Verdieping – Inverse goniofuncties

bladzijde 62

1a $f(x) = x - 2$ en $g(x) = 3x$

b $f(x) = x - 6$ en $g(x) = x^3$

c $f(x) = 2x + \frac{1}{2}\pi$ en $g(x) = \sin x$

d $f(x) = x + 3$ en $g(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

e $f(x) = x - 3$ en $g(x) = 2^x$

2a $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 4}$

b $f(x) = \left(\dfrac{1}{x} - 4\right)^2$

c $f(x) = 3\cos\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$

3a $h(x) = g(3x - 2) = (3x - 2)^2 + 3(3x - 2) = (3x - 2)(3x + 1)$

b $k(x) = f\left(x^2 + 3x\right) = 3\left(x^2 + 3x\right) - 2 = 3x^2 + 9x - 2$

4a $h\left(f(x)\right) = h\left(2(x + 2)\right) = h(2x + 4) = x \Rightarrow h(x) = \frac{1}{2}x - 2$

b $f\left(h(x)\right) = f\left(\frac{1}{2}x - 2\right) = 2\left(\frac{1}{2}x - 2 + 2\right) = x$

c De grafieken van *f* en *g* zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.

d $k(g(x)) = k\left(\dfrac{1}{3x + 6}\right) = x \Rightarrow k(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \frac{1}{3} - 2 = \dfrac{1}{3x} - 2$

e $g\left(k(x)\right) = g\left(\dfrac{1}{3x} - 2\right) = \dfrac{1}{3\left(\dfrac{1}{3x} - 2\right) + 6} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x} - 6 + 6} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x}} = x$

f De grafieken van *g* en *k* zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.

bladzijde 63

5a $f : y = \dfrac{3}{2\sqrt{x} + 6}$ dit geeft $f^{-1} : x = \dfrac{3}{2\sqrt{y} + 6} \Rightarrow 2\sqrt{y} + 6 = \dfrac{3}{x} \Rightarrow$

$2\sqrt{y} = \dfrac{3}{x} - 6 \Rightarrow \sqrt{y} = \dfrac{3}{2x} - 3 \Rightarrow y = \left(\dfrac{3}{2x} - 3\right)^2$

dus $f^{-1}(x) = \left(\dfrac{3}{2x} - 3\right)^2$

b $g : y = \mathrm{e}^{2x+4}$ dit geeft $g^{-1} : x = \mathrm{e}^{2y+4} \Rightarrow 2y + 4 = \ln x \Rightarrow$

$2y = \ln x - 4 \Rightarrow y = \frac{1}{2}\ln x - 2$

dus $g^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln x - 2$

c $h : y = \dfrac{2x + 3}{x - 1}$ dit geeft $h^{-1} : x = \dfrac{2y + 3}{y - 1} \Rightarrow xy - x = 2y + 3 \Rightarrow$

$xy - 2y = 3 + x \Rightarrow y(x - 2) = 3 + x \Rightarrow y = \dfrac{3 + x}{x - 2}$

dus $h^{-1}(x) = \dfrac{x + 3}{x - 2}$

d $k: y = 3\ln\left(\sqrt{x}+4\right)$ dit geeft $k^{-1}: x = 3\ln\left(\sqrt{y}+4\right) \Rightarrow$ $\ln\left(\sqrt{y}+4\right) = \frac{1}{3}x \Rightarrow$

$\sqrt{y}+4 = e^{\frac{1}{3}x} \Rightarrow$ $\sqrt{y} = e^{\frac{1}{3}x} - 4 \Rightarrow$ $y = \left(e^{\frac{1}{3}x} - 4\right)^2$

dus $k^{-1}(x) = \left(e^{\frac{1}{3}x} - 4\right)^2$

e $l: y = \ln\left(e^{2x}+4\right)$ dit geeft $l^{-1}: x = \ln\left(e^{2y}+4\right) \Rightarrow$ $e^{2y}+4 = e^x \Rightarrow$

