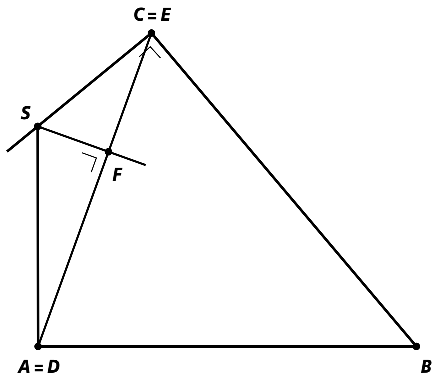
Verdieping - De Lijn van Wallace

bladzijde 124

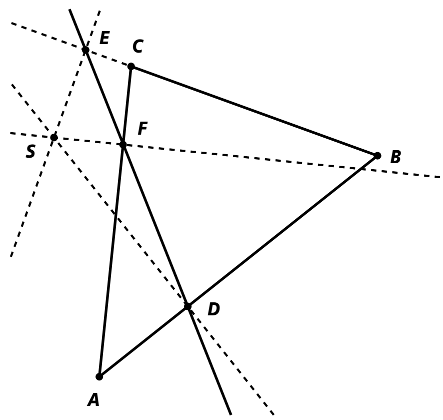
1abc -

d Nee, want als bijvoorbeeld D en F samenvallen dan geldt $D = F$ op AB en $F = D$ op AC, dus $A = D = F$ maar dan moet ook S met A samenvallen, dus ligt S niet buiten de driehoek en dat is in tegenspraak met het gegeven dat S buiten de driehoek ligt.



e Neem aan dat D met A samenvalt en E met C. Dan ligt S op de loodlijn
in A op AB en op de loodlijn in C op BC.
S is het snijpunt van deze twee loodlijnen.

f In het geval van opdracht e liggen D, E en F op één lijn. Maar ook wanneer D,E en F niet samenvallen met een hoekpunt is het met wat proberen mogelijk een punt S te vinden zodat D, E en F op één lijn liggen. Zoals in de tekening hiernaast.



2 - Neem bijvoorbeeld F tussen E en D, dan liggen de drie punten op één lijn als $\angle EFD = 180°$.
- Wanneer l een willekeurige lijn is met E, D en F aan dezelfde kant van l dan liggen E, D en F op één lijn als $\angle(l, ED) = \angle(l, EF)$.

bladzijde 125

3a In de figuur zitten de volgende koordenvierhoeken: $ABCS$ (want S ligt op de omtrek van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$), $SDBE$ ($\angle D + \angle E = 180°$), $SFCE$ en $ADFS$ ($\angle ADS = \angle AFS = 90°$).

b (1) $\angle SFE = \angle ECS$ omdat $SFCE$ een koordenvierhoek is. Wanneer je de omgeschreven cirkel erbij tekent is $\angle SFE = \angle ECS =$ boog SE.
(2) $ADFS$ is koordenvierhoek, dus $\angle DAS + \angle DFS = 180°$ geeft
$\angle DAS = 180° - \angle DFS$
$ABCF$ is koordenvierhoek dus $\angle DAS + \angle BCS = 180°$ geeft $\angle DAS = 180° - \angle BCS$
Samen geeft dit $\angle DFS = \angle BCS$.
(3) B, C en E op één lijn dus $\angle ECS + \angle BCS = 180°$

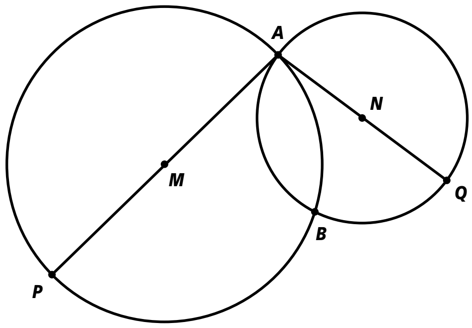
c (3) $\angle ECS + \angle BCS = 180°$ en (1) $\angle SFE = \angle ECS$ en (2) $\angle BCS = \angle DFS$
(1) en (2) in (3) invullen geeft $\angle SFE + \angle DFS = 180°$. Dus liggen de punten D, F en E op één lijn.

