ICT - Cycloïden en andere bewegingen

bladzijde 180

1a $P(0,4)$

b Als de middelpuntshoek 1 radiaal is, is de bijbehorende booglengte: $\frac{1}{2\pi}\cdot$ omtrek $\frac{1}{2\pi}\cdot 4\pi = 2$ meter. Per seconde wordt er over 1 radiaal gedraaid en wordt er dus 2 meter afgelegd.
Dus is de snelheid 2 m/s.

c $\sin\angle PMQ = \dfrac{PQ}{MP}$ geeft $\sin t = \dfrac{PQ}{2}$ en dus is $PQ = 2\sin t$

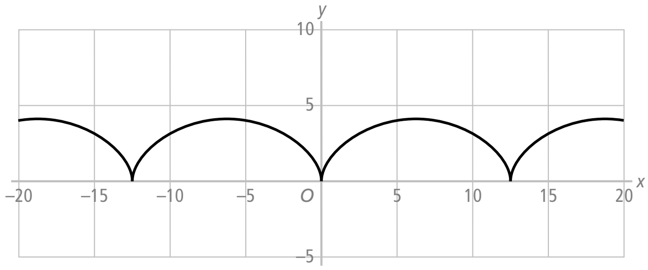
$\cos\angle PMQ = \dfrac{MQ}{MP}$ geeft $\cos t = \dfrac{MQ}{2}$ en dus is $MQ = 2\cos t$

d Het wiel beweegt met 2 m/s dus na t seconden is er horizontaal 2t meter afgelegd.
De hoogte van het middelpunt is constant 2 m. Dus $M(2t,2)$.

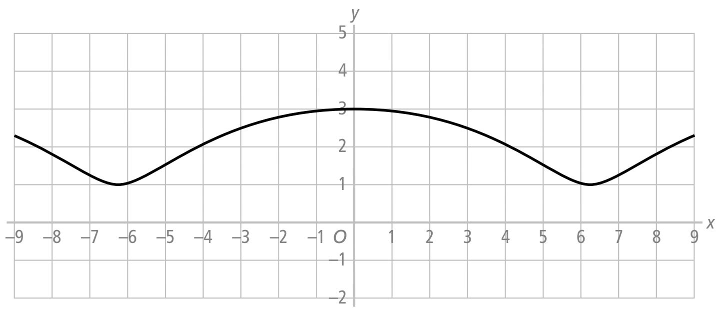
e $x_P = x_M + PQ = 2t + 2\sin t$ en $y_P = y_M + MQ = 2 + 2\cos t$

2a Gebruik de resultaten van de vorige opdracht: $x_Q = x_M - 2\sin t = 2t - 2\sin t$ en $y_Q = y_M - 2\cos t = 2 - 2\cos t$.

Dus voor Q geldt $\begin{cases} x = 2t - 2\sin t \\ y = 2 - 2\cos t \end{cases}$



b $x_R = x_M + \frac{1}{2}\cdot PQ = 2t + \frac{1}{2}\cdot 2\sin t = 2t + \sin t$ en
$y_R = y_M + \frac{1}{2}\cdot MQ = 2 + \frac{1}{2}\cdot 2\cos t = 2 + \cos t$



Bladzijde 181

3a $x = 2t + 2\sin t$ geeft $\dfrac{dx}{dt} = 2 + 2\cos t$

$y = 2 + 2\cos t$ geeft $\dfrac{dy}{dt} = -2\sin t$

b $v(t) = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(2 + 2\cos t)^2 + (-2\sin t)^2} = \sqrt{8 + 8\cos t}$

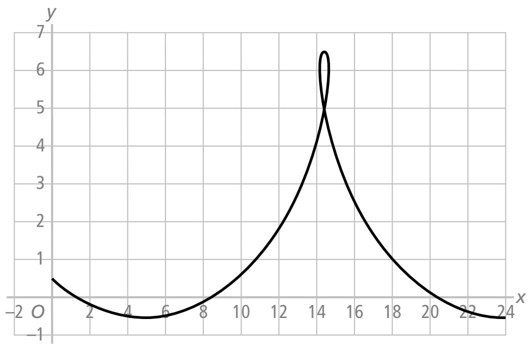
c De grafiek van v moet in een assenstelsel met een horizontale t-as worden getekend en verticaal worden moet m/s worden uitgezet.
Het assenstelsel van opdracht 1 heeft een horizontale x-as en een verticale as in meters.