$e^{2y} = e^x - 4 \Rightarrow$ $2y = \ln\left(e^x - 4\right) \Rightarrow$ $y = \frac{1}{2}\ln\left(e^x - 4\right)$ dus $l^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(e^x - 4\right)$

f $m: y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ dit geeft $m^{-1}: x = \dfrac{e^y - 1}{e^y + 1} \Rightarrow$ $xe^y + x = e^y - 1 \Rightarrow$

$e^y = \dfrac{-1-x}{x-1} \Rightarrow$ $y = \ln\left(\dfrac{-1-x}{x-1}\right)$

dus $m^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{-1-x}{x-1}\right) = \ln\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)$

6a Als je de parabool spiegelt in $y = x$ krijg je een grafiek waarbij elke $x > 0$ twee y-waarden heeft en dan is het geen functie.

b De inverse functie is dan $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$.
Dit is een functie omdat bij elke $x \geq 0$ precies één functiewaarde hoort.

c De inverse functie is dan $h^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.
Dit is een functie omdat bij elke $x \geq 0$ precies één functiewaarde hoort.

bladzijde 64

7a 2 oplossingen

b 4 oplossingen

c Voor $-\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$ komt elke functiewaarde van –1 tot en met 1 precies één keer voor.

8a 2 oplossingen

b 2 oplossingen

c 1 oplossing

d 1 oplossing

e 1 oplossing

f 1 oplossing

9a $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ of $[\frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi]$

b $[-\pi, 0]$ of $[0, \pi]$

c $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$ of $\langle \frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi \rangle$

bladzijde 65

10a $\arcsin 1 = \frac{1}{2}\pi$

b $\arccos 0 = \frac{1}{2}\pi$

c $\arccos \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\pi$

d $\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{6}\pi$

e $\arccos \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{6}\pi$

f $\arccos(-\frac{1}{2}\sqrt{3}) = \frac{5}{6}\pi$

g $\arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}\pi$

h $\arccos(-\frac{1}{2}\sqrt{2}) = \frac{3}{4}\pi$

i $\arctan 1 = \frac{1}{4}\pi$

j $\arccos(-1) = \pi$

k $\arcsin(-1) = -\frac{1}{2}\pi$

l $\arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{1}{3}\pi$

11a domein $=[-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi]$ en $f^{-1}(x)=\arcsin\frac{1}{2}x$

b domein $=[0,\pi]$ en $g^{-1}(x)=-\arccos x$

c domein $=\langle-\frac{1}{4}\pi,\frac{1}{4}\pi\rangle$ en $h^{-1}(x)=\frac{1}{2}\arctan x$

d domein $=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ en $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\cos x$

e domein $=[-1,1]$ en $h^{-1}(x)=\sin(\ln x)$

f domein $=\langle 0,\rightarrow\rangle$ en $l^{-1}(x)=\tan\left(\frac{1}{2}e^{x}\right)$

12a $f(x)=\arcsin 2x$, domein: $-1\le 2x\le 1\Rightarrow -\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$, dus $D_f=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, $B_f=\langle-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi\rangle$

b $g(x)=3\arccos 0{,}5x$, domein: $-1\le 0{,}5x\le 1\Rightarrow -2\le x\le 2$, dus $D_g=[-2,2]$, $B_g=[0,3\pi]$

c $h(x)=2\arctan 3x$, domein: $D_h=\mathbb{R}$, $B_h=\langle-\pi,\pi\rangle$

d $k(x)=2\arcsin(-x)$, domein: $-1\le -x\le 1\Rightarrow -1\le x\le 1$, dus $D_k=[-1,1]$, $B_k=[-\pi,\pi]$

e $l(x)=\arccos(4-\sqrt{x})$, domein:

$-1\le 4-\sqrt{x}\le 1\Rightarrow -5\le-\sqrt{x}\le-3\Rightarrow 3\le\sqrt{x}\le 5\Rightarrow 9\le x\le 25$, dus $D_l=[9,25]$, $B_l=[0,\pi]$

f $m(x)=\dfrac{1}{\arctan x}$, domein: $x<0$ of $x>0$, dus $D_m=\langle\leftarrow,0\rangle\cup\langle 0,\rightarrow\rangle$,

