Blok 1 - Vaardigheden

bladzijde 58

1a $f(x)=0$ als $x^2-3x=0$. Deze vergelijking geeft $x(x-3)=0$ en dus $x=0$ of $x=3$.

b $2x+2=0$ als $x=-1$, dus de verticale asymptoot is $x=-1$.

c De grafiek moet 1 naar rechts geschoven , dus x vervangen door x + 1 geeft

$$g(x)=\frac{(x-1)^2-3(x-1)}{2(x-1)+2}=\frac{x^2-5x+4}{2x}$$

d De grafiek van g heeft de nulpunten van f maar dan 1 naar rechts, dus $x=1$ en $x=4$

e $g(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{2x}=\dfrac{x^2}{2x}-\dfrac{5x}{2x}+\dfrac{4}{2x}=\frac{1}{2}x-2\frac{1}{2}+\dfrac{2}{x}$

f De grafiek van g weer 'terugschuiven' door elke x te vervangen door $x+1$.

$$f(x)=\tfrac{1}{2}(x+1)-2\tfrac{1}{2}+\frac{2}{x+1}=\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}-2\tfrac{1}{2}+\frac{2}{x+1}=\tfrac{1}{2}x-2+\frac{2}{x+1}$$

g Als x groot wordt, positief of negatief, wordt de breuk in het voorschrift van f heel klein, dat wil zeggen verwaarloosbaar ten opzichte van de eerste twee termen in het voorschrift. Dus de scheve asymptoot van de grafiek van f is $y=\frac{1}{2}x-2$.

2a Als x een grote positieve waarde is, is e^x dat nog veel meer. (Denk aan de grafiek van e^x .) Dus de breuk $\dfrac{x}{e^x-1}$ levert een heel klein positief getal op.

b Als x negatieve waarden vlak bij 0 aanneemt, heeft e^x waarden net onder 1.
Dit betekent dat e^x-1 negatieve waarden vlak bij 0 aanneemt. Het blijkt, door bijvoorbeeld $x=-0{,}001$ in te vullen, dat teller en noemer ongeveer even snel naar 0 gaan. De breuk $\dfrac{x}{e^x-1}$ heeft dan waarde 1.

c Bij opgave a is beredeneerd dat voor grote positieve waarden van x de breuk in het functievoorschrift een heel klein positief getal oplevert. Van het voorschrift blijft dus alleen de eerste term over, dat wil zeggen de grafiek lijkt voor grote positieve waarden van x steeds meer op de lijn $y=\frac{1}{2}x$.

d De grafiek is symmetrisch in de y-as als geldt $f(x)=f(-x)$.

$$f(x)=\tfrac{1}{2}x+\frac{x}{e^x-1}=x\left(\tfrac{1}{2}+\frac{1}{e^x-1}\right)=x\left(\tfrac{1}{2}+\frac{1}{e^x-1}\right)=x\left(\frac{e^x-1}{2(e^x-1)}+\frac{2}{2(e^x-1)}\right)=x\left(\frac{e^x+1}{2(e^x-1)}\right)$$

$$f(-x)=\tfrac{1}{2}(-x)+\frac{-x}{e^{-x}-1}=x\left(-\tfrac{1}{2}+\frac{-1}{e^{-x}-1}\right)=x\left(-\tfrac{1}{2}+\frac{e^x}{-1+e^x}\right)=$$

$$x\left(\frac{-e^x+1}{2(e^x-1)}+\frac{2e^x}{2(e^x-1)}\right)=x\left(\frac{e^x+1}{2(e^x-1)}\right)$$

Conclusie: de grafiek is symmetrisch in de y-as.

e Als x een grote negatieve waarde is, is e^x een heel klein positief getal. (Denk aan de grafiek van e^x .) Dus de noemer e^x-1 levert bijna -1 op, waardoor de breuk $\dfrac{x}{e^x-1}$ als geheel $-x$ oplevert. Van het voorschrift blijft voor grote negatieve waarden van x dus $y=\frac{1}{2}x-x=-\frac{1}{2}x$ over.

f Bij opgave b is beredeneerd dat als x negatieve waarden vlak bij 0 aanneemt, de functie zelf de waarde 1 heeft. Als x positieve waarden vlak bij 0 aanneemt geldt hetzelfde. De grafiek van f heeft dus geen verticale asymptoot, maar als het ware een 'gaatje' voor $x = 0$.

bladzijde 59

3a $g(x) = \ln(\mathrm{e}x^2) = \ln \mathrm{e} + \ln x^2 = 1 + 2\ln x$ (want $x > 0$), dus de grafiek van g ontstaat door de grafiek van f verticaal te vermenigvuldigen met factor 2 en 1 omhoog te schuiven.

