Hoofdstuk 9 - Ruimtemeetkunde

Voorkennis: Twee soorten tekeningen

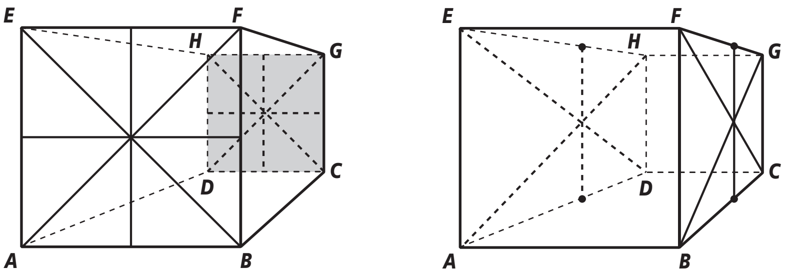
bladzijde 254

V-1a Twee lijnen zijn evenwijdig als ze elkaar nooit snijden, hoe ver je de lijnen ook doortrekt. In werkelijkheid zijn de ribben FG, EH en AD evenwijdig aan ribbe BC. In figuur 1 zijn de ribben ook daadwerkelijk evenwijdig getekend. In figuur 2 zijn de evenwijdige ribben zo getekend dat hun verlengden elkaar wel snijden in een punt. Dit punt wordt het verdwijnpunt genoemd.

b In figuur 2 zijn de ribben AD, BC, FG en EH allen met een andere lengte getekend. Alle vier deze ribben zijn korter getekend dan ribbe AB.

c Figuur 2 is een perspectieftekening. Bij perspectieftekeningen worden ver weg gelegen voorwerpen steeds kleiner getekend. MC ligt verder weg dan BM. Als BM en MC even groot waren dan zou MC dus kleiner getekend moeten zijn. Maar MC is even groot getekend als BM, dus MC is in werkelijkheid groter dan BM. Punt M ligt dus niet in het midden.

d De middens van de ribben kan je vinden door gebruik te maken van diagonalen: teken daarom eerst de diagonalen.
Voor de ribben die in het vlak van de tekening liggen kan je door de snijpunten van de diagonalen een horizontale lijn en een verticale lijn tekenen. De plaats waar deze lijnen de ribben raken zijn de middens. Hiermee kan je de middens van AB, BF, EF, AE, CD, DH, HG en CG vinden. Zie de linker tekening.
Bij de andere ribben kan je door het snijpunt van de diagonalen alleen een verticale lijn trekken. Hiermee vind je de middens van de ribben BC, FG, AD en EH. Zie de rechter tekening.

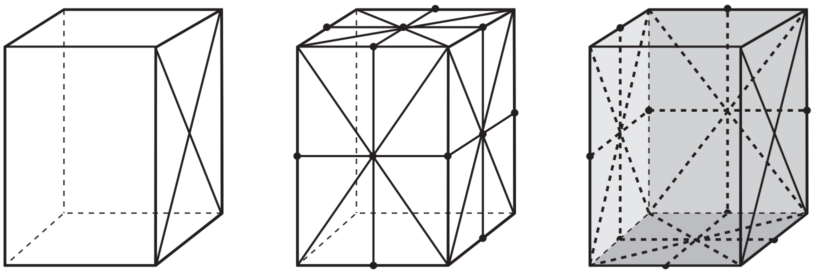


N.b.: je kan de middelpunten van de ribben in *die in het vlak van de tekening liggen* ook vinden door gewoon meten en het midden nemen.

bladzijde 255

V-2a Hieronder links is de balk met de onzichtbare ribben getekend. In het midden zijn de middens van de voorste zijden van de kubus getekend, samen met de hulplijnen (de diagonalen, etc.) die nodig waren om deze middens te vinden.

Rechts zijn de middens van de achterste zijden van de kubus getekend.



b Er is gebruik gemaakt van de eigenschap dat bij een parallelprojectie lijnen die in werkelijkheid evenwijdig lopen ook in de tekening evenwijdig lopen.

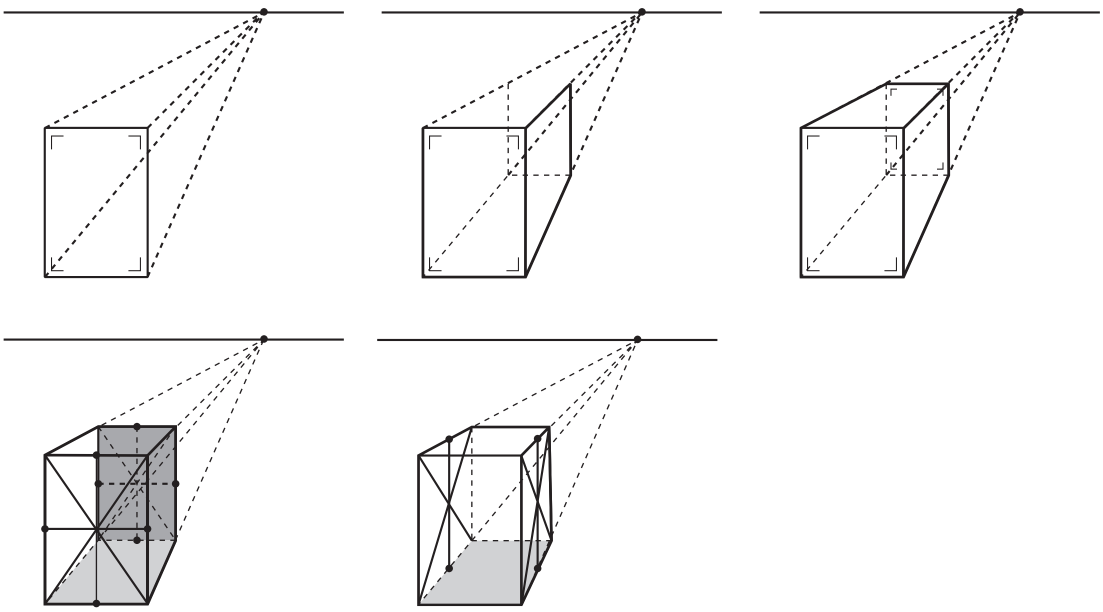
c Om een perspectieftekening te maken kan de je volgende stappen volgen. Bij elk stap hoort een van onderstaande figuren:

Stap 1: teken het voorvlak, bepaal een horizon en een verdwijnpunt en trek hulplijnen van de hoekpunten van het vlak naar het verdwijnpunt.

Stap 2: trek tussen twee hulplijnen een verticale (of horizontale) lijn, dit is één van de achterzijden.

Stap 3: door loodrecht op deze zijde hulplijnen twee nieuwe lijnen te tekenen heb je de volgende twee zijden. Verbind deze zijden met een lijn om de laatste zijde te vinden.

d De middens van de ribben kunnen net als bij opgave 1.d. met behulp van diagonalen worden gevonden. In onderstaande tekeningen zijn de middelpunten aangegeven.