$B_m=\langle\leftarrow,0\rangle\cup\langle 0,\rightarrow\rangle$

13a $f(x)=\tan(\arctan x)=x$

b $y(x)=\arcsin(\sin x)=x$ op interval $\left[-\frac{1}{2}\pi,\ \frac{1}{2}\pi\right]$

bladzijde 66

14a $x=\cos y$ (links en rechts differentiëren)

$1=-\sin y\cdot\dfrac{dy}{dx}$ dus $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{\sin y}$

b Uit $\cos^2 y+\sin^2 y=1$ en $x=\cos y$ volgt $x^2+\sin^2 y=1$ dus $\sin y=\sqrt{1-x^2}$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\arccos x}{dx}=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

c $x=\tan y$ (links en rechts differentiëren)

$1=\dfrac{1}{\cos^2 y}\cdot\dfrac{dy}{dx}$ dus $\dfrac{dy}{dx}=\cos^2 y$

d $$\cos^2 y=\frac{\cos^2 y}{1}=\frac{\cos^2 y}{\cos^2 y+\sin^2 y}=\frac{1}{1+\dfrac{\sin^2 y}{\cos^2 y}}=\frac{1}{1+\tan^2 y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\arctan x}{dx}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

15a $$f'(x)=\frac{1}{1+(4x)^2}\cdot 4=\frac{4}{1+16x^2}$$

b $$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{2}x)^2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}}=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

c $$h'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(x\sqrt{x}\right)^2}}\cdot 1\tfrac{1}{2}\sqrt{x}=\frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{1-x^3}}$$

d $$k'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}\cdot-\sin x=-\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=-1$$

16a $f\,'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + -\dfrac{1}{\sqrt{1-(-x)^2}} \cdot -1 = 0$

b $f(x) = \text{constant.}$

c $f(0) = \arccos 0 + \arccos 0 = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi = \pi$, dus $f(x) = \pi$ op interval $[-1,1]$.

d $g(x) = \arcsin x + \arccos x \Rightarrow$

$g\,'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow g(x)$ is constant.

$g(\frac{1}{2}) = \arcsin\frac{1}{2} + \arccos\frac{1}{2} = \frac{1}{6}\pi + \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi$, dus $g(x) = \arcsin x + \arccos x = \dfrac{1}{2}\pi$.

e De formule van opdracht d geldt op interval $[-1,1]$.

f $h(x) = \arctan x + \arctan\dfrac{1}{x}$ met $x \neq 0 \Rightarrow h\,'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot -\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2+1} = 0$,

dus $h(x)$ is constant.

$h(1) = \arctan 1 + \arctan 1 = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi$

$h(-1) = \arctan(-1) + \arctan(-1) = -\frac{1}{4}\pi + -\frac{1}{4}\pi = -\frac{1}{2}\pi$

dus $k = -\frac{1}{2}\pi$ op $\langle\leftarrow, 0\rangle$ en $k = \frac{1}{2}\pi$ op $\langle 0, \rightarrow\rangle$.

bladzijde 67

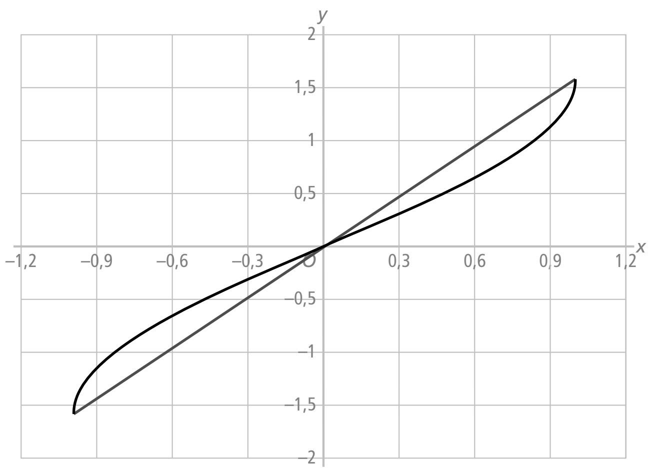
17a $\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{2}{(2x)^2+1}\,dx = \Big[\arctan(2x)\Big]_0^{0,5} = \arctan 1 - \arctan 0 = \tfrac{1}{4}\pi - 0 = \tfrac{1}{4}\pi$.

b $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^4+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x}{(x^2)^2+1}\,dx = \Big[\tfrac{1}{2}\arctan(x^2)\Big]_0^1 = \tfrac{1}{2}\arctan 1 - \tfrac{1}{2}\arctan 0 = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\cdot 0 = \tfrac{1}{8}\pi$.