$h(x) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}}{x}\right) = \ln \mathrm{e} - \ln x = 1 - \ln x$, dus de grafiek van h ontstaat door de grafiek van f verticaal te vermenigvuldigen met factor –1 en 1 omhoog te schuiven.

b $g(x) = h(x)$ geeft $\ln \mathrm{e}x^2 = \ln\left(\frac{\mathrm{e}}{x}\right)$, waaruit volgt $\mathrm{e}x^2 = \frac{\mathrm{e}}{x}$. Dit geeft $\mathrm{e}x^3 = \mathrm{e}$, hieruit volgt $x^3 = 1$ en dus $x = 1$. De coördinaten van het snijpunt van de grafieken van g en h zijn $(1, 1)$.

c g in horizontale richting verschuiven geeft $k(x) = 1 + 2\ln(x + c)$.

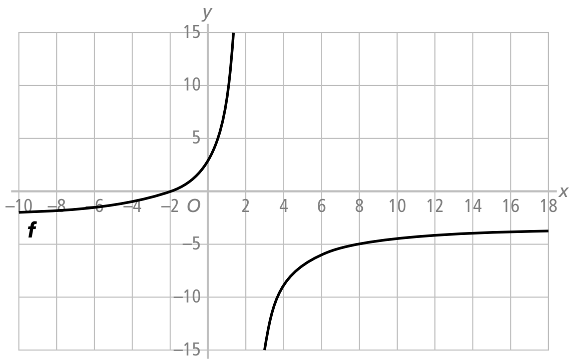
k door $(0, 0)$ dus $1 + 2\ln c = 0 \Rightarrow \ln c = -\frac{1}{2} \Rightarrow c = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\ \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Dit geeft $k(x) = 1 + 2\ln(x + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}})$ met $D_k = \langle -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}, \rightarrow \rangle$.

d $m(x) = g(x) + h(x) = 1 + 2\ln x + 1 - \ln x = 2 + \ln x$, dus de grafiek van m volgt uit die van f door de grafiek van f twee omhoog te schuiven.

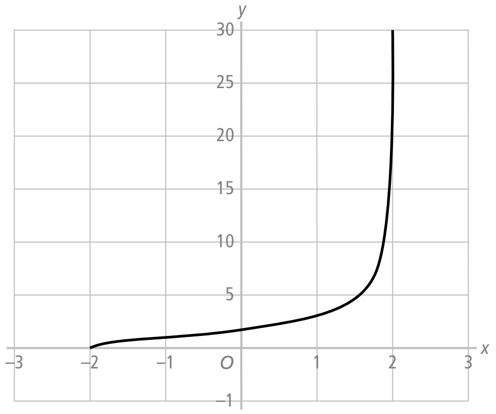
e $l(x) = g(x) - h(x) = (1 + 2\ln x) - (1 - \ln x) = 3\ln x$, dus de grafiek van l volgt uit die van f door de grafiek van f verticaal te vermenigvuldigen met factor 3.

4a



b $f(x) = \dfrac{3x + 6}{2 - x} = \dfrac{-3x - 6}{x - 2} = \dfrac{-3(x - 2) - 12}{x - 2} = \dfrac{-3(x - 2)}{x - 2} - \dfrac{12}{x - 2} = -3 - \dfrac{12}{x - 2}$

c



Om het domein van v te bepalen onderzoek je voor welke waarden van x geldt $f(x) \geq 0$.
Met behulp van de grafiek van opgave a vind je het domein $-2 \leq x < 2$.

d $f(x) = -3 - \dfrac{12}{x-2} = -3 - 12(x-1)^{-1}$, $f'(x) = 12(x-2)^{-2} = \dfrac{12}{(x-2)^2}$ en

$f'(-2) = \dfrac{12}{(-4)^2} = \dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4}$

e $v(x) = \left(f(x)\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \quad v'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(f(x)\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (-3 - \dfrac{12}{x-2})^{-\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{12}{(x-2)^2} = \dfrac{1}{2\sqrt{-3 - \dfrac{12}{x-2}}} \cdot \dfrac{12}{(x-2)^2}$

$v'(-2)$ bestaat niet (vanwege deling door nul). De helling gaat naar $+\infty$, de grafiek van v heeft hier een verticale raaklijn.

f Het snijpunt met de y-as is $(0, \sqrt{3})$. De formule voor de raaklijn is $y = ax + b$ met $a = v'(0)$.