d Als $8 + 8\cos t$ minimaal is, is ook $v(t)$ minimaal. Dit is het geval als $\cos t = -1$ dus als $t = \pi + k \cdot 2\pi$ (k = geheel getal).
Als $8 + 8\cos t$ maximaal is, is ook $v(t)$ maximaal. Dit is het geval als $\cos t = 1$ en dus als $t = k \cdot 2\pi$ (k = geheel getal).

4a In dat geval moet b kleiner zijn dan a.

b Dan is b groter dan a.

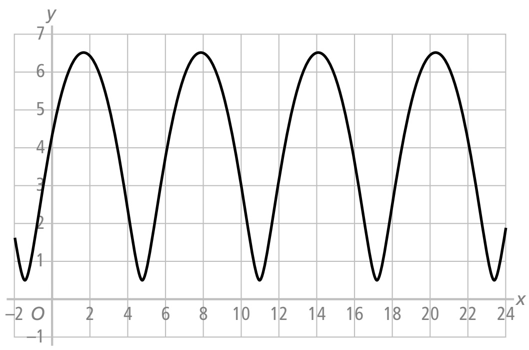
c Neem bijvoorbeeld $a = 3$ en $b = 3,5$.



d Omdat de grafiek een lus heeft.

e $\dfrac{dx}{dt} = 3 + 3,5\sin t$ en $\dfrac{dy}{dt} = -3,5\cos t$

f $v = \sqrt{(3 + 3,5\sin t)^2 + (-3,5\cos t)^2}$



Er kan niet aan de baansnelheid worden gezien dat het punt zich achterwaarts beweegt.
De baansnelheid is altijd positief.

Bladzijde 182

5a Nadat je het bestand hebt geopend zie je dat $x = 0,8t + 0,2\sin 2t$ en $y = 0,4 + 0,2\cos 2t$
Dus moet gelden: $R = 0,8$, $r = 0,2$ en $p = 2$.
De lengte van de trappers is 0,2 en de afstand van de trapas tot de grond is 0,4.

b De waarde van p heeft te maken met het aantal omwentelingen van de trappers per afgelegde afstand. Dus bij een lagere versnelling wordt p groter.

c Alleen vooruit.

d $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ want die geeft de snelheid in horizontale richting van een trapper. Als $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} < 0$ is dan bewegen de trapper achterwaarts.

e Als $x = Rt - r\cos pt$ dan is $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} = R + r\sin pt$. Als $R + pr\sin pt < 0$ r bewegen de trappers enige tijd achterwaarts. Dit is het geval als $\sin pt < -\frac{R}{pr}$.
Omdat $-1 < \sin x < 1$ heeft deze ongelijkheid een interval met oplossingen als $-1 < -\frac{R}{pr} < 1$.
Omdat R, r en p positieve constanten zijn geldt altijd $-\frac{R}{pr} < 1$.
Blijft over de ongelijkheid $-1 < -\frac{R}{pr}$ dus $1 > \frac{R}{pr}$ geeft $pr > R$.

6a $p = 4$ of $p = -4$

b Dan is de snelheid van verandering in horizontale en in verticale richting 0.
Als $pr = R$ voor een waarde van t dan is op dat moment de snelheid van verandering 0.

7a Na t seconden is er t meter langs een cirkel met straal 10 afgelegd.
De lengte van een cirkelboog met middelpuntshoek α is $\frac{\alpha}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot 10 = 10\alpha$.
Dan moet $10\alpha = t$ en is $\alpha = 0,1t$ en dus is MN na t seconden over $0,1t$ radialen gedraaid.

b De middelpuntshoek die bij booglengte t van een cirkel met straal 1 hoort is t radialen. Dus als de cirkel met middelpunt N langs een rechte lijn rolt over t meter draait NP over t radialen. Echter deze cirkel rolt langs de cirkel met middelpunt M en dan draait MN over $0,1t$. Dus draait NP over $t + 0,1t = 1,1t$ rad.