18 $\displaystyle\int_0^{1,5} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \int_0^{1,5} \frac{1}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}x\right)^2}}\,dx = \Big[3\cdot\tfrac{1}{3}\arcsin\left(\tfrac{1}{3}x\right)\Big]_0^{1,5} = \arcsin 0,5 - \arcsin 0 = \tfrac{1}{6}\pi - 0 = \tfrac{1}{6}\pi$

19a $F\,'(x) = 1\cdot\arcsin x + x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot -2x = \arcsin x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = f(x)$

b



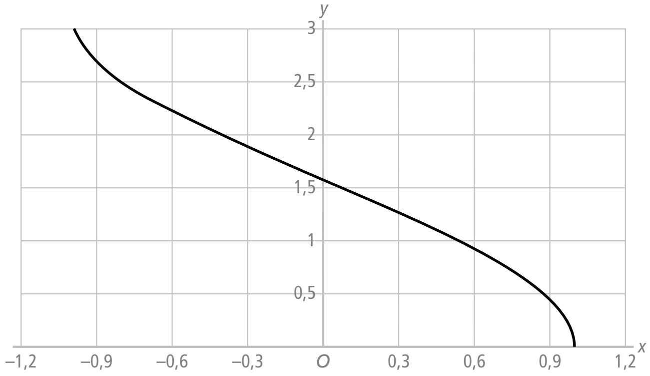
De randpunten zijn $(-1, -\frac{1}{2}\pi)$ en $(1, \frac{1}{2}\pi)$ dan is $y = \frac{1}{2}\pi x$ de lijn door de randpunten.

$\displaystyle\int_0^1 \left(\tfrac{1}{2}\pi x - \arcsin x\right)dx = \left[\tfrac{1}{4}\pi x^2 - x\arcsin x - \sqrt{1-x^2}\right]_0^1$

$= \left(\frac{1}{4}\pi - \arcsin 1 - \sqrt{1-1}\right) - \left(0 - 0\cdot\arcsin 0 - \sqrt{1-0}\right) = \left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi\right) - (-1) = -\frac{1}{4}\pi + 1$

c $G(x) = x\arccos x - \sqrt{1-x^2}$

d



$$\int_0^1 \arccos x \, dx = \left[x \arccos x - \sqrt{1-x^2} \right]_0^1 = \left(\arccos 1 - \sqrt{1-1} \right) - \left(0 \arccos 0 - \sqrt{1-0} \right) = 0 - (-1) = 1$$

20a $f_c(1) = 1 - c \cdot \arcsin 1 = 1 - c \cdot \frac{1}{2}\pi = 0$ dus $c = \frac{1}{\frac{1}{2}\pi} = \frac{2}{\pi}$

b $f_c{}'(x) = 1 - c \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Verdieping – Kepler

bladzijde 72

1a De potentiële energie $E_p = -\frac{GmM}{r} = -\frac{6,673 \cdot 10^{-11} \cdot 175 \cdot 7,35 \cdot 10^{22}}{1,738 \cdot 10^6 + 0,5} = -4,94 \cdot 10^8$ J.

b De astronaut gaat van hoogte $r_1 = h$ naar hoogte $r_2 = 0$. Dus het verschil in potentiële energie $\Delta E_p = E_{p,2} - E_{p,1} = -\frac{GmM}{r} - \left(-\frac{GmM}{r+h}\right) = -\frac{GmM}{r} + \frac{GmM}{r+h}$

$= -\frac{GmM \cdot (r+h)}{(r+h) \cdot r} + \frac{GmM \cdot r}{(r+h) \cdot r} = -\frac{GmM \cdot h}{(r+h) \cdot r}$.