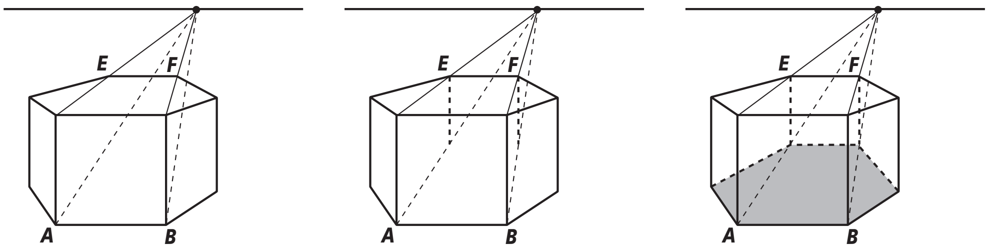


V-3a De onzichtbare ribben kan je op de volgende wijze construeren: (bij elke stap hoort een van onderstaande figuren):

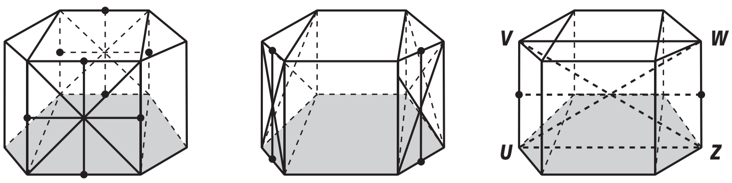
Stap 1: teken werklijnen van de punten A en B naar het verdwijnpunt.

Stap 2: teken vanuit de punten E en F een (gestippelde) verticale lijn. De kruispunten van deze lijnen met de werklijnen zijn de twee onzichtbare hoeken.

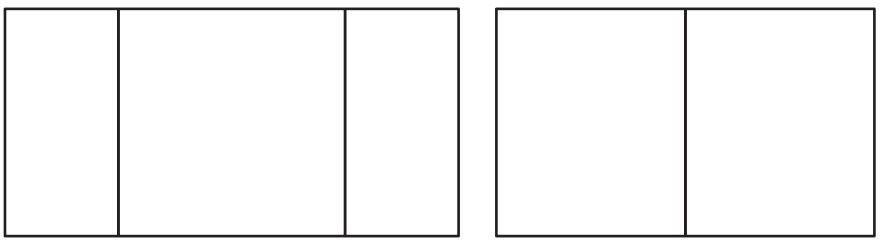
Stap 3: teken de nog ontbrekende ribben.



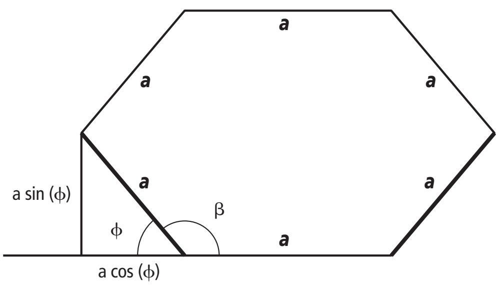
b De middens kan je vinden met behulp van de diagonalen. Voor de ribben die in het vlak van de tekening liggen kan je door de snijpunten van de diagonalen een horizontale lijn en een verticale lijn tekenen. De plaats waar deze lijnen de ribben raken zijn de middens. Zie de linker tekening. De andere zijvlakken liggen niet in het vlak van de tekening. Bij deze vlakken kan je daarom door het snijpunt van de diagonalen alleen een verticale lijn trekken. De plek waar deze verticale lijn de bovenste en onderste ribben raakt, zijn de middens van deze ribben. Zie middelste tekening. Voor de verticale ribben aan de zijkanten (UV en WZ) kan het midden worden bepaald door $UVWZ$ als vlak te zien. Dit vlak ligt in het vlak van de tekening. Teken de diagonalen en trek een horizontale lijn door het snijpunt van de diagonalen om de middens van UV en WZ te bepalen. Zie rechter tekening.



c Hieronder links het vooraanzicht en rechts het zijaanzicht.

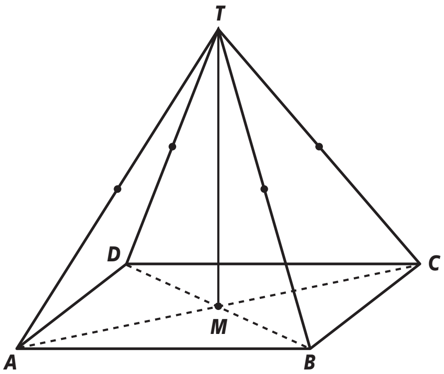


Het vooraanzicht heeft een vierkant midden met zijden van lengte a. De rechthoeken hebben een breedte van $a\cos(60)$. Het zijaanzicht bestaat uit twee rechthoeken met een hoogte a en een breedte $a\sin(60)$. Om in te zien waarom is hieronder een schets (dus niet op schaal) van het bovenaanzicht getekend.



Een som van de hoeken van een zeshoek is 720° graden. (Immers, de som van de hoeken van een driehoek is $180°$ en de som van de hoeken van een vierkant is $360° = 2 \cdot 180°$. We kunnen op dezelfde wijze doorgaan: de som van de hoeken van een vijfhoek is $3 \cdot 180° = 540°$ en de som van de hoeken van een zeshoek is $4 \cdot 180° = 720°$.) We hebben te maken met een regelmatige zeshoek, dus elke hoek van de zeshoek (waaronder β) heeft een grootte van $\frac{720°}{6} = 120°$.
Hieruit volgt dat $\theta = 180 - 120 = 60°$. Dus vanuit de voorkant gezien hebben de dik gedrukte zijden een lengte $a\cos(60)$ en vanaf de zijkant gezien een lengte $a\sin(60)$.

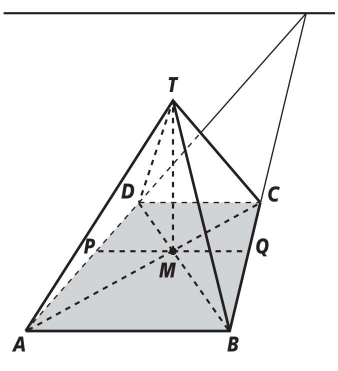
V-4a De piramide is even hoog als de lengte AB. Vanuit M kan je daarom een verticale lijn omhoog tekenen met dezelfde lengte als AB. Punt T kan je vervolgens met rechte lijnen verbinden met de punten A, B, C en D. De middens van de lijnen TA, TB, TC en TD kan je vinden door gewoon opmeten. Je krijgt dan onderstaande tekening.



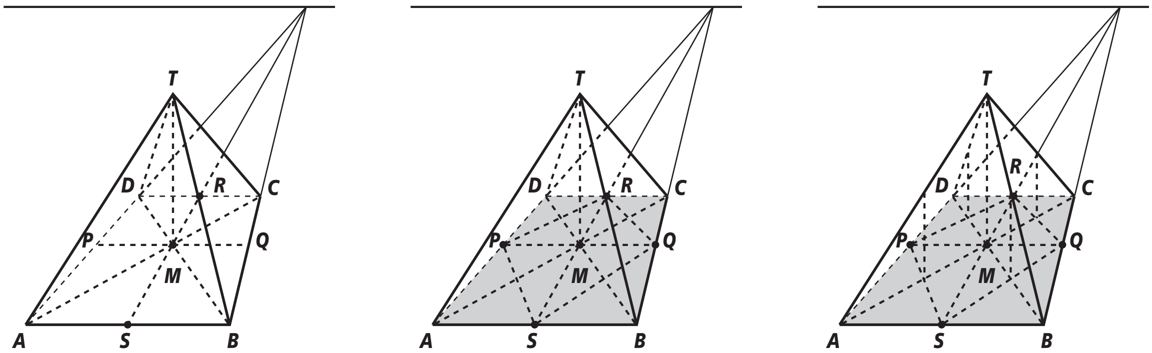
b $ABCD$ is een vierkant, dus alle zijden hebben dus dezelfde lengte moeten hebben. Als je in je boek zijde AB en zijde AD opmeet, zie je dat deze lengtes niet hetzelfde zijn. De lijnen die “de tekening inlopen” zijn verkort. De enige lijnen die niet het vlak inlopen en dus op werkelijke grootte zijn getekend zijn de lijnen AB, CD en TM.