$v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{-3 - \dfrac{12}{x-2}}} \cdot \dfrac{12}{(x-2)^2}$ en dus $v'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{-3 - \dfrac{12}{0-2}}} \cdot \dfrac{12}{(0-2)^2} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} \cdot 3 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Dit geeft $y = \frac{1}{2}\sqrt{3}x + b$. Om b te bepalen vul je het punt $(0, \sqrt{3})$ in: $\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 0 + b$,

dus $b = \sqrt{3}$. De formule voor de raaklijn is dus $y = \frac{1}{2}\sqrt{3}x + \sqrt{3}$.
Het randpunt van de grafiek van v is $(-2, 0)$. Invullen van de x-coördinaat in

de formule voor de raaklijn $y = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot -2 + \sqrt{3} = 0$ levert inderdaad de juiste y coördinaat.
Conclusie: de raaklijn aan de grafiek van v in het snijpunt met de y-as gaat door het randpunt van de grafiek van v.

5a De functie is een quotiënt met in de noemer nog een quotiënt. Voor beide quotiënten geldt dat de functie niet bestaat als de noemer gelijk aan nul is. Dat

wil zeggen als $\ln x = 0$ of als $1 + \dfrac{1}{\ln x} = 0$. De eerste vergelijking levert $x = 1$ en de

tweede vergelijking levert achtereenvolgens $\dfrac{1}{\ln x} = -1$, $\ln x = -1$ en dus $x = \dfrac{1}{e}$.

Het domein is dus: $D_f = \langle 0, \frac{1}{e} \rangle \cup \langle \frac{1}{e}, 1 \rangle \cup \langle 1, \rightarrow \rangle$

b Als $x \downarrow 0$ dan gaat $\ln x \to -\infty$ dus $\frac{1}{\ln x} \uparrow 0$. Hieruit volgt dat $1+\frac{1}{\ln x} \uparrow 1 \Rightarrow f(x) \downarrow 1$.
De grafiek nadert dus naar het punt (0, 1).

c Voor $x = \frac{1}{e}$ heeft de grafiek wel een verticale asymptoot want dan gaat $1+\frac{1}{\ln x}$ naar 0.
Voor $x = 1$ heeft de grafiek geen verticale asymptoot: de grafiek loopt door en heeft als het ware een 'gaatje'. Als x een waarde net onder 1 heeft is $\ln x$ bijna 0, $\frac{1}{\ln x}$ heel groot en $\frac{1}{1+\frac{1}{\ln x}}$ dus bijna 0. Als x een waarde net boven 1 heeft is $\ln x$ bijna 0, $\frac{1}{\ln x}$ heel groot en $\frac{1}{1+\frac{1}{\ln x}}$ dus bijna 0. Links en rechts van $x = 1$ heeft de grafiek dus bijna dezelfde waarde.

d Als x heel groot is, is $\ln x$ ook heel groot, $\frac{1}{\ln x}$ bijna 0 en $\frac{1}{1+\frac{1}{\ln x}}$ dus bijna 1. De grafiek heeft dus een horizontale asymptoot $y = 1$.

e De functie g is niet dezelfde functie als f, omdat de functie g voor $x = 1$ wel bestaat, terwijl de functie f voor deze x-waarde niet bestaat. Dus $D_g = \langle 0, \frac{1}{e} \rangle \cup \langle \frac{1}{e}, \rightarrow \rangle$

bladzijde 60

6a Als de grafiek van h de x-as snijdt of raakt, moet gelden $h(x) = 0$.
$h(x) = 0$ als $2\sin x - 3 = 0$, dit geeft $2\sin x = 3$ en dus $\sin x = 1\frac{1}{2}$. Deze vergelijking heeft geen oplossing, dus de grafiek van h snijdt of raakt de x-as niet.