c Wanneer de astronaut op de maanbodem landt geldt $h = 0$ en $r_{maan} = 1,738 \cdot 10^6$ m.
Daarvoor was de astronaut $h = 50 \text{ cm} = 0,50$ m hoger.
Omdat $h = 0,50 \text{ m} << r = 1,738 \cdot 10^6$ m kun je de benadering $(r+h) \cdot r \approx r^2$ toepassen.
Het verschil in potentiële energie is dus:

$$\Delta E_p = -\frac{GmM \cdot h}{(r+h) \cdot r} \approx -\frac{GmM \cdot h}{r^2} = -\frac{6,673 \cdot 10^{-11} \cdot 175 \cdot 7,35 \cdot 10^{22} \cdot 0,50}{(1,738 \cdot 10^6)^2} = -142 \text{ J}.$$

d $E_k = \Delta E_p$ dus:

$\frac{1}{2} \cdot 175 \cdot v^2 = 142 \Rightarrow v^2 = \frac{142}{87,5} \approx 1,623 \Rightarrow v \approx 1,27$ m/s
De astronaut raakt de maanbodem met een snelheid van $1,27$ m/s.

e $g = \frac{GM}{r^2} = \frac{6,673 \cdot 10^{-11} \cdot 7,35 \cdot 10^{22}}{(1,738 \cdot 10^6)^2} = 1,62 \text{ m/s}^2$.

bladzijde 73

2a Volgens de wet van behoud van energie geldt $E_{pe} = E_{ap}$.

$$\tfrac{1}{2} m v_{pe}^2 - \frac{GMm}{r_{pe}} = \tfrac{1}{2} m v_{ap}^2 - \frac{GMm}{r_{ap}}.$$

$$\tfrac{1}{2} v_{pe}^2 - \frac{GM}{r_{pe}} = \tfrac{1}{2} v_{ap}^2 - \frac{GM}{r_{ap}}$$

$$-\frac{GM}{r_{pe}} = \tfrac{1}{2}\left(v_{ap}^2 - v_{pe}^2\right) - \frac{GM}{r_{ap}}$$

$$\frac{1}{r_{pe}} = \frac{\tfrac{1}{2}\left(v_{pe}^2 - v_{ap}^2\right)}{GM} + \frac{1}{r_{ap}}$$

$$\frac{1}{r_{pe}} = \frac{\tfrac{1}{2}(2,65^2 \cdot 10^8 - 2,20^2 \cdot 10^8)}{6,673 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30}} + \frac{1}{2,49 \cdot 10^{11}} \approx 4,834 \cdot 10^{-12}$$

$$r_{pe} = \frac{1}{4,834 \cdot 10^{-12}} \approx 2,07 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

b Noem het moment waarop de afstand $2,2 \cdot 10^{11}$ m is moment q.
Volgens de wet van behoud van energie geldt $E_q = E_{ap}$. Dit geeft

$$\tfrac{1}{2} m v_q^2 - \frac{GMm}{r_q} = \tfrac{1}{2} m v_{ap}^2 - \frac{GMm}{r_{ap}}.$$

$$v_q^2 - \frac{2GM}{r_q} = v_{ap}^2 - \frac{2GM}{r_{ap}}$$

$$v_q^2 = v_{ap}^2 - \frac{2GM}{r_{ap}} + \frac{2GM}{r_q}$$

$$v_q{}^2 = (2,20 \cdot 10^4)^2 - \frac{2 \cdot 6,673 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30}}{2,49 \cdot 10^{11}} + \frac{2 \cdot 6,673 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30}}{2,2 \cdot 10^{11}} = 6,25 \cdot 10^8$$

Dus $v_q \approx 2,5 \cdot 10^4$ m/s.

3a $F = m \cdot a = 500 \cdot 1{,}0 = 500\ \text{N}$. Dus er is een kracht van 500 N nodig.

b $a = 1\ \text{m/s}^2$ De snelheid elke seconde dus met 1,0 meter per seconde toe.
Na 10 seconden heeft de auto dus een snelheid van 10 meter per seconde.

c De motorkracht blijft constant. Uit $F = m \cdot a$ volgt dat $a = F / m$.
Een 2 keer zwaardere auto ondervindt dus een 2 keer kleinere versnelling. Na 10 seconden zal deze zwaardere auto dus een snelheid van $\frac{10}{2} = 5$ meter per seconde hebben.
Een *n* keer zwaardere auto ondervindt dus een *n* keer kleinere versnelling. Na 10 seconden zal deze zwaardere auto dus een snelheid van $\frac{10}{n}$ meter per seconde hebben.