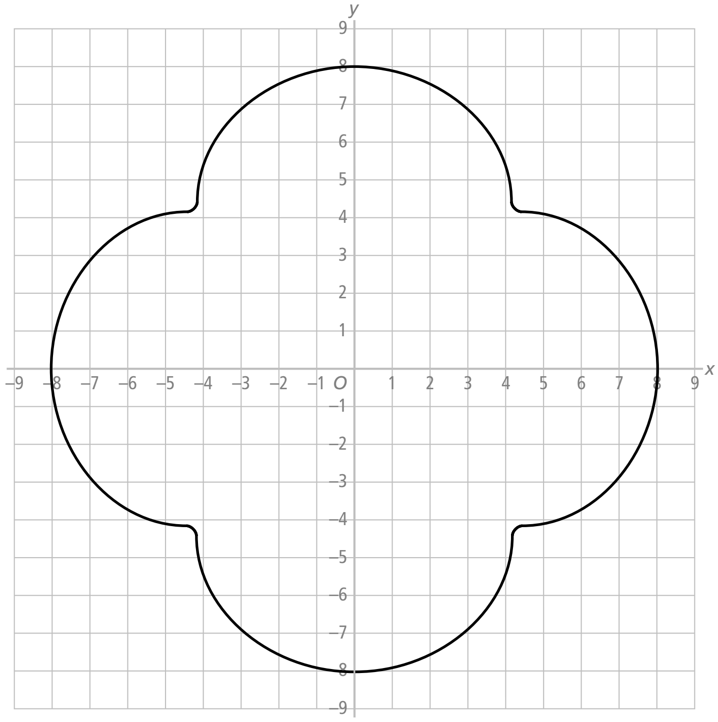
c N beweegt zich ten opzichte van M volgens $x = 11\sin 0,1t$ en $y = 11\cos 0,1t$
P beweegt zich ten opzichte van N volgens $x = \sin 1,1t$ en $y = \cos 1,1t$
Dus beweegt P ten opzichte van M volgens $\begin{cases} x = 11\sin 0,1t + \sin 1,1t \\ y = 11\cos 0,1t + \cos 1,1t \end{cases}$

d $x_Q = 11\sin 0,1t + \frac{1}{2}\sin 1,1t$
$y_Q = 11\cos 0,1t + \frac{1}{2}\cos 1,1t$

Bladzijde 183

8 Kies $R = 10$, $r = 3$ en $c = 17$

9a $x = 7\sin 0{,}25\pi t + \sin 1{,}25\pi t$
$y = 7\cos 0{,}25\pi t + \cos 1{,}25\pi t$



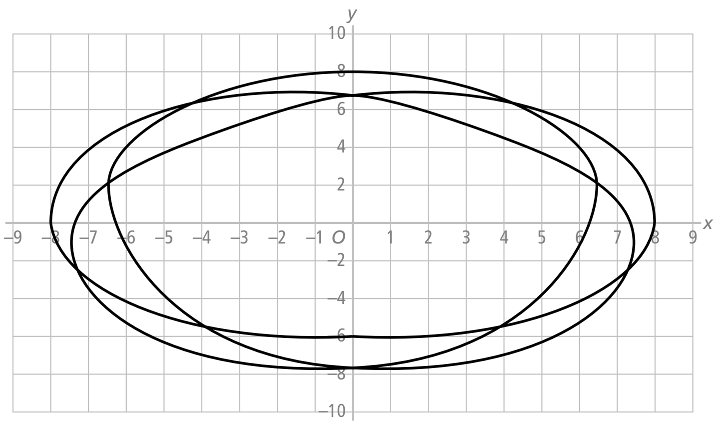
b $v(t) = \sqrt{\left(1\tfrac{3}{4}\pi\cos\tfrac{1}{4}\pi t + 1\tfrac{1}{4}\pi\cos 1\tfrac{1}{4}\pi t\right)^2 + \left(-1\tfrac{3}{4}\pi\sin\tfrac{1}{4}\pi t - 1\tfrac{1}{4}\pi\sin 1\tfrac{1}{4}\pi t\right)^2}$
Dit kun je met behulp van onder andere de somformules van paragraaf 2.2 herleiden

tot $v(t) = \frac{\pi}{4}\sqrt{74 + 70\cos\pi t}$.

