{10}}{2000}=\dfrac{3\sqrt{10}}{20}\Rightarrow \alpha-\beta\approx 25^\circ$

De kijkhoek is dus maximaal 25°.