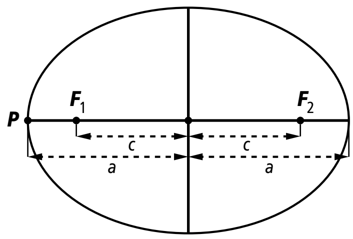
d Voor b geldt: $m \cdot v = 500 \cdot 10 = 5{,}0 \cdot 10^3\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$.
Voor c geldt: $m \cdot v = 500 \cdot n \cdot \frac{10}{n} = 5{,}0 \cdot 10^3\ \text{kg} \cdot\ \text{m/s}$.
In beide situaties is het product $m \cdot v$ dus constant.

bladzijde 74

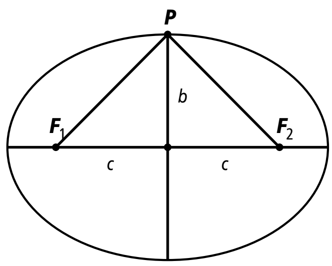
4a De impuls $p = m \cdot v = 2{,}0 \cdot 10^9 \cdot 2{,}0 \cdot 10^4 = 4{,}0 \cdot 10^{13}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$.

b Om het impulsmoment te berekenen moet je eerst $r_\perp$ berekenen.
Aan de illustratie is te zien dat $\sin(25°) = \frac{r_\perp}{r}$.
Hieruit volgt dat $r_\perp = r \cdot \sin(25°) = 8{,}0 \cdot 10^{10} \cdot \sin(25°) = 3{,}38 \cdot 10^{10}\ \text{m}$.
Dus $L = p \cdot r_\perp = 4{,}0 \cdot 10^{13} \cdot 3{,}38 \cdot 10^{10} = 1{,}35 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.

5a Neem als punt *P* bijvoorbeeld het linker snijpunt tussen de lange as en de ellips, zie de tekening hiernaast. Er geldt dan: $|F_1P| = a - c$ en $|F_2P| = a + c$.
Dus $|F_1P| + |F_2P| = (a - c) + (a + c) = 2a$.
Omdat $|F_1P| + |F_2P|$ constant blijft als je punt *P* over de ellips zou bewegen geldt dus overal op de ellips $|F_1P| + |F_2P| = 2a$.



b Zie de tekening hiernaast.
Pythagoras geeft: $b^2 + c^2 = |F_1P|^2$ en $b^2 + c^2 = |F_2P|^2$.
Je weet dat $|F_1P| + |F_2P| = 2a$. In de hiernaast getekende situatie geldt dat $|F_1P|$ en $|F_2P|$ even lang zijn, dus $|F_1P| = |F_2P| = a$. Hieruit volgt $b^2 + c^2 = |F_1P|^2 = a^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$.



c $(2c)^2 = |F_1P|^2 + |F_2P|^2 - 2|F_1P| \cdot |F_2P| \cdot \cos\alpha$

$(2c)^2 - |F_1P|^2 - |F_2P|^2 = -2|F_1P| \cdot |F_2P| \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = \dfrac{|F_1P|^2 + |F_2P|^2 - 4c^2}{2|F_1P| \cdot |F_2P|}$

Aan de tekening in het boek kun je zien dat $\alpha = \pi - 2\phi$. Substitueer dit in bovenstaande formule, je krijgt dan:

$\cos(\pi - 2\phi) = \dfrac{|F_1P|^2 + |F_2P|^2 - 4c^2}{2|F_1P| \cdot |F_2P|}$.

Dit kun je herschrijven tot $\cos(2\phi) = -\dfrac{|F_1P|^2 + |F_2P|^2 - 4c^2}{2|F_1P| \cdot |F_2P|}$.

Uit substitutie van de gegeven formule $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ volgt:

$1 - 2\sin^2\phi = -\dfrac{|F_1P|^2 + |F_2P|^2 - 4c^2}{2|F_1P| \cdot |F_2P|}$.