4a Wanneer $\angle ABC = 180°$ dan vormen AB en BC een gestrekte hoek en dus liggen A, B en C op één lijn.

b Wanneer BA en BC gelijke hoeken maken met lijn l dan zijn het overstaande hoeken en liggen A,B en C op één lijn.

c Bij een bewijs vanuit het ongerijmde ga je ervan uit dat C niet op de lijn door A en B ligt, of dat $\angle ABC \neq 180°$.

5a

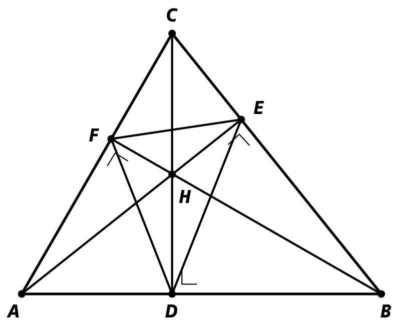


b $\angle PBA = 90°$ omtrekshoek op middellijn in cirkel c_1.
$\angle ABQ = 90°$ omtrekshoek op middellijn in cirkel c_2.
$\angle PBQ = \angle PBA + \angle ABQ = 90° + 90° = 180°$ dus P, B en Q liggen op één lijn.

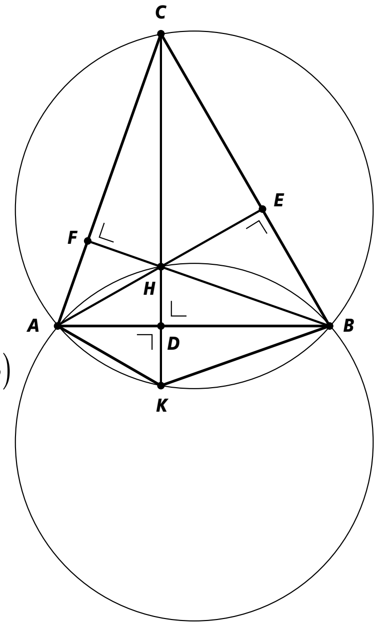
c De manier van opdracht 4a is gebruikt.

6 $ADFS$ is een koordenvierhoek dus $\angle ASD = \angle AFD = \frac{1}{2}$ boog AD (1).
$SFCE$ is een koordenvierhoek dus $\angle ESC = \angle EFC = \frac{1}{2}$ boog CE (2).
$ABCS$ is een koordenvierhoek dus $\angle BAS + \angle BCS = 180°$ geeft
$\angle DAS + \angle BCS = 180°$ (3) en
$\angle SCE + \angle BCS = 180°$ (4).
(3) en (4) geeft $\angle DAS = \angle SCE$
Uit $\angle SDA = \angle SEC = 90°$ en $\angle DAS = \angle SCE$ volgt dat $\angle ASD = \angle ESC$ (5).
(1) , (2) en (5) geven $\angle AFD = \angle EFC$ dus D, F en E liggen op één lijn.

7a - H is hoogtepunt in driehoek ABC.
- A is hoogtepunt van driehoek BCH, want HE = AE is hoogtelijn op BC,
BD = BA is hoogtelijn op CH en CF = CA is hoogtelijn op BH.
Deze hoogtelijnen snijden elkaar in A.
- Op dezelfde wijze kun je aantonen dat B hoogtepunt is van driehoek AHC en dat C hoogtepunt is van driehoek ABH.



b Het verlengde van CD snijdt de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ in punt K.



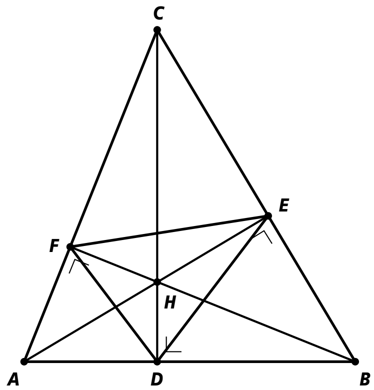
$$\left.\begin{array}{l}\angle EAB = 90° - \angle ABE \\ \angle DCB = 90° - \angle ABE\end{array}\right\}\angle EAB = \angle DCB\,(1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle DAK = \tfrac{1}{2}\,\text{boog } BK \\ \angle KCB = \tfrac{1}{2}\,\text{boog } BK\end{array}\right\}\angle DAK = \angle KCB = \angle DCB\,(2)$$

$$\left.\begin{array}{r}(1)\text{en}(2)\text{geeft}\angle EAB = \angle DAK \\ \angle ADH = \angle ADK = 90° \\ |AD| = |AD|\end{array}\right\}\triangle AHD \cong \triangle AKD\,(ZHZ)\,(3)$$