b $h(x) = \frac{2\sin x - 3}{\sin x} = \frac{2\sin x}{\sin x} - \frac{3}{\sin x} = 2 - \frac{3}{\sin x}$

c $-1 \le \sin x \le 1$. Wanneer $0 < \sin x \le 1$ dan is $\frac{1}{\sin x} \ge 1 \Rightarrow \frac{3}{\sin x} \ge 3 \Rightarrow -\frac{3}{\sin x} \le -3 \Rightarrow 2 - \frac{3}{\sin x} \le -1$
Wanneer $-1 \le \sin x < 0$ dan is $\frac{1}{\sin x} \le -1 \Rightarrow \frac{3}{\sin x} \le -3 \Rightarrow -\frac{3}{\sin x} \ge 3 \Rightarrow 2 - \frac{3}{\sin x} \ge 5$.
Dus geldt $h(x) \le -1$ of $h(x) \ge 5$.

d De waarde van p geeft aan met welke factor de functie $\sin x$ verticaal vermenigvuldigd wordt. Om de maxima van de functie h niet te raken/snijden moet gelden $-1 < p < 1$.

7a $g(x) = 3 - \frac{6}{{}^2\log x} = \frac{3 \cdot {}^2\log x}{{}^2\log x} - \frac{6}{{}^2\log x} = \frac{3 \cdot {}^2\log x - 6}{{}^2\log x}$

b $g(x) = 0$ als $3 \cdot {}^2\log x - 6 = 0$. Deze vergelijking geeft $3 \cdot {}^2\log x = 6$, waaruit volgt ${}^2\log x = 2$ en dus $x = 4$.

c Wanneer $x \to \infty \Rightarrow {}^2\log x \to \infty \Rightarrow \frac{6}{{}^2\log x} \to 0 \Rightarrow 3 - \frac{6}{{}^2\log x} \to 3 \Rightarrow g(x) \to 3$.
Dus de horizontale asymptoot is $y = 3$.

d Onderzoek of de noemer van de functie g een nulpunt heeft: ${}^2\log x = 0$ als $x = 1$.
De grafiek van g heeft dus een verticale asymptoot $x = 1$.

e Als x een heel klein positief getal is, is ${}^2\log x$ een groot negatief getal en $\frac{6}{{}^2\log x}$ dus heel klein. In de buurt van $x = 0$ komt de functie g dus in de buurt van $y = 3$. De grafiek nadert dus tot het punt $(0, 3)$.

8a Het domein van g is $\langle 0, \rightarrow\rangle$.

b $g'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$, $g'(x) = 0$ als $\ln x = -1$ en dus als $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$. De functie g heeft een minimum voor $x = \frac{1}{e}$. Omdat $g(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}\ln\frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$ en $g(1) = 0$ heeft de functie g op het interval $\langle 0, 1\rangle$ bereik $\left[-\frac{1}{e}, 0\right\rangle$.

c Alle waarden van g worden gekwadrateerd om de waarden van h te krijgen. Dus de functie h heeft op het interval $\langle 0, 1\rangle$ bereik $\left\langle 0, \frac{1}{e^2}\right]$.

d $f(x) = 0$ als de teller van f gelijk aan nul is: $1 \neq 0$, dus de grafiek van f heeft geen nulpunt.
Als x heel groot is, is de uitkomst van de functie h heel groot en is de uitkomst van de functie f dus bijna nul. De grafiek van f heeft dus een horizontale asymptoot $y = 0$.

e Onderzoek of de noemer van de functie f een nulpunt heeft: $h(x) = 0$ geeft $x^2 \ln^2 x = 0$, waaruit volgt $x^2 = 0$ of $\ln x = 0$. De eerste vergelijking geeft een oplossing die buiten het domein van h valt en de tweede vergelijking geeft de oplossing $x = 1$. De grafiek van f heeft dus een verticale asymptoot $x = 1$.