c Minimaal als $\cos\pi t = -1$ dus als $t = 1 + k \cdot 2$ (k geheel).

d De maximale baansnelheid is $\cos\pi t = 1$ dus als $t = k \cdot 2$ (k geheel).

e $x = 7\sin\tfrac{2}{5}\pi t + \sin 1\tfrac{1}{15}\pi t$
$y = 7\cos\tfrac{2}{5}\pi t + \cos 1\tfrac{1}{15}\pi t$



f $v(t) = \sqrt{\left(2\tfrac{4}{5}\pi\cos\tfrac{2}{5}\pi t + 1\tfrac{1}{15}\pi\cos 1\tfrac{1}{15}\pi t\right)^2 + \left(-2\tfrac{4}{5}\pi\sin\tfrac{2}{5}\pi t - 1\tfrac{1}{15}\pi\sin 1\tfrac{1}{15}\pi t\right)^2}$

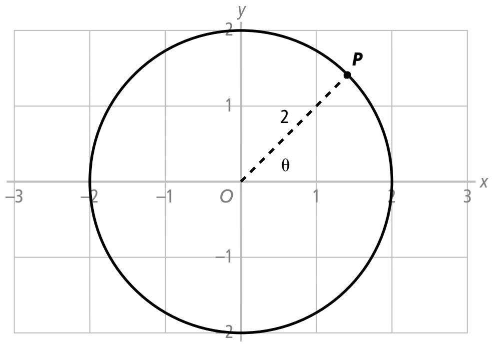
Dit kun je herleiden tot $v(t) = \frac{2\pi}{15}\sqrt{505 + 336\cos 1\tfrac{1}{3}\pi t}$.

Minimaal als $\cos 1\tfrac{1}{3}\pi t = -1$ dus als $t = \tfrac{3}{4} + k \cdot 1\tfrac{1}{2}$ (k geheel)
Maximaal als $\cos 1\tfrac{1}{3}\pi t = 1$ dus als $t = k \cdot 1\tfrac{1}{2}$ (k geheel)

Praktische opdracht - Poolvoorstellingen

Bladzijde 187

1a



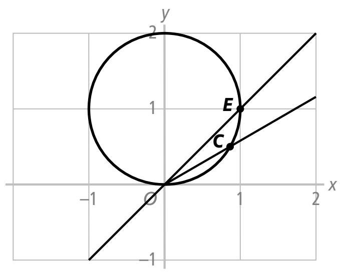
b $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$

c Voor de afstand van een punt $(x,\ y)$ op de cirkel tot $O(0, 0)$ geldt:

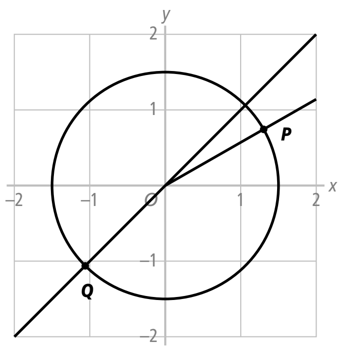
$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = 2$. Links en rechts kwadrateren geeft dan $x^2 + y^2 = 4$.

d -

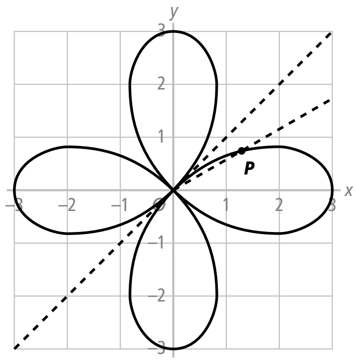
2



De kromme is de cirkel met middelpunt $(0, 1)$ en straal 1. Het punt C hoort bij $\theta = \frac{1}{6}\pi$ en bij $\theta = 2\frac{1}{6}\pi$. Het punt E hoort bij $\theta = 1\frac{1}{4}\pi$.



