Blok 2 - Vaardigheden

bladzijde 120

1a Steeds is het een product van een factor en diezelfde factor min 3.

b $f(x)=0 \Rightarrow\ x(x-3)=0 \Rightarrow\ x=0$ of $x=3$

$g(x)=0 \Rightarrow\ 2^x(2^x-3)=0 \Rightarrow\ 2^x=0$ of $2^x=3 \Rightarrow x={}^2\log 3$

$h(x)=0 \Rightarrow \sin x=0$ of $\sin x=3 \Rightarrow x=k\cdot$ (k geheel)

c Bij functie g want als $x\to -\infty$ dan gaat 2^x naar 0 en dus gaat $2^x(2^x-3)$ naar $0\cdot(0-3)=0$.

d $h'(x)=\cos x\cdot(\sin x-3)+\sin x\cdot\cos x=\cos x\cdot(2\sin x-3)$

$h'(x)=0 \Rightarrow \cos x=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}\quad +k\cdot$ (k geheel)

$f(\frac{1}{2}\quad +k\cdot 2\quad)=1\cdot(1-3)=-2$ en $f(1\frac{1}{2}\quad +k\cdot 2\quad)=-1\cdot(-1-3)=4$.

Dus f heeft een minimum –2 voor $x=\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi$ en een maximum 4 voor $x=1\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi$

e Uit $f(0)=h(0)=0$ volgt dat de beide grafieken door $(0,0)$ gaan.

$f'(x)=2x-3 \Rightarrow f'(0)=-3$ en $h'(0)=1\cdot(2\cdot 0-3)+0\cdot 1=-3$

Omdat $f(0)=h(0)=0$ en $f'(0)=h'(0)=-3$ raken de grafieken van f en h elkaar in $(0,0)$.

2a $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2-3\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}=\frac{1}{x^2}-\frac{3x}{x^2}=\frac{1-3x}{x^2}$.

Dus alleen een verticale asymptoot $x=0$.

b $g(1)=f\left(\frac{1}{1}\right)=f(1)$ en $g(-1)=f\left(\frac{1}{-1}\right)=f(-1)$

c $f(x)=g(x) \Rightarrow \frac{x^2-3x}{1}=\frac{1-3x}{x^2}$

$x^2(x^2-3x)=1-3x$

$x^4-3x^3=1-3x$

$x^4-3x^3+3x-1=0$

d $(x^2-3x+1)(x^2-1)=x^4-3x^3+x^2-x^2+3x-1=x^4-3x^3+3x-1$

$(x^2-3x+1)(x^2-1)=0$

$x^2-3x+1=0$ of $x^2-1=0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}$ of $x=\pm 1$

$x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ of $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ of $x=1$ of $x=-1$

3a De grafiek van g heeft verticale asymptoot $x=-1$.

b $f(x)=\frac{2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}<\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=2$

c $D_f=[0,\rightarrow\rangle$ en $B_f=[0,2\rangle$

D_g bestaat uit de intervallen $\langle\leftarrow,-1\rangle$ en $\langle -1,\rightarrow\rangle$.

B_g bestaat uit de intervallen $\langle\leftarrow,2\rangle$ en $\langle 2,\rightarrow\rangle$.

bladzijde 121

4a Stel $x^2 - x = q$ dan wordt de vergelijking $q^3 = 4q^2 \Rightarrow q^2(q-4) = 0$.
$q = 0$ of $q = 4$
$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0$ of $x = 1$
of $x^2 - x = 4 \Rightarrow x^2 - x - 4 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$ of $x = \dfrac{1-\sqrt{17}}{2}$

b Stel $t = {}^3\log x$ dan wordt de vergelijking $\dfrac{1}{t} + 2 = t$.
$1 + 2t = t^2$
$t^2 - 2t - 1 = 0$
$t = \dfrac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$ dus $t = 1 + \sqrt{2}$ of $t = 1 - \sqrt{2}$
Dus ${}^3\log x = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow x = 3^{1+\sqrt{2}}$ of ${}^3\log x = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow x = 3^{1-\sqrt{2}}$.