V-5a Bij een perspectieftekening worden lijnen van gelijke grootte kleiner afgebeeld naarmate ze verder weg liggen. TM ligt verder weg dan AB en dus wordt TM kleiner getekend.

b Lijn PQ (zie tekening hieronder) is parallel getekend aan AB en heeft in werkelijkheid dezelfde lengte. Immers: $ABCD$ is een vierkant, dus de zijden AD en CB zijn overal even ver van elkaar verwijderd. PQ ligt op dezelfde afstand als de te tekenen lijn TM en omdat PQ in werkelijkheid dezelfde lengte heeft als AB kunnen we TM dus dezelfde lengte geven als PQ.
De lengte van PQ kan je opmeten. Teken vervolgens TM en de opstaande ribben. Je krijgt dan onderstaande tekening.



c De middens kan je op onderstaande wijze vinden. (Bij elk van onderstaande stappen hoort een figuur.)
Stap 1:om de middens van de opstaande ribben te vinden, is het nodig eerst de middens van AB, BC, CD en AD te bepalen. De middens van BC en AD kan je vinden door een lijn te tekenen die parallel is aan AB en door M gaat. In feite dus door lijn PQ van vraag V-5b. Om de middens van AB en CD te vinden: trek een lijn van het verdwijnpunt door M. De punten waar deze lijn AB en CD raakt zijn de middens van deze zijden. Zie de linker tekening. In feite is $ABCD$ nu in vier delen verdeeld: $ASMP$, $BSMQ$, $CRMQ$ en $DPMR$.
Stap 2:Teken de lijnen PS, SQ, QR en RP. Deze lijnstukken vormen samen met de al getekende lijnen AM, BM, CM en DM de diagonalen van de vier stukken van het ondervlak.
Stap 3:vanuit de snijpunten van de diagonalen kan je een verticale lijn omhoog trekken. De snijpunten van deze verticale lijnen en de opstaande ribben is de middens van de opstaande ribben. Zie rechter tekening.



9.1 Tekeningen maken in parallelprojectie

bladzijde 256

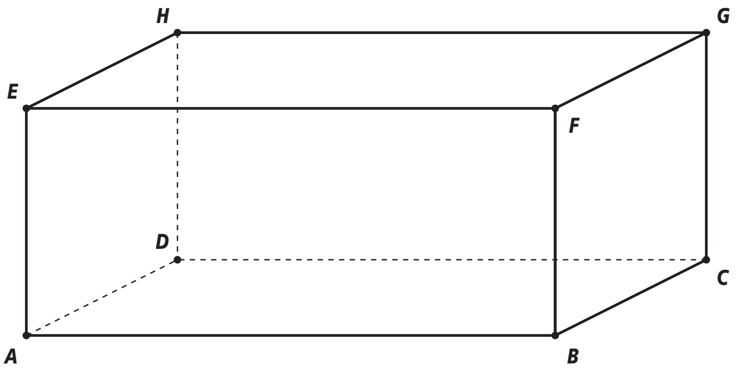
1a De ribben die in het vlak van de tekening liggen en alle vlakken die evenwijdig zijn aan het tekenvlak zijn in hun ware vorm getekend. Dit zijn de ribben AB, EF, CD en GH alsmede de ribben AE, BF, CG en DH.

b De ribben die 'de tekening ingaan' zijn korter getekend dan ze werkelijk zijn. Dit zijn de ribben AD, BC, EH en FG. Ze zijn getekend met een lengte van 1 cm, dus op $\frac{1}{2} \cdot 100\% = 50\%$ van de werkelijke grootte en dus 50% korter.

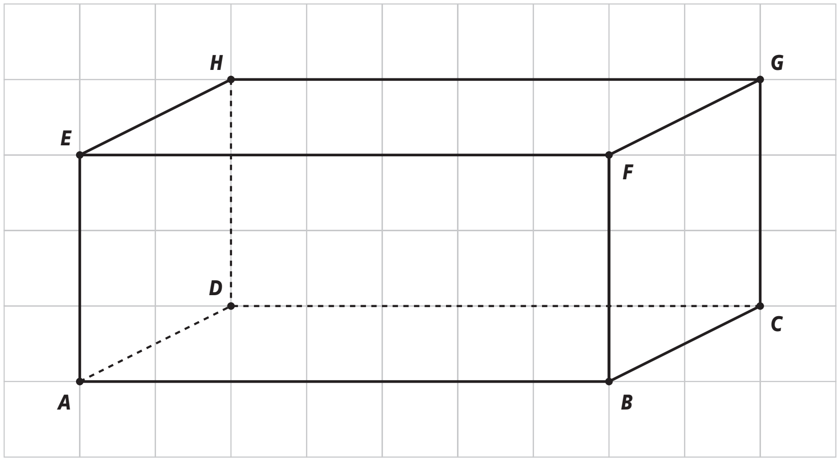
c De medeleerling heeft drie gegevens nodig: (i) de balk is in parallelprojectie getekend; (ii) hoeveel procent korter de ribben zijn getekend die 'de tekening ingaan' en (iii) onder welke hoek deze ribben getekend zijn (wat de hoek is tussen bijvoorbeeld AB en AD).

bladzijde 257

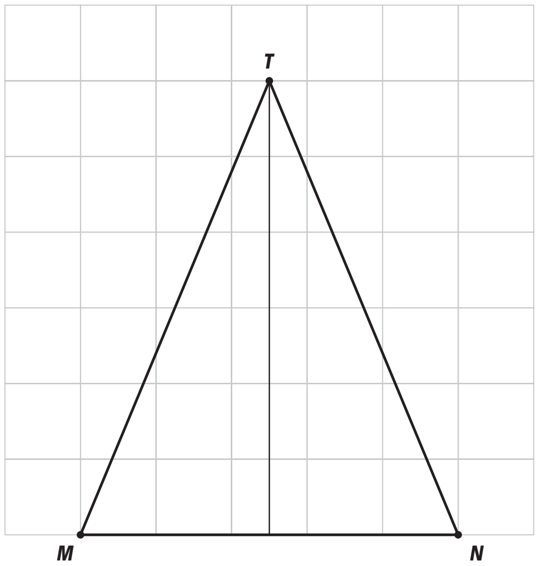
2a Op een blanco papier krijg je onderstaande afbeelding:

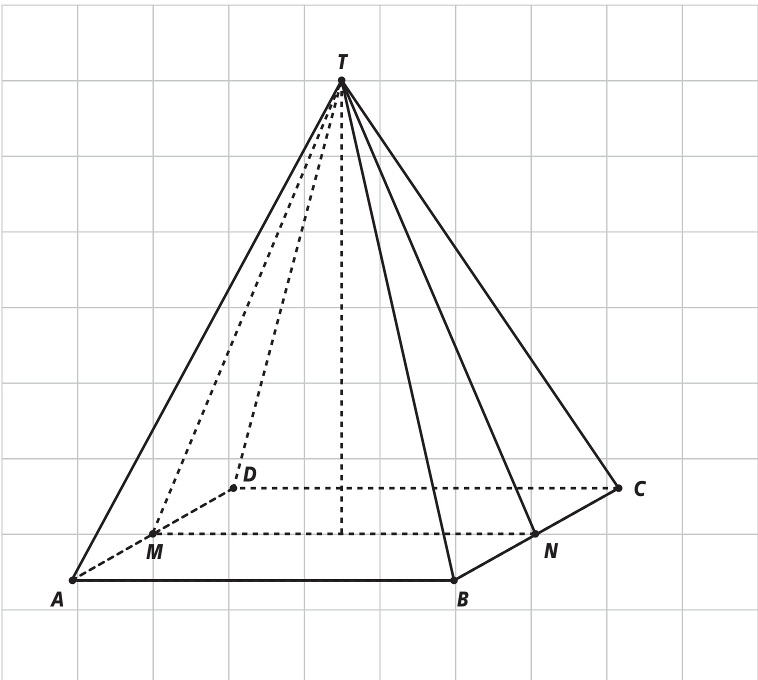


Op roosterpapier krijg je de volgende afbeelding:

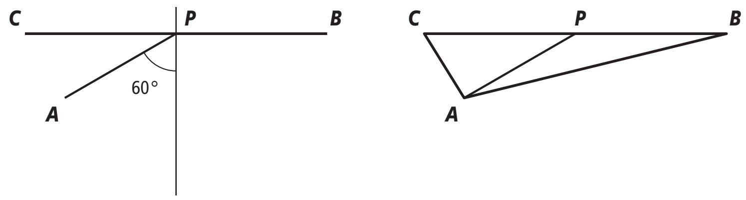


3 De linkerafbeelding is het antwoord op 3a, de rechterafbeelding het antwoord op 3b en 3c samen.





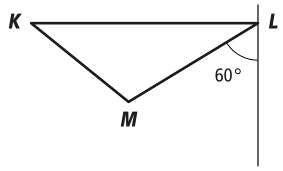
4a Driehoek ABC is een gelijkzijdige driehoek met zijden van 4 cm. AP staat loodrecht op BC en gaat van het midden van zijde BC naar punt A. De lengte van AP (notatie: $|AP|$) kunnen we dus vinden met Pythagoras:
$|AP| = \sqrt{|AC|^2 - |CP|^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 3{,}5$ cm .
Het grondvlak kan nu op de volgende manier worden getekend: (i) teken CB; (ii) teken AP onder een hoek van 60° en de helft van de lengte (zie linker tekening) en (iii) teken ten slotte vanuit A een lijn naar B en een lijn naar C (zie rechter tekening).

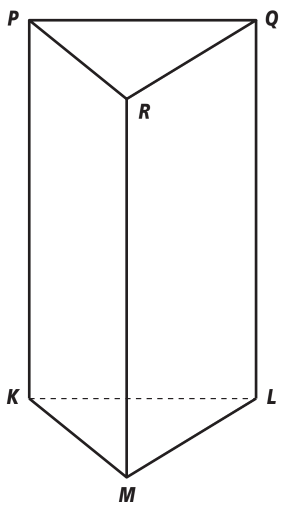


b De hoek tussen AP en AD is 60°.

c Bij opmeten van AP vind je een lengte van 1,3 cm. In werkelijkheid is AP 3,5 cm (zie uitleg bij vraag 4a). AP heeft dus $\frac{1{,}3}{3{,}5} \cdot 100\% \approx 37\%$ van de werkelijke lengte en is dus verkort met 63%.

d $KLQP$ moet op ware grootte worden getekend, dus $KLQP$ moet in het vlak van de tekening liggen. Teken daartoe eerst KL. Teken vervolgens onder een hoek van 60° lijn LM (want KL staat loodrecht op LM) en verbind tenslotte K en M. Je krijgt dan de linkertekening. Trek vervolgens vanuit de hoekpunten verticale lijnen met een lengte van 5 cm omhoog en teken de bovenkant van het prisma. Zie rechtertekening.





5a Bij regelmatige piramides is het grondvlak een vierkant. Dus de ribben AD en BC lopen in werkelijkheid evenwijdig en zijn even lang. In de rechtertekening zijn de ribben ook daadwerkelijk evenwijdig en even lang getekend, in de linkertekening niet. Dus de linkertekening is geen parallelltekening.

b De ribben AB en CD liggen evenwijdig aan het tekenvlak. Dus als we lijn PQ evenwijdig aan AB en CD tekenen, dan ligt PQ ook evenwijdig aan het tekenvlak. Gebruik je geodriehoek om een lijn evenwijdig aan AB de tekenen, bijvoorbeeld een lijn die door S gaat.

9.2 Vlakken en lijnen in de ruimte

bladzijde 258

6a De lijnen KL en MN zijn evenwijdig aan elkaar.
b (i) de lijnen KL en PQ; (ii) de lijnen KL en RS en (iii) de lijnen KL en SN.

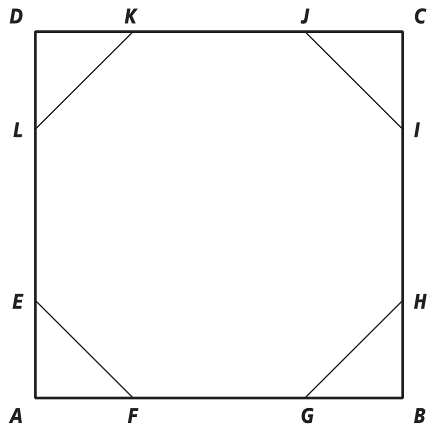
7a De punten N, P en R.
b Ja, M, N en P liggen in hetzelfde vlak van K, L en M, dus het omgekeerde is ook waar: K, L en M liggen in hetzelfde vlak als M, N en P.
c Er zijn zes punten die in hetzelfde vlak liggen: K, L, M, N, P en R. Elke combinatie van deze drie punten duidt hetzelfde vlak aan, zolang de drie punten niet op één lijn liggen. Dus alle mogelijke aanduidingen zijn: KLM, KLN, KLP, KLR, KMN, KMR, KNP, KNR, KPR, LMN, LMP, LMR, LNP, LPR, MNP, MNR, MPR en NPR.