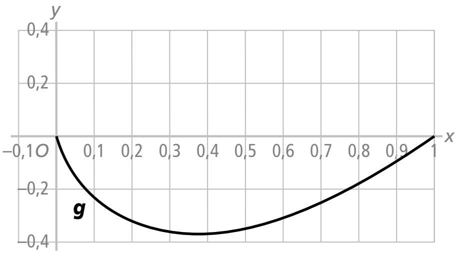
f $0 < x < 1 \Rightarrow -\frac{1}{e} \leq g(x) < 0 \Rightarrow 0 < h(x) = (g(x))^2 \leq \frac{1}{e^2}$

Omdat $f(x) = \frac{1}{h(x)}$ geldt dat als $h(x) \downarrow 0 \Rightarrow f(x) \rightarrow \infty$, dit gebeurt als $x \downarrow 0$ en als $x \uparrow 1$

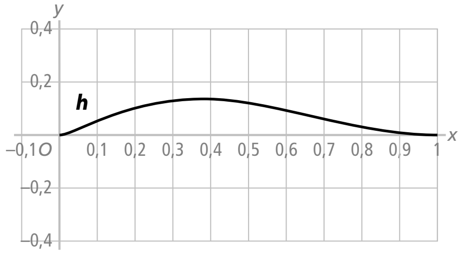
Verder geldt dat $h(x) \leq \frac{1}{e^2} \Rightarrow f(x) \geq e^2$.

Dus heeft de grafiek van f op het interval $\langle 0,1\rangle$ twee verticale asymptoten en een minimum.

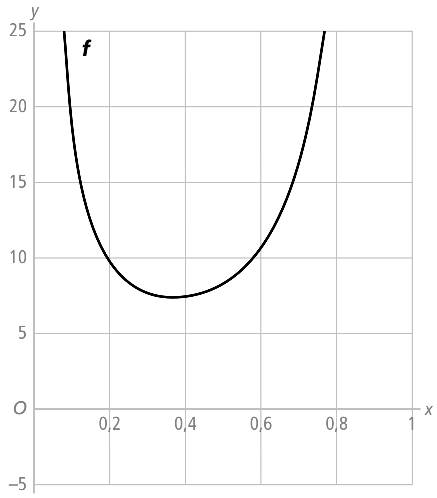
Maak schetsen van achtereenvolgens de functie g, h en f op het interval $\langle 0, 1\rangle$.



Kwadrateren van deze functie levert een 'omgeklapte' grafiek, waarbij de absolute waarden kleiner zijn.

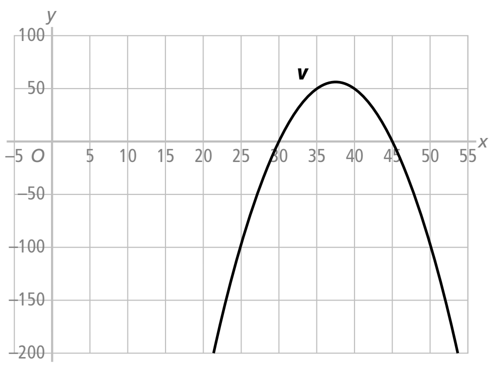


Hoe kleiner de waarde in bovenstaande grafiek, hoe groter de waarde in onderstaande grafiek.



bladzijde 61

9a



Een bergparabool.

b De teller in de formule voor V is een constante. De noemer in de formule voor V heeft een maximum (zie de grafiek bij opgave a). Dus het quotiënt heeft een minimum, dat wil zeggen de grafiek van V heeft een laagste punt.

c Het maximum bepalen van de grafiek bij opgave a levert $T = 37{,}5$.

d Hoe kleiner de noemer, hoe groter de verdubbelingstijd .Voor $T = 40$ heeft de noemer een grotere waarde dan voor $T = 42$ (zie grafiek bij opgave a), dus voor $T = 42$ is de verdubbelingstijd groter dan voor $T = 40$.

e De groei is het snelst als de verdubbelingstijd minimaal is. De verdubbelingstijd V is minimaal als de de noemer maximaal is, dat wil zeggen als $T = 37{,}5$ (zie opgave c).