Op analoge wijze is te bewijzen dat $\triangle BHD \cong \triangle BKD\,(4)$
(3) en (4) geeft $\Delta AHB \cong \Delta AKB$.
De omgeschreven cirkel van ΔAHB heeft dus dezelfde straal als de omgeschreven cirkel van ΔAKB en dit is de omgeschreven cirkel van ΔABC .
Op analoge wijze kan dit voor de andere driehoeken bewezen worden, dus de omgeschreven cirkels van de driehoeken ABC, ABH, ACH en BCH hebben elk dezelfde straal.

c $\angle AFH = \angle ADH = 90°$ dus ADHF is een koordenvierhoek wat geeft
$\angle FAH = \tfrac{1}{2}\,\text{boog } FH = \angle FDH\,(1)$
$\angle BEH = \angle BDH = 90°$ dus $BDHE$ is een koordenvierhoek wat geeft
$\angle EBH = \tfrac{1}{2}\,\text{boog } EH = \angle EDH\,(2)$
$\angle FHA = \angle EHB$ (overstaande hoeken) wat geeft
$\angle FAH = 90° - \angle FHA = 90° - \angle EHB = \angle EBH\,(3)$
(1) , (2) en (3) geeft $\angle FDH = \angle EDH$ dus DH is deellijn in driehoek DEF.
Op analoge wijze kun je bewijzen dat EH en FH deellijnen zijn in driehoek DEF.



ICT - Kegelsneden tekenen

badzijde 128

1a Voor ieder punt C op de parabool als conflictlijn geldt: de afstand van C tot het brandpunt F is gelijk aan de afstand van C tot de richtlijn.
De afstand tot het brandpunt is CF en tot de richtlijn CV, dus $|CF| = |CV|$.
Het touwtje heeft lengte $|CF| + |CK| = |CV| + |CK| = |VK|$.

b Punt K ligt aan het eind van de liniaal, dus $|VK|$ = de lengte van de liniaal = constant.
Met $|CF| = |CV|$ uit opdracht a volgt
$|VK| = \text{constant} \Rightarrow |KC| + |CV| = \text{constant} \Rightarrow |KC| + |CF| = \text{constant}$.

bladzijde 129

2a Lat s hoort bij de richtlijn en punt B is het brandpunt.

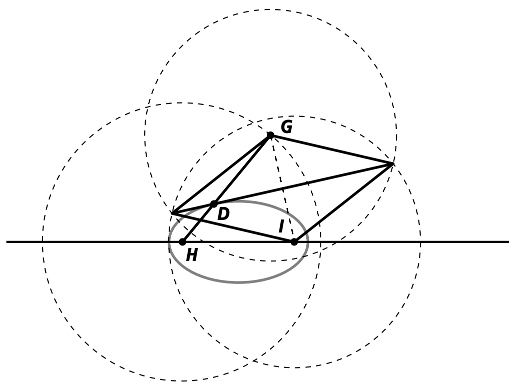
b De loodlijn is de lijn loodrecht op de richtingslijn, dus lat l.
De middelloodlijn hoort bij de punten B en G, dus de lat FH.

c De diagonalen van een ruit delen elkaar middendoor en staan loodrecht op elkaar.
De diagonalen van de ruit $BFGH$ zijn BG en FH, dus FH is een middelloodlijn op BG.

d FH is middelloodlijn op BG, dus met D op FH vormt ΔBDG een gelijkbenige driehoek. De zijden DB en DG hiervan vormen de benen en zijn even groot.
Omdat D ook op lat l ligt is DG de afstand van D tot de richtlijn. Punt D is dus een meetkundige plaats met als eigenschap dat de afstand tot B en lijn s gelijk zijn, en hoort dus bij een parabool als conflictlijn.

e Voer de gegeven stappen uit in GeoGebra.