8a Lijn BC ligt in de volgende drie vlakken: (i) het vlak gedefinieerd door de punten A, B en C; (ii) het vlak gedefinieerd door de punten B, C en F en (iii) het vlak gedefinieerd door de punten B, C en E.
b AB en GH lopen evenwijdig, er bestaat dus een vlak waar beide lijnen in liggen.
c AH en GH snijden elkaar, er bestaat dus een vlak waar beiden in liggen.
d AB en CH lopen niet evenwijdig en snijden elkaar niet. Er kan daarom geen vlak zijn waar beide lijnen in liggen. Neem bijvoorbeeld het vlak vastgelegd door de punten A, B en C, dan ligt H niet in dit vlak. Als we het vlak nemen vastgelegd door A, B en H, dan ligt C niet in het vlak, et cetera.

bladzijde 259

9a AE en BC kruisen elkaar. Uitleg: AE en BC liggen niet in één vlak en daarom snijden ze elkaar niet en lopen ze niet evenwijdig aan elkaar. Ze kruisen elkaar dus.
b BP en AH kruisen elkaar. Uitleg: BP en AH liggen niet in één vlak en daarom snijden ze elkaar niet en lopen ze niet evenwijdig aan elkaar. Ze kruisen elkaar dus.
c AG en CE snijden elkaar. Uitleg: AG en CD liggen in hetzelfde vlak. Dus *of* ze snijden elkaar *of* ze zijn evenwijdig. Uit de tekening is te zien dat ze elkaar snijden, en wel in het midden van de kubus.
d AP en EG snijden elkaar. Uitleg: AP en EG liggen in hetzelfde vlak. Dus *of* ze snijden elkaar *of* ze zijn evenwijdig. Uit de tekening is de zien dat ze elkaar buiten de kubus zullen snijden.

10a Het bovenaanzicht van de glasbak ziet er als volgt uit (voor de overzichtelijkheid zijn de ingooi-rondjes weggelaten):



b Ja, AC en EJ lopen evenwijdig aan elkaar. Er is dus een vlak dat door deze lijnen en dus ook door deze punten gaat.

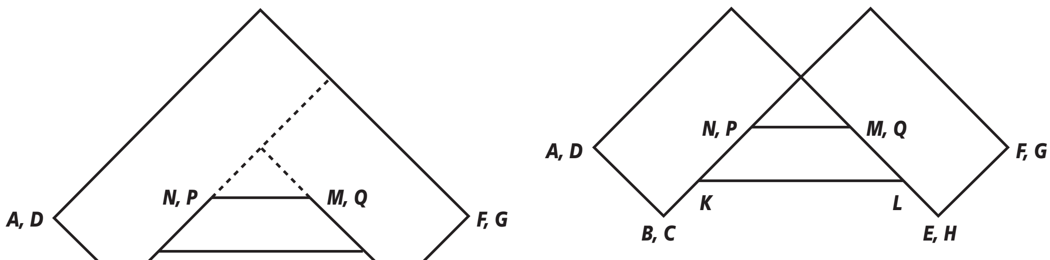
c Nee, EJ en BI lopen niet evenwijdig en snijden elkaar ook niet. Er is dus geen vlak dat door deze lijnen gaat.

d Als punt L in het vlak BCF zou liggen, dan moeten de lijnen FL en BC elkaar snijden of evenwijdig aan elkaar lopen. FL en BC snijden elkaar niet. Ze lopen ook niet evenwijdig aan elkaar. Immers: de lijnen BC en FK lopen evenwijdig aan elkaar en de lijn FL maakt een hoek met lijn FK. Als FL een hoek maakt met een lijn evenwijdig aan BC, dan kan FL nooit zélf evenwijdig aan BC lopen.
Punt L ligt dus niet in het vlak BCF.

e Ja, BL en CE snijden elkaar in de buurt van het midden van de glasbak. Er is dus een vlak mogelijk door beiden lijnen.

f De lijnen BC en GJ zelf.

11a Twee mogelijke bovenaanzichten zijn:



b De lijnen CD, EL, HQ, IF en GJ. (Hierbij is I het punt dat recht onder J ligt, net zoals A recht onder D ligt.)

c De lijnen AB en EF liggen beiden in hetzelfde vlak (het grondvlak) dus *of* ze zijn evenwijdig aan elkaar *of* ze snijden elkaar. Bij 11a hebben we gezien dat ze niet evenwijdig aan elkaar zijn, dus snijden ze elkaar.

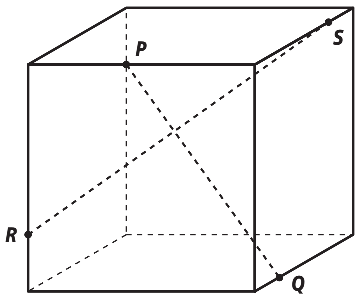
d Als punt N in het vlak EHK zou liggen, dan zouden de lijnen KN en EH *of* evenwijdig aan elkaar zijn *of* elkaar snijden. Geen van beiden is het geval, dus punt N ligt niet in het vlak EHK.

e De lijnen KN en EH kruisen elkaar, zie ook de uitleg bij 11d.

f KN en LM liggen in hetzelfde vlak (het gele vlak) en dus *of* ze snijden elkaar *of* ze lopen evenwijdig aan elkaar. De lijnen lopen duidelijk niet evenwijdig aan elkaar, dus ze snijden elkaar.

12a De lijnstukken kruisen elkaar. Uitleg: als ze evenwijdig aan elkaar zouden lopen, dan had je bij alle aanzichten van de kubus de lijnen evenwijdig aan elkaar zien lopen *of* je had maar één lijn gezien (waar de andere lijn achter verscholen lag). Op de linker- en middelste afbeelding is lijken de lijnen elkaar te snijden. Bij evenwijdige lijnen is zo'n aanzicht niet mogelijk, dus de lijnen lopen niet evenwijdig. Als de lijnen elkaar snijden, dan zou je op elk aanzicht snijdende lijnen zien. Bij de laatste afbeelding is dit duidelijk niet het geval.
Dus de lijnen lopen niet evenwijdig en snijden elkaar niet, dus ze moeten elkaar kruisen.

b De kubus komt er als volgt uit te zien:



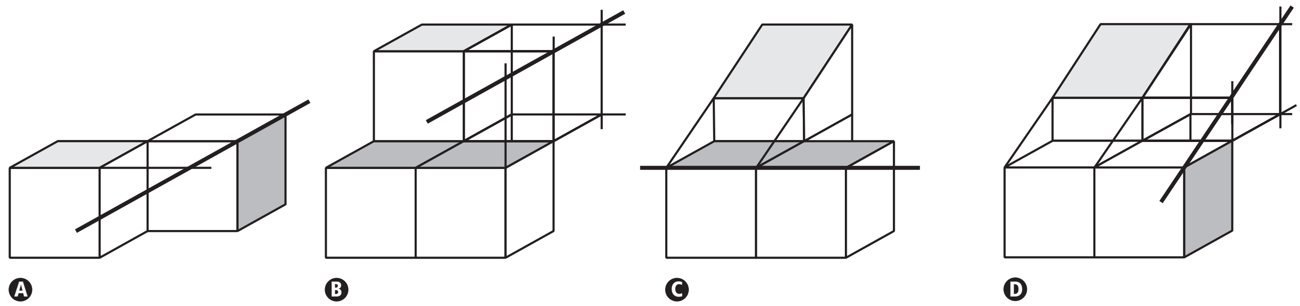
9.3 Twee, drie en meer vlakken

bladzijde 260

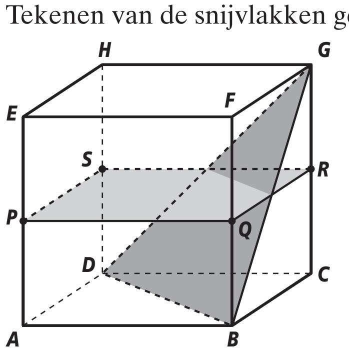
13a De lijn AF.

b Nee, de vlakken $IJCF$ en $KLEG$ lopen parallel aan elkaar en hebben dus geen snijlijn.