c Stel $\sqrt{x+2} = t$ dan wordt de vergelijking $(t^2 - t)^2 = 6 \Rightarrow t^2 - t = 6$ of $t^2 - t = -6$.
$t^2 - t - 6 = 0 \Rightarrow (t-3)(t+2) = 0 \Rightarrow t = 3$ of $t = -2$
$t^2 - t + 6 = 0$ heeft $D = 1 - 24 = -23 < 0$ dus geen oplossingen.

Alleen $t = 3$ voldoet want $\sqrt{x+2} \geq 0$ voldoet waarmee $x = 7$ de enige oplossing is.

d Stel $\dfrac{2a-1}{a+1} = t$ dan wordt de vergelijking $t^2 = t + 2 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow (t-2)(t+1) = 0$.

$t = 2 \Rightarrow \dfrac{2a-1}{a+1} = 2 \Rightarrow 2a + 2 = 2a - 1$ en deze laatste vergelijking heeft geen oplossing.

$t = -1 \Rightarrow \dfrac{2a-1}{a+1} = -1 \Rightarrow -a - 1 = 2a - 1 \Rightarrow -3a = 0 \Rightarrow a = 0$
Dus is $a = 0$ de oplossing.

e Stel $\dfrac{3\sin x - 1}{4} = p$ dan wordt de vergelijking $p^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow p = \frac{1}{2}$ of $p = -\frac{1}{2}$.

Dus $\dfrac{3\sin x - 1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow 3\sin x = 3 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \quad + k \cdot 2$

of $\dfrac{3\sin x - 1}{4} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3\sin x = -1 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x \approx 0{,}3398 + k \cdot 2$

5a $f'(x) = 3\cos^2 2x \cdot -\sin 2x \cdot 2 - 10 \cdot \cos 2x \cdot -\sin 2x \cdot 2 = 6\sin 2x \cos^2 2x + 20 \sin 2x \cos 2x$

b $g(x) = 5 \cdot (e^x + 1)^{-\frac{1}{2}} - 2(e^x + 1)^{\frac{1}{2}}$

$g'(x) = 5 \cdot -\frac{1}{2} \cdot (e^x + 1)^{-1\frac{1}{2}} \cdot e^x - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (e^x + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^x = -\dfrac{5e^x}{2(e^x+1)\sqrt{e^x+1}} - \dfrac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}$

c $h(x) = 2\left(\ln x\right)^{-1} + 4\left(\ln x\right)^{-2}$

$h'(x) = 2 \cdot -1 \cdot \left(\ln x\right)^{-2} \cdot \dfrac{1}{x} + 4 \cdot -2 \cdot \left(\ln x\right)^{-3} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{-2}{x\left(\ln x\right)^2} - \dfrac{8}{x\left(\ln x\right)^3} = \dfrac{-2\ln x - 8}{x\left(\ln x\right)^3}$

d $k(x) = 2(x^2+1)^{-1} - 4(x^2+1)^{-2} + 8(x^2+1)^{-3}$

$k(x) = 2 \cdot -1 \cdot (x^2+1)^{-2} \cdot 2x - 4 \cdot -2 \cdot (x^2+1)^{-3} \cdot 2x + 8 \cdot -3 \cdot (x^2+1)^{-4} \cdot 2x =$
$\dfrac{-4x}{(x^2+1)^2} + \dfrac{16x}{(x^2+1)^3} - \dfrac{48x}{(x^2+1)^4}$

6a Stel $-1+2\sin x = t$ dan wordt de vergelijking $t^2+4t=0$.
$t^2+4t=0 \Leftrightarrow t=0$ of $t=-4$
$-1+2\sin x=-4 \Leftrightarrow \sin x=-1\frac{1}{2}$ dus geen oplossingen.
$-1+2\sin x=0 \Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{6}\pi$ of $x=\frac{5}{6}\pi$.