3a Latje HG draait om H en heeft de rol van de straal van de richtcirkel.



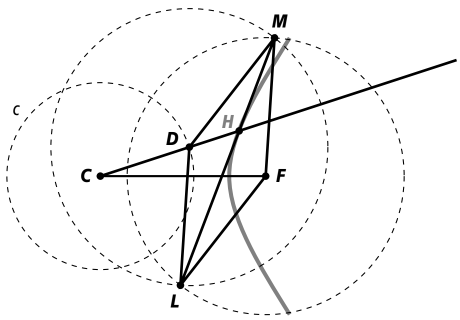
b Om in GeoGebra een ellipsograaf te construeren, voer je de volgende constructiestappen uit:

1 Teken twee punten H en I op een lijn.
2 Teken een cirkel c met middelpunt H en straal groter dan HI.
3 Teken G op c. Teken HG.
4 Teken lijnstuk GI.
5 Teken de ruit met behulp van twee even grote cirkels om G en I.
6 Teken in de ruit de diagonaal loodrecht op GI.
7 Kies ‘Snijpunt van (twee) objecten’ en selecteer de middelloodlijn en HG om snijpunt E te tekenen. Zet het spoor van E aan.
8 Sleep G de cirkel rond. Het spoor van E is de ellips.

Als de ellips niet volledig wordt getekend is de ruit te klein. De zijden van de ruit moeten groter zijn dan $\frac{1}{2}(r_c + |HI|)$.

bladzijde 130

4a De punt C en F zijn de brandpunten.
b Het deel CD van de lat die vastzit aan C heeft de rol van de straal van de richtcirkel.
c De diagonalen van een ruit delen elkaar middendoor en staan loodrecht op elkaar. In ruit $DLFM$ is diagonaal LM dus een middelloodlijn op DF. De middelloodlijn is de conflictlijn van de D en F, dus is de afstand van ieder punt H op LM tot D en F gelijk en geldt $|HD| = |HF|$.
d Om in GeoGebra een hyperbolograaf te construeren, voer je de volgende constructiestappen uit:



1 Teken twee punten C en F op een lijn.
2 Teken een cirkel c met middelpunt C en straal kleiner dan CF.
3 Teken D op c.
4 Teken de halfrechte vanuit C door D.
5 Teken de ruit met behulp van twee even grote cirkels om D en F.
6 Teken in de ruit de diagonaal LM.
7 Kies 'Snijpunt van (twee) objecten' en selecteer de diagonaal en de halfrechte om snijpunt H te tekenen. Zet het spoor van H aan.
8 Sleep D de cirkel rond. Het spoor van H is de hyperbool.

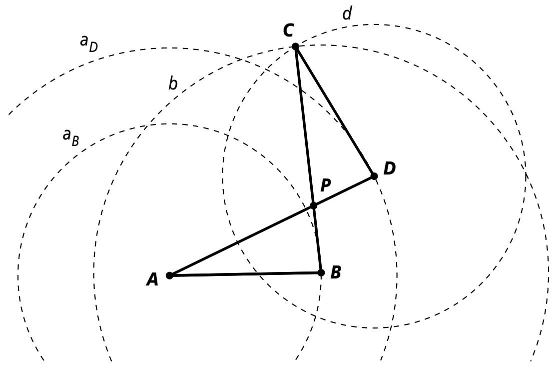
5a Twee driehoeken zijn congruent als hun overeenkomstige zijden even lang zijn.
Voor ΔABD en ΔCDB geldt:

$$\left.\begin{array}{l} |AB| = |CD| \\ |AD| = |BC| \\ |BD| = |DB| \end{array}\right\} \Rightarrow (ZZZ) \triangle ABD \cong \triangle CDB$$