$\sin^2\phi = \frac{1}{2}\dfrac{|F_1P|^2 + |F_2P|^2 - 4c^2}{2|F_1P| \cdot |F_2P|} + \frac{1}{2} = \dfrac{|F_1P|^2 + |F_2P|^2 - 4c^2}{4|F_1P| \cdot |F_2P|} + \dfrac{2|F_1P| \cdot |F_2P|}{4|F_1P| \cdot |F_2P|} =$
$\dfrac{|F_1P|^2 + |F_2P|^2 - 4c^2 + 2|F_1P| \cdot |F_2P|}{4|F_1P| \cdot |F_2P|} = \dfrac{(|F_1P| + |F_2P|)^2 - 4c^2}{4|F_1P| \cdot |F_2P|}$

d In opdracht a is bewezen dat $|F_1P| + |F_2P| = 2a$. Als je dit substitueert in de teller van de formule die je bij opdracht c hebt afgeleid krijg je:

$\sin^2\phi = \dfrac{(|F_1P| + |F_2P|)^2 - 4c^2}{4|F_1P| \cdot |F_2P|} = \dfrac{(2a)^2 - 4c^2}{4|F_1P| \cdot |F_2P|} = \dfrac{4a^2 - 4c^2}{4|F_1P| \cdot |F_2P|} = \dfrac{4\left(a^2 - c^2\right)}{4|F_1P| \cdot |F_2P|} = \dfrac{\left(a^2 - c^2\right)}{|F_1P| \cdot |F_2P|}$.

Je kunt $|F_1P| + |F_2P| = 2a$ herschrijven tot $|F_2P| = 2a - |F_1P|$. Vul dit in in de noemer van bovenstaande breuk. Dit geeft: $\sin^2\phi = \dfrac{\left(a^2 - c^2\right)}{|F_1P| \cdot |F_2P|} = \dfrac{\left(a^2 - c^2\right)}{|F_1P| \cdot \left(2a - |F_1P|\right)} = \dfrac{(a^2 - c^2)}{2a|F_1P| - |F_1P|^2}$.

e In opdracht b is bewezen dat $b^2 = a^2 - c^2$. Als je dit in de bij opdracht d berekende formule substitueert krijg je:

$\sin^2\phi = \dfrac{(a^2 - c^2)}{2a|F_1P| - |F_1P|^2} = \dfrac{b^2}{2a|F_1P| - |F_1P|^2} = \dfrac{1}{\frac{2a}{b^2}|F_1P| - \frac{1}{b^2}|F_1P|^2}$.

f Substitueer in de uitdrukking van opdracht e $q = \dfrac{2a}{b^2}$ en $p = -\dfrac{1}{b^2}$

Dit geeft $\sin^2\phi = \dfrac{1}{q|F_1P| + p|F_1P|^2} \Rightarrow \sin\phi = \dfrac{1}{\sqrt{p|F_1P|^2 + q|F_1P|}}$.

bladzijde 75

6a Het impulsmoment $L = p \cdot r_{\perp}$. De impuls $p = m \cdot v$ en $r_{\perp} = r \cdot \sin\phi$.
Dit geeft: $L = p \cdot r_{\perp} = m \cdot v \cdot r \cdot \sin\phi$.

b De totale energie van de planeet is de constante c_E. Uit de wet van behoud van energie volgt dan dat $E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = c_E$.

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = c_E \Rightarrow v^2 - \frac{2GM}{r} = \frac{2c_E}{m} \Rightarrow v^2 = \frac{2c_E}{m} + \frac{2GM}{r} \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2c_E}{m} + \frac{2GM}{r}}$$

c Het totale impulsmoment van de planeet $L = m \cdot v \cdot r \cdot \sin\phi = c_L$.