b $f'(x)=2(-1+2\sin x)\cdot 2\cos x+4\cdot 2\cos x=$
$-4\cos x+8\sin x\cos x+8\cos x=4\cos x+8\sin x\cos x=\cos x(4+8\sin x)$
$f'(x)=0 \Rightarrow \cos x=0$ of $\sin x=-\frac{1}{2}$
Op $[0,\ 2\pi]$ zijn de oplossingen $x=\frac{1}{2}\pi$ of $x=1\frac{1}{2}\pi$ of $x=1\frac{1}{6}\pi$ of $x=1\frac{5}{6}\pi$
Uiterste waarden zijn:
maximum voor $x=\frac{1}{2}\pi$ groot $f(\frac{1}{2}\pi)=(-1+2\cdot 1)^2+4\cdot(-1+2\cdot 1)=1+4=5$ en
maximum voor $x=1\frac{1}{2}\pi$ groot $f(1\frac{1}{2}\pi)=(-1+2\cdot -1)^2+4\cdot(-1+2\cdot -1)=9-12=-3$
minimum voor $x=1\frac{1}{6}\pi$ groot $f(1\frac{1}{6}\pi)=(-1+2\cdot -\frac{1}{2})^2+4\cdot(-1+2\cdot -\frac{1}{2})=4-8=-4$
en minimum voor $x=1\frac{5}{6}\pi$ groot $f(1\frac{5}{6}\pi)=(-1+2\cdot -\frac{1}{2})^2+4\cdot(-1+2\cdot -\frac{1}{2})=4-8=-4$

c In een plot zie je dat er voor $p=-3$ vier snijpunten zijn. Verder zie je dan dat er voor $p=-4$ slechts twee snijpunten zijn en voor $-4<p<-3$ zijn er weer vier snijpunten.
Conclusie: voor $-4<p\le -3$ zijn er precies vier snijpunten.

bladzijde 122

7a Wanneer *t* steeds groter wordt gaat $\dfrac{10}{t+10}$ naar 0 en dus $\dfrac{100}{(t+10)^2}$ ook.
Dus $Z=200\left(1-\dfrac{10}{t+10}+\dfrac{100}{(t+10)^2}\right)$ gaat naar $200\big(1-0+0\big)=200$.

b Uit $z(t)=200\big(1-10(t+10)^{-1}+100(t+10)^{-2}\big)$ volgt dat
$z'(t)=200\big(0-10\cdot -1\cdot(t+10)^{-2}+100\cdot -2\cdot(t+10)^{-3}\big)=$
$$200\left(\frac{10}{(t+10)^2}-\frac{200}{(t+10)^3}\right) \Rightarrow z'(0)=200\left(\frac{10}{100}-\frac{200}{1000}\right)=200\left(\frac{1}{10}-\frac{2}{10}\right)<0$$
Dus daalt op dat moment het zuurstofgehalte.

c Stel $z'(t)=200\left(\dfrac{10}{(t+10)^2}-\dfrac{200}{(t+10)^3}\right)=0$ dan is $\dfrac{10}{(t+10)^2}=\dfrac{200}{(t+10)^3}$ en dus
$\dfrac{1}{(t+10)^2}=\dfrac{20}{(t+10)^3}$
$(t+10)^3=20(t+10)^2 \Rightarrow t+10=20$ of $t+10=0 \Rightarrow$
$t=10$ of $t=-10$ (vervalt)
Na 10 minuten is het zuurstofgehalte minimaal.

d 90% van 200 is 180.
$z(60)=200\left(1-\dfrac{10}{60+10}+\dfrac{100}{(60+10)^2}\right)=200\left(1-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{49}\right)=200\cdot\dfrac{43}{49}\approx 175,51$ en dit is minder.
Dus klopt de bewering niet met het model.