b In vierhoek $ABDC$ zijn $\angle B$ en $\angle D$ gelijk vanwege $\Delta ABD \cong \Delta CDB$. Met $|AB| = |CD|$ volgt dat vierhoek $ABDC$ symmetrisch is zodat $\angle A = \angle C$. De som van de hoeken voor elke vierhoek is 360°, dus $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360° \Rightarrow$
$\angle A + \angle D + \angle A + \angle D = 2(\angle A + \angle D) = 360° \Rightarrow$
$\angle A + \angle D = 360° : 2 = 180°$. Hoek A en D zijn overstaande hoeken in de vierhoek en samen 180°. De vierhoek is dan een koordenvierhoek volgens de omgekeerde koordenvierhoekstelling.
c Uit $\Delta ABD \cong \Delta CDB$ volgt $\angle DAB = \angle BCD$. Dus geldt:

$$\left.\begin{array}{l} \angle DAB = \angle BCD \\ \angle APB = \angle CPD \\ |AB| = |AB| \end{array}\right\} \Rightarrow (ZHH) \triangle ABP \cong \triangle CDP \Rightarrow |BP| = |DP| \text{ en } |AP| = |CP|.$$

Dus: $|AP| + |BP| = |AP| + |DP| = |AD|$ = lengte van lat AD = constant
e Omdat de som van de afstanden van P tot A en B constant is ligt P op een ellips. De brandpunten zijn A en B.



f Om de ellipsograaf in GeoGebra te simuleren voer je de volgende constructiestappen uit:
1 Teken cirkel a_B met middelpunt A en straal 4. Teken B op de cirkel. Teken lijnstuk AB.
2 Teken cirkel a_D met middelpunt A en straal 6. Teken D op de cirkel. Teken lijnstuk AD.
3 Teken cirkel b met middelpunt B en straal 6.
4 Teken cirkel d met middelpunt D en straal 4.
5 Kies 'Snijpunt van (twee) objecten' en selecteer de cirkels b en d. Noem het snijpunt C.
6 Teken lijnstuk CD en CB.
7 Kies 'Snijpunt van (twee) objecten' en selecteer de lijnstukken AD en CB. Noem het snijpunt P. Zet het spoor van P aan.
8 Sleep D rond cirkel a_D. Het spoor van P is de (halve) ellips.

g Om een volledige ellips te krijgen moet je na het tekenen van de bovenste helft de lat tussen A en B 180° draaien om de onderste helft te tekenen.

bladzijde 131

6a Brandpunt F_1 is het middelpunt van de richtcirkel. Een punt op de top van de ellips bij brandpunt F_2 ligt even ver van F_2 als van de richtcirkel op een afstand $\frac{1}{2}(r_{\text{richtcirkel}} - |F_1F_2|)$. Deze afstand heeft de ellips ook tot F_1 bij de andere top. De afstand tussen de toppen is dus
$\frac{1}{2}(r_{\text{richtcirkel}} - |F_1F_2|) + |F_1F_2| + \frac{1}{2}(r_{\text{richtcirkel}} - |F_1F_2|) = |F_1F_2| + (r_{\text{richtcirkel}} - |F_1F_2|) = r_{\text{richtcirkel}}$.
Voor de hoofdcirkel is dit de middellijn, dus $2r_{\text{hoofdcirkel}} = r_{\text{richtcirkel}} \Rightarrow r_{\text{hoofdcirkel}} = \frac{1}{2}r_{\text{richtcirkel}}$.

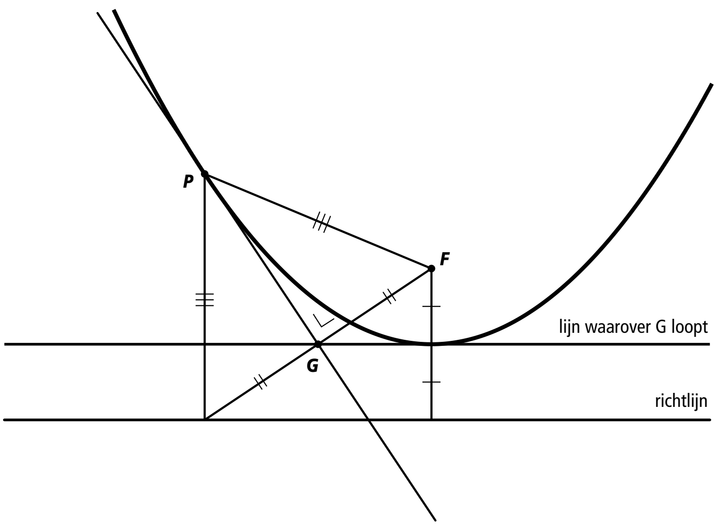
b Uit opdracht a volgt $|VF_1| : |QM| = 2:1$. Als QM evenwijdig is met VF_1, dan volgt uit de gelijkvormigheid van $\triangle VF_1F_2$ en $\triangle QMF_2$ dat $|VF_2| : |QF_2| = 2:1$, oftewel Q is het midden van VF_2.