Substitueer in deze formule $v = \sqrt{\frac{2c_E}{m} + \frac{2GM}{r}}$, je krijgt dan:

$$\sqrt{\frac{2c_E}{m} + \frac{2GM}{r}} \cdot m \cdot r \cdot \sin\phi = c_L \Rightarrow \sqrt{\frac{2c_E}{m} + \frac{2GM}{r}} \cdot \sqrt{m^2 \cdot r^2} \cdot \sin\phi = c_L.$$

dus $\sqrt{2c_E mr^2 + 2GMm^2 r} \cdot \sin\phi = c_L$

$$\sin\phi = \frac{c_L}{\sqrt{2c_E mr^2 + 2GMm^2 r}} = \frac{1}{c_L^{-1} \cdot \sqrt{2c_E mr^2 + 2GMm^2 r}}$$

$$\sin\phi = \frac{1}{\sqrt{2c_E c_L^{-2} mr^2 + 2c_L^{-2} GMm^2 r}}$$

d Door de wetten van behoud van energie en behoud van impulsmoment zijn c_E en c_L twee constanten. De massa van de zon M en van een planeet m zijn ook constant en de gravitatieconstante G is een natuurconstante. Het product van constanten is nog steeds constant, dus als je definieert $p = 2c_E c_L^{-2} m$ en $q = 2c_L^{-2} GMm^2$ dan zijn p en q constanten en kun je de vergelijking die je bij opdracht c hebt afgeleid schrijven als:
$\sin\phi = \frac{1}{\sqrt{pr^2 + qr}}$.

e In opdracht 5 heb je aangetoond dat voor een willekeurig punt P op de ellips geldt:
$\sin\phi = \frac{1}{\sqrt{p|F_1P|^2 + q|F_1P|}}$ met ϕ de hoek tussen F_1P en de raaklijn aan de ellips in punt P, $|F_1P|$ de afstand van punt P naar het brandpunt F_1 en p en q twee constanten.
In opdracht 6a-d heb je aangetoond dat voor een planeet op willekeurig punt P van haar baan om de zon geldt: $\sin\phi = \frac{1}{\sqrt{pr^2 + qr}}$ met ϕ de hoek tussen verbindingslijn r en de snelheidsvector (de raaklijn aan de baan in punt P), r de afstand van punt P naar de zon en p en q twee constanten.
Dus de vergelijking die de baan van een planeet om de zon beschrijft is gelijk aan de vergelijking die de positie van een punt op een ellips beschrijft.
Hieruit volgt dat een planeet in een ellipsvormige baan om de zon beweegt, met de zon in één van de brandpunten van de ellips. Dit is de eerste wet van Kepler!

7a A is een driehoek. Voor de oppervlakte van een driehoek geldt:
$\text{oppervlak} = \frac{1}{2} \cdot \text{basis} \cdot \text{hoogte}$. Neem PP' als basis, de bijbehorende hoogte is dan $r_\perp$.

Dus $A = \frac{1}{2} r_\perp PP'$.

b P is de positie van de planeet en P' is de positie een tijdsinterval t later. Dus PP' is de door de planeet afgelegde afstand x in tijdsinterval t. Dus de snelheid van de planeet $v = \frac{x}{t} = \frac{PP'}{t}$.

c De oppervlakte A die per tijdseenheid t wordt beschreven wordt gegeven door $\frac{A}{t}$.
In opdracht a heb je aangetoond dat $A = \frac{1}{2} r_\perp PP'$. Uit opdracht b weet je dat $v = \frac{PP'}{t}$.
Voorgaande samen nemen geeft $\frac{A}{t} = \frac{\frac{1}{2} r_\perp PP'}{t} = \frac{1}{2} r_\perp \frac{PP'}{t} = \frac{1}{2} r_\perp v$.
Het impulsmoment $L = p \cdot r_\perp = m \cdot v \cdot r_\perp \Rightarrow r_\perp v = \frac{L}{m}$.
Substitutie in de vergelijking die je voor $\frac{A}{t}$ hebt afgeleid geeft: $\frac{A}{t} = \frac{1}{2} r_\perp v = \frac{L}{2m}$.

d Het impulsmoment van planeten is constant, dus $L = c_L$.
De door de voerstraal beschreven oppervlakte A per tijdseenheid t is dus
$\frac{A}{t} = \frac{L}{2m} = \frac{c_L}{2m}$ en dit is constant. Dus $\frac{A}{t}$ is constant; dit is de tweede wet van Kepler!