8a $(z+1)^3 = (z+1)(z+1)^2 = (z+1)(z^2+2z+1) = z^3+3z^2+3z+1$

Dus $2(z+1)^3 - 6(z+1)^2 + 5(z+1) - 3 = 0$ geeft

$2(z^3+3z^2+3z+1) - 6(z^2+2z+1) + 5(z+1) - 3 = 0$

$2z^3+6z^2+6z+2-6z^2-12z-6+5z+5-3=0$

$2z^3 - z - 2 = 0$

b $\left(\frac{p}{y}-y\right)^3 + 3p\left(\frac{p}{y}-y\right) = 2q$

$\left(\frac{p}{y}\right)^3 - 3\left(\frac{p}{y}\right)^2 \cdot y + 3\cdot\frac{p}{y}\cdot y^2 - y^3 + 3\cdot\frac{p^2}{y} - 3py = 2q$

$\frac{p^3}{y^3} - \frac{3p^2}{y} + 3py - y^3 + \frac{3p^2}{y} - 3py = 2q$

$\frac{p^3}{y^3} - y^3 = 2q$

$p^3 - y^6 = 2qy^3$

$y^6 + 2qy^3 = p^3$

c $y^3 = t$ invullen geeft $t^2 + 2qt - p^3 = 0$.

$t = \frac{-2q \pm \sqrt{(2q)^2 - 4\cdot 1\cdot(-p)^3}}{2} = \frac{-2q \pm \sqrt{(2q)^2 + 4\cdot 1\cdot p^3}}{2} = \frac{-2q \pm 2\sqrt{q^2+p^3}}{2} = -q \pm \sqrt{q^2+p^3}$

Dus $y^3 = -q \pm \sqrt{q^2+p^3}$

d $y^3 = -q \pm \sqrt{q^2+p^3} \Rightarrow y = \sqrt[3]{-q \pm \sqrt{q^2+p^3}}$

Dit laatste invullen in $x = \frac{p}{y} - y$ geeft $x = \frac{p}{\sqrt[3]{-q \pm \sqrt{q^2+p^3}}} - \sqrt[3]{-q \pm \sqrt{q^2+p^3}}$.

e Vergelijk $x^3 - 12x = 20$ met $x^3 + 3px = 2q$ dit geeft $p = -4$ en $q = 10$.
Wanneer je dit invult geeft het als mogelijke oplossingen (zie opdracht d):

$x = \frac{-4}{\sqrt[3]{-10 \pm \sqrt{10^2 + (-4)^3}}} - \sqrt[3]{-10 \pm \sqrt{10^2+(-4)^3}} =$

$\frac{-4}{\sqrt[3]{-10 \pm \sqrt{100-64}}} - \sqrt[3]{-10 \pm \sqrt{100-64}} = \frac{-4}{\sqrt[3]{-10 \pm 6}} - \sqrt[3]{-10 \pm 6} =$

$\frac{-4}{-\sqrt[3]{10 \pm 6}} + \sqrt[3]{10 \pm 6} = \frac{4}{\sqrt[3]{10 \pm 6}} + \sqrt[3]{10 \pm 6}$

Dus $x = \frac{4}{\sqrt[3]{16}} + \sqrt[3]{16} = 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{4}{3}} \approx 4{,}11$ of, wat hetzelfde is:

$x = \frac{4}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{4} = 2^{\frac{4}{3}} + 2^{\frac{2}{3}} \approx 4{,}11$

In een plot van $Y1 = X \wedge 3 - 12X$ en $Y2 = 20$ zie je dat dit inderdaad de oplossing is.