c De loodlijn is de conflictlijn van de punten F_2 en V, dus $|RV| = |RF_2|$. Voor R geldt $|RF_1| + |RF_2| = |RF_1| + |RV| = |VF_1| = r_{\text{richtcirkel}} = \text{constant}$. De som van de afstanden van R tot F_1 en F_2 zijn dus constant, dus R is punt op de ellips.

d Voer de gegeven stappen uit in GeoGebra.

7a Het punt op de top van de parabool ligt even ver van F als van de richtlijn. De richtlijn is evenwijdig met lijn l en ligt dus in de richting van l twee keer zover van F.

b



c In de analysefiguur zie je de constructie van P op de parabool met de parabool als conflictlijn van F en de richtlijn. De lijnstukken PF en P tot de richtlijn zijn even lang en vormen de benen van een gelijkbenige driehoek. Het midden G is het hoekpunt van de rechte hoek dat over de lijn loopt. De middelloodlijn gaat door P en raakt de parabool op één plaats. De middelloodlijn door G valt samen met het andere been van de rechte hoek. De middelloodlijn is raaklijn aan de parabool in P, dus het andere been van de rechte hoek is een raaklijn.

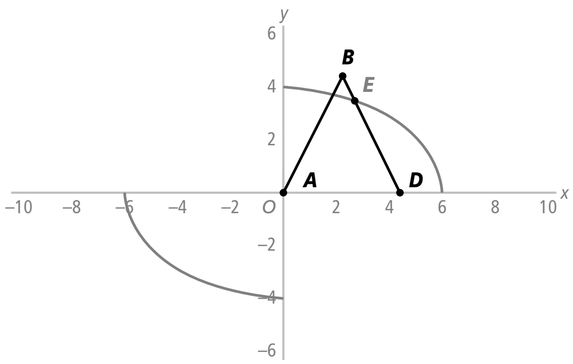
d
1 Teken punt F boven de x-as.
2 Teken punt G op de x-as.
3 Teken lijnstuk FG.
4 Teken een loodlijn op FG door G. Zet het spoor aan van de loodlijn.
5 Sleep G over de x-as.

bladzijde 132

8a Voer de gegeven stappen op papier uit.

b De lange as wordt $2 \cdot (5+1) = 12$. De korte as wordt $2 \cdot (5-1) = 8$.

c



d De ellips wordt alleen in het 1e en 3e kwadrant getekend. De cirkels rond A en D snijden elkaar op twee plaatsen. GeoGebra springt over naar het andere snijpunt als D de plaats van A passeert.
Je kunt de rest van de ellips krijgen door bijvoorbeeld E te spiegelen in de x-as met de knop 'Lijnspiegeling' en ook het spoor van E' te laten tekenen.

e $x = a\sin t \;\rightarrow\; x^2 = a^2\sin^2 t \;\rightarrow\; \dfrac{x^2}{a^2} = \sin^2 t$

$y = b\cos t \;\rightarrow\; y^2 = b^2\cos^2 t \;\rightarrow\; \dfrac{y^2}{b^2} = \cos^2 t$

Met de gelijkheid $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ volgt $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

f Teken een loodlijn op de x-as door B. Noem N het snijpunt met de x-as. De x-coördinaat x_B van punt B is $|ON|$. Uit $\cos\varphi = \dfrac{|ON|}{|OB|} = \dfrac{x_B}{5}$ volgt $x_B = 5\cos\varphi$.