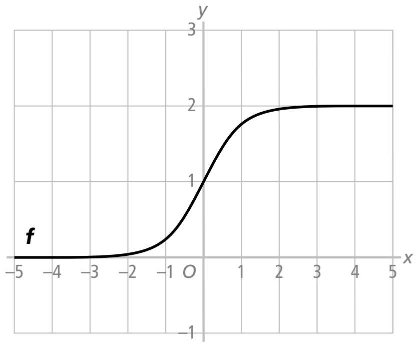
10a $e^{-2x} > 0 \Rightarrow 1+e^{-2x} > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{1+e^{-2x}} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{2}{1+e^{-2x}} < 2 \Rightarrow 0 < f(x) < 2$

b De term e^{-2x} is dalend, de noemer $1+e^{-2x}$ is dan ook dalend, dus het quotiënt $\frac{2}{1+e^{-2x}}$ is stijgend.

c De noemer van f is ongelijk aan nul voor elke waarde van x, dus de grafiek heeft geen verticale asymptoot.
De teller van f is ongelijk aan nul voor elke waarde van x, dus de grafiek heeft geen nulpunt.

d De horizontale asymptoten van de grafiek van f zijn $y=0$ en $y=2$.

e



f $f(0)=1$, dus het snijpunt van de grafiek van f met de y-as is $(0, 1)$.

$f(x)=\frac{2}{1+e^{-2x}}$, dus $f'(x)=\frac{(1+e^{-2x})\cdot 0-2\cdot e^{-2x}\cdot -2}{(1+e^{-2x})^2}=\frac{4e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2}$ en dus

$$f''(x)=\frac{(1+e^{-2x})^2\cdot 4e^{-2x}\cdot -2-4e^{-2x}\cdot 2\cdot(1+e^{-2x})\cdot e^{-2x}\cdot -2}{(1+e^{-2x})^4}=\frac{-8e^{-2x}(1+e^{-2x})+16e^{-4x}}{(1+e^{-2x})^3}$$

Als $(0, 1)$ een buigpunt van de grafiek van f is, moet gelden $f''(0)=0$. Invullen laat zien

$$f''(0)=\frac{-8e^{-2\cdot 0}(1+e^{-2\cdot 0})+16e^{-4\cdot 0}}{(1+e^{-2\cdot 0})^3}=\frac{-8\cdot 2+16}{2^3}=0.$$

Conclusie: het snijpunt van de grafiek van f met de y-as is een buigpunt van de grafiek van f.

11a In de noemer staat een kwadraat, dus de noemer is altijd positief. In de teller staat de term $e^{-\frac{1}{x}}$, deze term is voor elke waarde van x positief. De teller als geheel is dus ook positief. Conclusie: het quotiënt is altijd positief, dus de grafiek van de functie ligt boven de x-as.

b

$$x \to \pm\infty \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{x} \to 0 \Rightarrow e^{-\frac{1}{x}} \to 1 \Rightarrow 5e^{-\frac{1}{x}} \to 5 \\ x^2 \to \infty \Rightarrow \frac{1}{x^2} \to 0 \end{cases}$$

Dus $f(x) \to 5\cdot 0 = 0 \Rightarrow y=0$ is horizontale asymptoot.

c Als $x \uparrow 0$ dan $\begin{cases} -\frac{1}{x} \to \infty \\ x^2 \downarrow 0 \end{cases}$ dus $\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \to \infty \Rightarrow \frac{5e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \to \infty$, dus verticale asymptoot $x = 0$

Wanneer $x \downarrow 0$ dan $\begin{cases} -\frac{1}{x} \to -\infty \Rightarrow e^{-\frac{1}{x}} \downarrow 0 \\ x^2 \downarrow 0 \end{cases}$ Omdat nu de teller en de noemer beiden naar 0 gaan, kun je niet direkt zeggen wat de breuk gaat doen. Een tabel kan duidelijk maken wat er gebeurt.

x	0,1	0,05	0,01	0,001
$f(x)$	0,0227	$4,1 \cdot 10^{-6}$	$1,9 \cdot 10^{-39}$	0

Heel dicht in de buurt van $x = 0$ gaat de grafiek van f bijna horizontaal richting $y = 0$, dus naar het punt $(0, 0)$.

d $F'(x) = 5e^{-\frac{1}{x}} \cdot x^{-2} = \frac{5e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = f(x)$

e De oppervlakte $= \int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)\,dx = \left[5e^{-\frac{1}{x}}\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = 5e^{-\frac{1}{2}} - 5e^{-\frac{1}{\frac{1}{2}}} = 2,356$

f De functie g heeft dezelfde y-waarden als die van f, alleen vind je ze bij andere waarden van x: de y-waarde van de functie f bij de waarde x, vind je bij de functie g voor de waarde $\frac{1}{x}$. De top van de grafiek van g heeft dus de coördinaten $Q\left(2, \frac{20}{e^2}\right)$