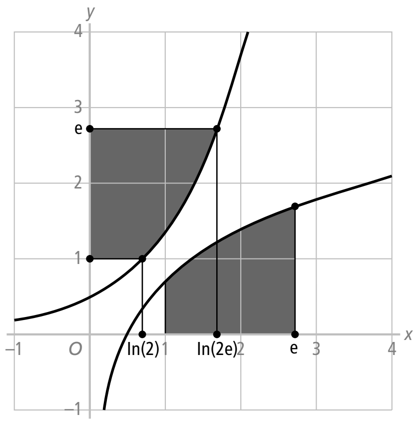
bladzijde 123

9a Het spiegelbeeld in de lijn $y = x$ van de grafiek van $f(x) = \ln(2x-1)$ voldoet aan de vergelijking $x = \ln(2y-1)$. Dit laatste geeft $2y-1 = e^x$ en dus is $y = \frac{1}{2}(e^x+1)$.

b Uit $\frac{1}{2}(e^x+1) = 3$ volgt $e^x = 5$ en dus is $x = \ln 5$, en uit $\frac{1}{2}(e^x+1) = 1$ volgt $e^x = 1$ en dus $x = 0$.
Het gekleurde gebied heeft oppervlakte
$$\int_0^{\ln 5} \left(3 - g(x)\right)\,dx = \int_0^{\ln 5} 3\,dx - \int_0^{\ln 5} g(x)\,dx = 3\ln 5 - \int_0^{\ln 5} g(x)\,dx\,.$$

c $3\ln 5 - \frac{1}{2}\int_0^{\ln 5} (e^x+1)\,dx = 3\ln 5 - \frac{1}{2}[e^x + x]_0^{\ln 5} =$
$3\ln 5 - \frac{1}{2}[(5+\ln 5) - (1+0)] = 3\ln 5 - 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}\ln 5 - 2$

10a



Het spiegelbeeld van de grafiek van $f(x) = \ln 2x$ voldoet aan $g(x) = \frac{1}{2}e^x$.

Met grenzen: $\frac{1}{2}e^x = 1 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$ en $\frac{1}{2}e^x = e \Rightarrow e^x = 2e \Rightarrow x = \ln 2e$.

De oppervlakte wordt dan : $\int_0^{\ln 2e} \left(e - \frac{1}{2}e^x\right)dx - \int_0^{\ln 2} \left(1 - \frac{1}{2}e^x\right)dx =$

$\left[ex - \frac{1}{2}e^x\right]_0^{\ln 2e} - \left[x - \frac{1}{2}e^x\right]_0^{\ln 2} = \left(e\ln 2e - \frac{1}{2}\cdot 2e\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\ln 2 - \frac{1}{2}\cdot 2\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) =$

$e\ln 2e - e + \frac{1}{2} - \ln 2 + 1 - \frac{1}{2} = e\ln 2e - e - \ln 2 + 1 =$

$e\ln 2 + e - e - \ln 2 + 1 = e\ln 2 - \ln 2 + 1$

b Het spiegelbeeld van de grafiek van $f(x) = \ln(x-2)$ voldoet aan $g(x) = e^x + 2$.
Met grenzen: $e^x + 2 = e^2 \Rightarrow e^x = e^2 - 2 \Rightarrow x = \ln(e^2-2)$ en $e^x + 2 = 3 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

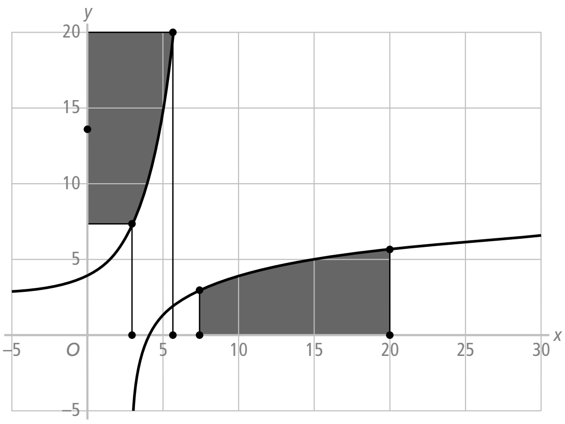
De oppervlakte is dan $\int_0^{\ln(e^2-2)} e^2 - (e^x+2)\,dx =$