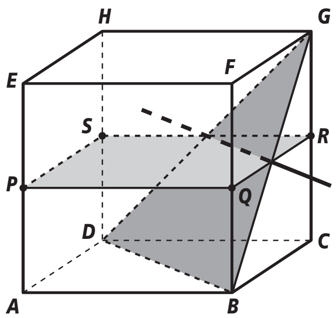
14



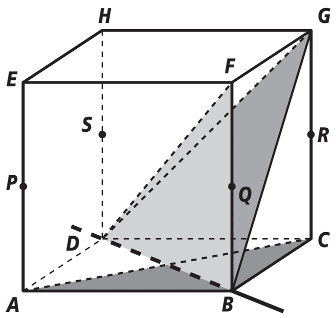
15a Tekenen van de snijvlakken geeft de volgende figuur:



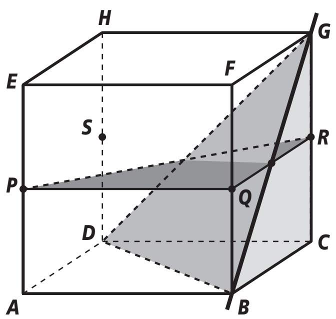
b Alle punten op de snijlijn van de twee vlakken liggen in beide vlakken, zie onderstaand figuur. De snijlijn is de dikke lijn.



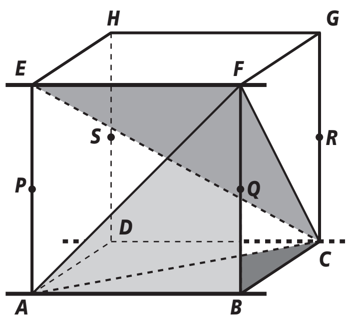
c Ja, zie onderstaand figuur. De drie vlakken snijden elkaar in één snijlijn (de dikke lijn). Alle punten op deze snijlijn liggen in alle drie de vlakken.



d Ja, zie onderstaand figuur. De vlakken BDF en BDG snijden elkaar in één lijn (de dikke lijn). Deze lijn snijdt vlak PQR is één punt. Dit punt ligt in alle drie de vlakken.

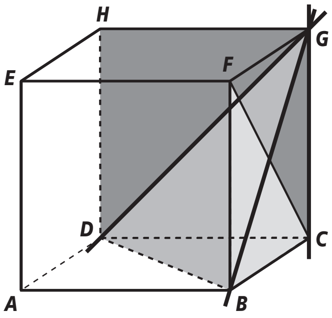


e Geen, zie onderstaand figuur. De drie vlakken snijden elkaar niet in één lijn. Elk combinatie van twee vlakken heeft wel een snijlijn, maar deze snijlijnen lopen parallel aan elkaar. De drie vlakken snijden elkaar daarom niet in één punt.



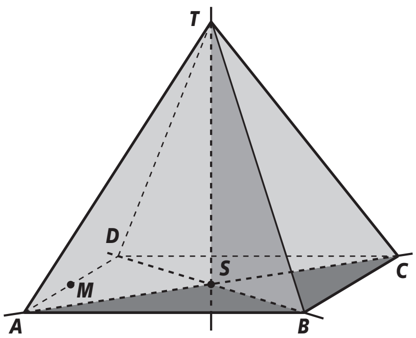
bladzijde 261

16a Bijvoorbeeld de drie vlakken $ABCD$, $BDHF$ en BDG.
b Bijvoorbeeld de drie vlakken $ABFE$, $ADHE$ en $BDHF$.
c De vlakken ABC, DBG en $CDHG$ snijden elkaar in één punt (zijnde punt D). Dit komt overeen met geval 5.
d De vlakken BCF, DBG en $CDHG$ snijden elkaar zoals in geval 5, zie onderstaand figuur. De dikke lijnen geven de onderlinge snijlijnen weer, zoals te zien snijden de snijlijnen elkaar in één punt.

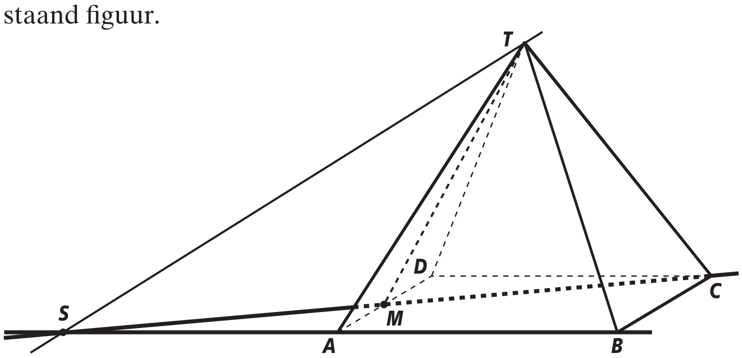


17a Nee, twee vlakken hebben maar één snijlijn.
b Twee vlakken die geen enkele rechte lijn gemeenschappelijk hebben lopen evenwijdig aan elkaar.

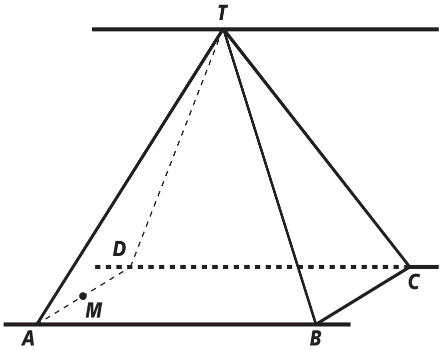
18 De dikke lijnen zijn steeds de snijlijnen van twee vlakken, het punt S is het snijpunt van drie vlakken.
a De lijnen snijden elkaar in één punt, zie onderstaand figuur.



b De vlakken snijden elkaar in een punt (het punt ligt buiten de piramide), zie onderstaand figuur.



c D drie snijlijnen zijn evenwijdig aan elkaar, de situatie is vergelijkbaar met geval 2. Er is geen gemeenschappelijk snijpunt.

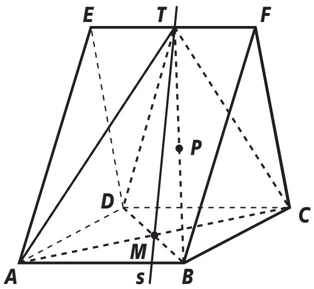


9.4 Lijn en vlak

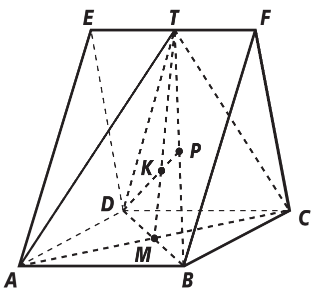
bladzijde 262

19a De lijnen DP en BT snijden elkaar en zoals uitgelegd in paragraaf 9.2 duiden de lijnen dus samen een vlak aan, namelijk vlak $DBPT$. Lijn DP ligt dus zeker in vlak $DBPT$. Maar vlak $DBPT$ is hetzelfde vlak als vlak DBT, dus DP ligt in DBT.