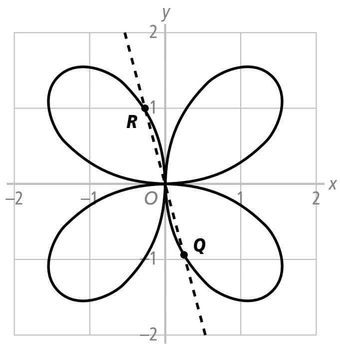
De kromme is de cirkel met middelpunt $(0, 0)$ en straal 1,5. Het punt P hoort bij $\theta = \frac{1}{6}\pi$ en bij $\theta = 2\frac{1}{6}\pi$. Het punt Q hoort bij $\theta = 1\frac{1}{4}\pi$.



Het punt R hoort bij $\theta = \frac{1}{6}\pi$ en bij $\theta = 2\frac{1}{6}\pi$. Het punt $(0, 0)$ hoort bij $\theta = 1\frac{1}{4}\pi$.

Bladzijde 188

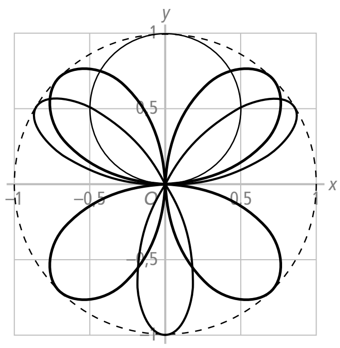
3a



b θ is wel gelijk aan $\frac{7}{12}\pi$, maar punt Q voldoet aan $r = \sin 2\theta = \sin 1\frac{1}{6}\pi = -0,5$, dus is $x = r\cos\theta = -0,5\cos\frac{7}{12}\pi = 0,13$ en $y = r\sin\theta = -0,5\sin\frac{7}{12}\pi = -0,48$. Dus ligt Q in het vierde kwadrant.

c Invullen van $r = \sin 2\theta$ in $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ geeft de gevraagde parametervoorstelling.

4a



Geplot zijn de grafieken voor $n = 1,\ 2$ en 3.
Voor $n = 1$ krijg je de cirkel met straat 0,5; voor $n = 2$ een kromme met vier bladen en voor $n = 3$ een kromme met drie bladen. Ook is de eenheidscirkel getekend. Alle punten van deze krommen liggen op of binnen de eenheidscirkel want $-1 \le \sin n\theta \le 1$ dus geldt $-1 \le r \le 1$.

b Maak een tabel met de waarden van n en het aantal blaadjes.

n	1	2	3	4	5	6
Aantal blaadjes	1	4	3	8	5	12

Voor n even is het aantal $2n$.
Voor n oneven is het aantal n.

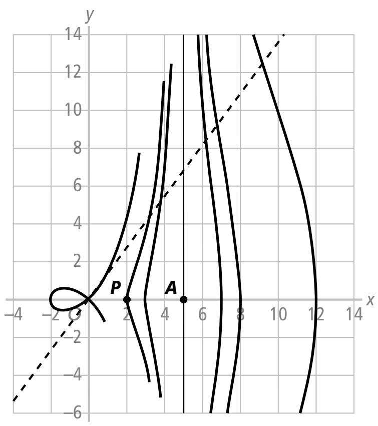
c Maak weer een tabel met de waarden van n en het aantal symmetrie assen.

n	1	2	3	4	5	6
Aantal symmetrieassen	1	4	3	8	5	12

Voor n even is het aantal $2n$.
Voor n oneven is het aantal n.

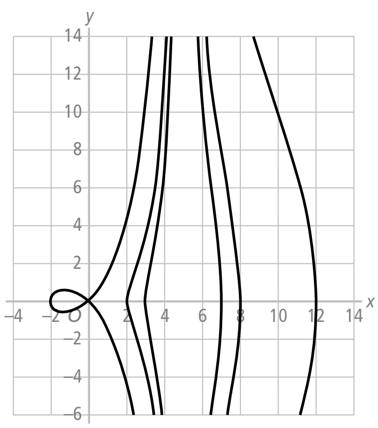
Bladzijde 189

5a



6a $\cos\theta = \dfrac{OA}{OA'} \Rightarrow OA' = \dfrac{OA}{\cos\theta} = \dfrac{a}{\cos\theta}$ en $r = OA' - P'A' = \dfrac{a}{\cos\theta} - p$

b



7