$e^2 \cdot \ln(e^2-2) - \int_0^{\ln(e^2-2)} e^x + 2\,dx = e^2\cdot\ln(e^2-2) - [e^x + 2x]_0^{\ln(e^2-2)} =$

$e^2\cdot\ln(e^2-2) - [(e^2-2) + 2\ln(e^2-2) - 1] = 3 - e^2 + (e^2-2)\cdot\ln(e^2-2)$

c Het spiegelbeeld van de grafiek van $f(x) = 2 \cdot \ln(x-3)$ is de grafiek van

$g(x) = e^{\frac{1}{2}x} + 3$.
Met grenzen: $e^{\frac{1}{2}x} + 3 = e^2 \Rightarrow e^{\frac{1}{2}x} = e^2 - 3 \Rightarrow \frac{1}{2}x = \ln(e^2-3) \Rightarrow x = 2\ln(e^2-3)$ en
$e^{\frac{1}{2}x} + 3 = e^3 \Rightarrow e^{\frac{1}{2}x} = e^3 - 3 \Rightarrow \frac{1}{2}x = \ln(e^3-3) \Rightarrow x = 2\ln(e^3-3)$



De oppervlakte is $\int_0^{2\ln(e^3-3)} \left(e^3 - (e^{\frac{1}{2}x} + 3)\right) dx - \int_0^{2\ln(e^2-3)} \left(e^2 - (e^{\frac{1}{2}x} + 3)\right) dx =$

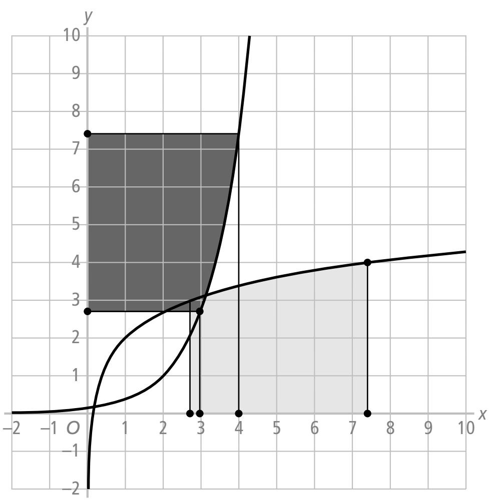
$\left[e^3 x - 2e^{\frac{1}{2}x} - 3x\right]_0^{2\ln(e^3-3)} - \left[e^2 x - 2e^{\frac{1}{2}x} - 3x\right]_0^{2\ln(e^2-3)} =$

$\left(2e^3\ln(e^3-3) - 2(e^3-3) - 6\ln(e^3-3) - (-2)\right) - \left(2e^2\ln(e^2-3) - 2(e^2-3) - 6\ln(e^2-3) - (-2)\right) =$

$2e^3\ln(e^3-3) - 2e^3 + 6 - 6\ln(e^3-3) + 2 - 2e^2\ln(e^2-3) + 2e^2 - 6 + 6\ln(e^2-3) - 2 =$

$(2e^3 - 6)\ln(e^3-3) - 2(e^3 - e^2) - (2e^2 - 6)\ln(e^2-3)$

d Het spiegelbeeld is de grafiek van $g(x) = e^{x-2}$.



De oppervlakte is $\int_0^4 (e^2 - e^{x-2})\,dx - \int_0^3 (e - e^{x-2})\,dx = \left[e^2 x - e^{x-2}\right]_0^4 - \left[ex - e^{x-2}\right]_0^3 =$

$(4e^2 - e^2 - 0 + e^{-2}) - (3e - e - 0 + e^{-2}) = 3e^2 + e^{-2} - 2e - e^{-2} = 3e^2 - 2e$.