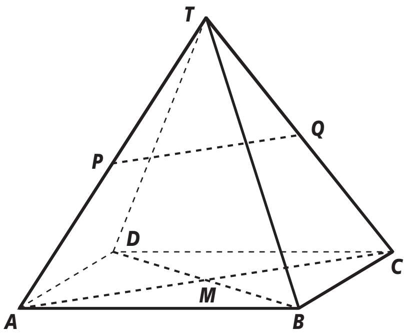
b Om de snijlijn van de vlakken ACT en BDT te vinden teken je eerst de vlakken zelf. Je ziet dan waar de vlakken en je kunt een snijlijn tekenen. Je krijgt dan onderstaand figuur:

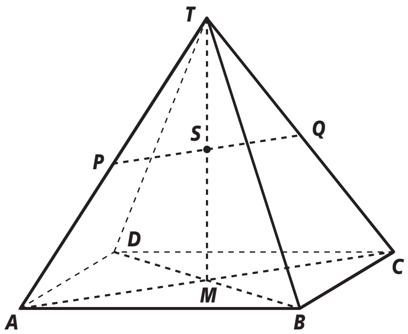


c Snijlijn s en lijn DP liggen beide in vlak BDT. Voor twee lijnen in een vlak geldt dat *of* ze snijden elkaar *of* ze zijn evenwijdig aan elkaar. DP en s zijn duidelijk niet evenwijdig aan elkaar, dus ze snijden elkaar. Maar s was de snijlijn tussen BDT en ACT. Als DP lijn s snijdt, snijdt het dus ook vlak ACT. Het snijpunt tussen ACT en DP wordt dus gegeven door het snijpunt van de lijnen s en DP. Zie onderstaande tekening, het snijpunt is aangeduid met K.



20a Lijn PQ ligt in vlak ACT, dit vlak kan je als hulpvlak gebruiken. Zie linker tekening. De vlakken ACT en BDT snijden elkaar in lijn MT, dit is je hulplijn. Het snijpunt van MT en PQ is het snijpunt van PQ met vlak BDT. Het snijpunt is aangeduid met S, zie rechtertekening.

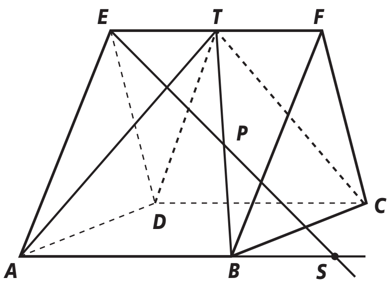




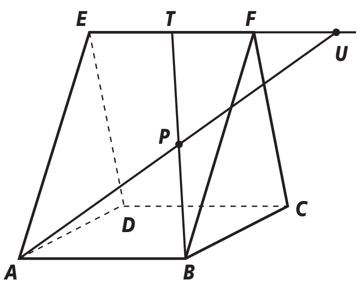
b Lijn PQ en vlak $ABCD$ hebben geen snijpunt omdat ze evenwijdig aan elkaar lopen.

bladzijde 263

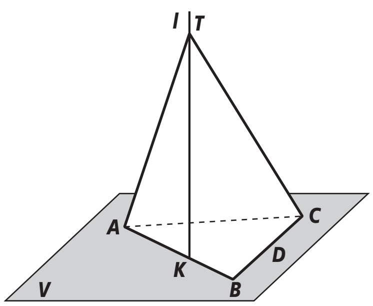
21a Lijn EP ligt in vlak $ABFE$, dit vlak kan je gebruiken als hulpvlak. De vlakken $ABCD$ en $ABFE$ snijden elkaar in snijlijn AB. Als we lijn AB en lijn EP doortrekken snijden ze elkaar in punt x. Dit is het snijpunt S van lijn EP en vlak $ABCD$, zie onderstaande tekening.



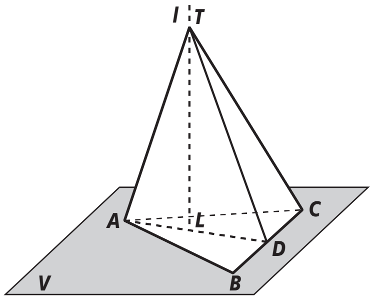
b Lijn AP ligt in vlak $ABFE$, dit vlak kan je gebruiken als hulpvlak. De vlakken $CDEF$ en $ABFE$ snijden elkaar in snijlijn EF. Als we lijn EF en lijn AP doortrekken snijden ze elkaar in punt x. Dit is het snijpunt U van lijn AP met vlak $CDEF$, zie onderstaande tekening.



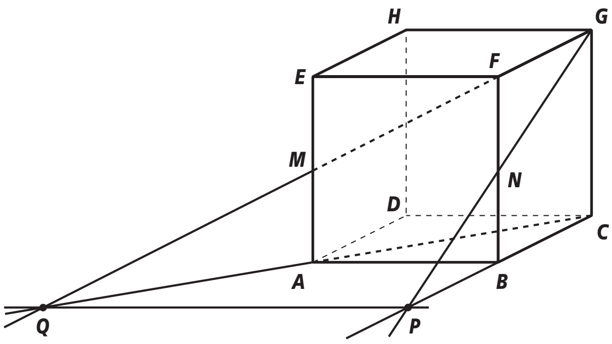
22a Vlak TAB snijdt V in snijlijn AB. Als lijn l in TAB ligt, dan snijdt lijn l vlak V dus ook in snijlijn AB. Zie onderstaande tekening, met K het snijpunt van l en V.



b Vlak TAD snijdt V in snijlijn AD. Als lijn l in TAD ligt, dan snijdt lijn l vlak V dus ook in snijlijn AD. Zie onderstaande tekening, met L het snijpunt van l en V.



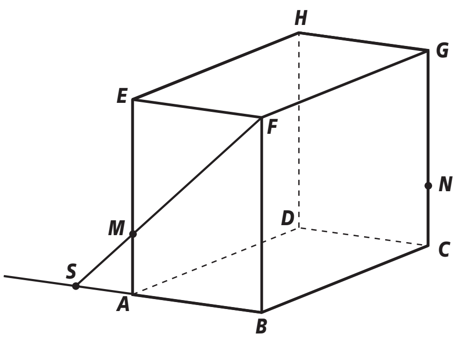
23abc Lijn GN ligt in vlak $BCGF$, dit is het hulpvlak. $BCGF$ snijdt $ABCD$ in lijn BC. Het snijpunt van de lijnen GN en BC is daarom ook het snijpunt van GN en $ABCD$: punt P.
Analoog: lijn GM ligt in vlak ACGM, dit is het hulpvlak. $ACGM$ snijdt $ABCD$ in lijn AC. Het snijpunt van de lijnen GM en AC is daarom ook het snijpunt van GM en $ABCD$: punt Q.
Bovenstaande samengenomen geeft de volgende tekening (verkleind afgebeeld; merk op dat voor de duidelijkheid de 'het vlak inlopende lijnen' onder een andere hoek staan dan normaal).