g $|AB| = |DB|$ dus $\triangle ADB$ is gelijkbenig $\Rightarrow$ $\angle ADB = \varphi \Rightarrow \angle ABD = 180° - 2\varphi \Rightarrow$
$\angle EBC = 180° - \angle ABD = 180° - (180° - 2\varphi) = 2\varphi$
$|BC| = |BE|$ dus $\triangle BCE$ is gelijkbenig $\Rightarrow$
$\angle ACF = \angle BCE = \frac{1}{2}(180° - \angle EBC) = \frac{1}{2}(180° - 2\varphi) = 90° - \varphi$
Hieruit volgt voor $\triangle AFC$:
$\angle AFC = 180° - \angle CAF - \angle ACF = 180° - \varphi - (90° - \varphi) = 180° - \varphi - 90° + \varphi = 90°$, dus de lijn door C en E staat loodrecht op AD.

h Punt B: $x_B = 5\cos\varphi$ en $y_B = 5\sin\varphi$.
Punt D: $x_D = 2 \cdot x_B = 2 \cdot 5\cos\varphi = 10\cos\varphi$ en $y_D = 0$.
Met $|DE| = 5 - 1 = 4$ en $\angle ADB = \varphi$ volgt
$x_E = x_D - 4\cos\varphi = 10\cos\varphi - 4\cos\varphi = 6\cos\varphi$ en $y_E = 4\sin\varphi$.
Werk deze vorm om voor de parametervoorstelling. Met $\varphi = \frac{1}{2}\pi - t$ volgt
$x_B = 6\cos\varphi = 6\cos(\frac{1}{2}\pi - t) = 6\sin t$ en $y_B = 4\sin\varphi = 4\sin(\frac{1}{2}\pi - t) = 4\cos t$.
De coördinaten van E voldoen aan de parametervoorstelling van een ellips met $a = 6$ en $b = 4$.

bladzijde 133

9a Eigenschap 1 is zinvol want $\triangle CPG$ is gelijkbenig en de gelijke lengte van de benen sluit aan bij de definitie van de hyperbool als conflictlijn.

b Een paar overeenkomsten met de ellipsograaf zijn:
- je hebt weer vier hulpcirkels nodig,
- de figuren ontstaan als spoor bij het slepen van een punt om een cirkel rond een van de brandpunten,
- beide constructies geven slechts de helft van de complete figuur (de complete ellips en beide takken van de hyperbool).

c $\angle CDG = \angle CFG$ volgt uit de congruentie van $\triangle CDG$ en $\triangle CFG$ op dezelfde manier als bij de ellipsograaf in opdracht 5a.

d In vierhoek $CGFD$ zijn $\angle C$ en $\angle G$ gelijk vanwege $\triangle CDG \cong \triangle CFG$. Met $|FG| = |CD|$ volgt dat vierhoek $CGFD$ symmetrisch is zodat $\angle D = \angle F$. De som van de hoeken voor elke vierhoek is 360°, dus $\angle C + \angle D + \angle F + \angle G = 360° \Rightarrow$
$\angle C + \angle F + \angle F + \angle C = 2(\angle C + \angle F) = 360° \Rightarrow$
$\angle C + \angle F = 360° : 2 = 180°$. Hoek C en F zijn overstaande hoeken in de vierhoek en samen 180°. De vierhoek is dan een koordenvierhoek volgens de omgekeerde koordenvierhoekstelling.

e $|PF| = |PD|$ volgt uit de congruentie van $\triangle PGD$ en $\triangle PCF$:
Uit $\triangle CDG \cong \triangle CFG$ volgt voor $\triangle PGD$ en $\triangle PCF$ dat $\angle CDG = \angle CFG$. Verder hebben $\triangle PGD$ en $\triangle PCF$ hoek DPF gemeen en zijn CD en GF even lang. Uit de ZHH-eigenschap voor congruente driehoeken volgt $\triangle PGD \cong \triangle PCF$. Omdat de driehoeken congruent zijn volgt uit de ZZZ-eigenschap voor congruente driehoeken dat alle overeenkomstige zijden even lang zijn, dus $|PF| = |PD|$.

f $|PF| - |PC| = |PD| - |PC| = |CD| =$ vaste latlengte = constant

g De pen kan tot lijn CF tekenen en loopt dan vast tegen de gedraaide lat GD. Alleen de helft van een hyperbooltak wordt dus getekend.