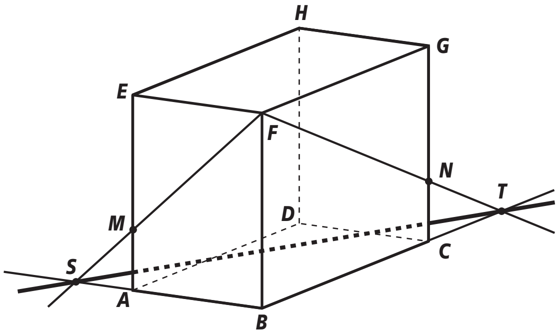
d Punt P ligt op de lijn GN. De lijn GN ligt in vlak GMN, dus punt P ligt in vlak GMN.
Analoog: punt Q ligt op de lijn GM. De lijn GM ligt in vlak GMN, dus punt Q ligt in vlak GMN.

e P en Q zijn de snijpunten van de lijnen GN respectievelijk GM en vlak $ABCD$. P en Q liggen dus in vlak $ABCD$ en daarmee de lijn PQ ook. Bij opgave 23d hebben we net uitgelegd dat P en Q ook in vlak GMN liggen, en daarmee de lijn PQ ook.
Lijn PQ ligt in vlak $ABCD$ en in vlak GMN, dus PQ is de snijlijn van deze twee vlakken.

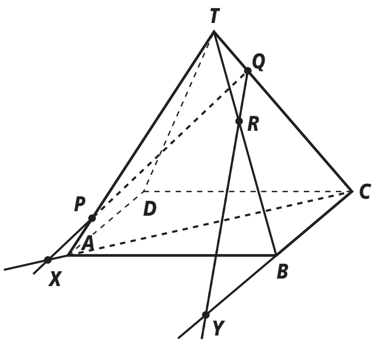
24a Lijn FM ligt in het vlak $ABFE$, dit is het hulpvlak. $ABFE$ snijdt het grondvlak $ABCD$ in snijlijn AB. Het snijpunt van de lijnen AB en FM is dus het snijpunt tussen het grondvlak $ABCD$ en lijn FM. Zie onderstaande tekening, het snijpunt is aangeduid met S.



b Je kunt de snijlijn tussen het grondvlak en vlak MFN tekenen als je twee punten van de snijlijn hebt. Je hebt al één punt: snijpunt x van opgave 24-a. Immers: S ligt op lijn FM en lijn MF ligt in vlak MFN, dus punt S ligt in vlak MFN. Maar punt S lag ook in het grondvlak.
Om een tweede punt te krijgen kan je het snijpunt T van FN met het grondvlak bepalen (op dezelfde wijze als punt S is bepaald). Immers: T ligt op de lijn FN en de lijn FN ligt in vlak MFN, dus punt T ligt in vlak MFN. Maar punt T lag ook in het grondvlak.
De lijn ST is de snijlijn van het grondvlak en vlak MFN.

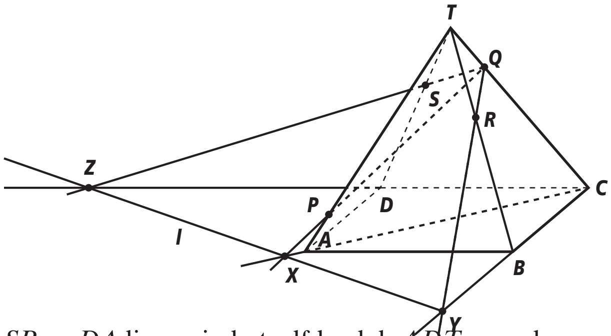


25ab Alle punten op de lijn AC liggen in het grondvlak. Het snijpunt van PQ met AC is dus het snijpunt van PQ met het grondvlak.
Analoog: alle punten op de lijn BC liggen in het grondvlak. Het snijpunt van QR met BC is dus het snijpunt van QR met het grondvlak.
Opgave 25a en 25b samen geven onderstaande tekening.



cd Alle punten op l liggen in vlak PQR, alle punten op het verlengde van DC liggen in het vlak CDT. Het snijpunt tussen l en het verlengde van DC ligt dus zowel in PQR als in CDT.
We hebben nu twee punten die zowel in PQR als in CDT liggen: (i) het snijpunt tussen l en DC en (ii) punt Q. De verbindingslijn tussen beide punten is de snijlijn tussen PQR en vlak CDT.
Alle punten op deze snijlijn liggen in beide vlakken. Het snijpunt tussen deze snijlijn en lijn DT is dus het gezochte punt S.

Opgave 25c en 25d samennemend geven onderstaande tekening.



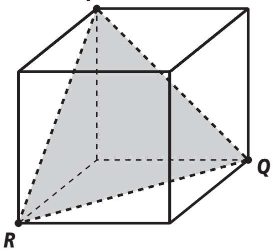
e SP en DA liggen in hetzelfde vlak ADT maar lopen niet evenwijdig, dus ze snijden ergens.
SP ligt in vlak PQR, DA ligt in $ABCD$. Lijn l was de snijlijn tussen deze vlakken, dus SP en DA snijden in lijn l.

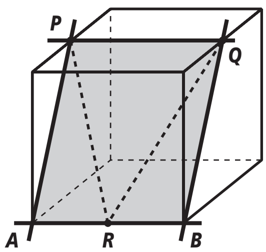
9.5 Doorsneden tekenen

bladzijde 264

26 Bij figuur 1 vind je de doorsnede gewoon door de lijnen PQ, QR en RP te trekken. Geef het vlak PQR eventueel een leuk kleurtje. Zie linkertekening.
Om in figuur 2 de doorsnede van de kubus met vlak PQR te vinden moet je de snijlijnen van vlak PQR met de grensvlakken van de kubus vinden. Om deze snijlijnen te vinden kan je het volgende doen:

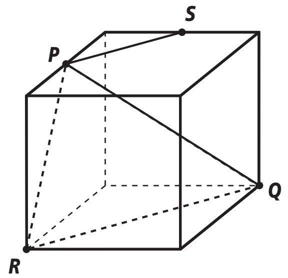
1. Teken eerst de lijnen PQ, QR en RP. De lijn PQ is de eerste snijlijn tussen een grensvlak van de kubus en vlak PQ.
2. Merk op dat de ribbe waarop R ligt, ribbe AB, zelf in vlak PQR ligt. (Zie rechtertekening voor de punten A en B.) Ribbe AB is een tweede snijlijn tussen een grensvlak van de kubus en vlak PQR.
3. Trek nu de lijnen AP en BQ. Dit zijn de twee laatste snijlijnen tussen de grensvlakken van de kubus en PQR.
   Je hebt nu alle snijlijnen gevonden en krijgt onderstaand figuur rechts. De doorsnede kan je eventueel een leuk kleurtje geven.



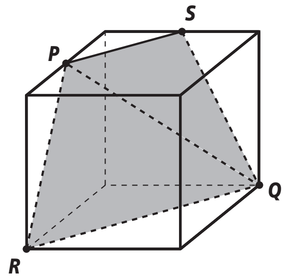


27a De snijlijnen van PQR met het bovenvlak en het achtervlak van de kubus zijn niet getekend.

b De snijlijn is te zien in onderstaande tekening. Het snijpunt van deze snijlijn met de achter-boven-ribbe van de kubus hebben we punt S genoemd.



c De snijlijn van opgave 27-a was de snijlijn van *PQR* met het bovenvlak van de kubus. We hoeven nu nog alleen het snijvlak van *PQR* met het achtervlak van de kubus te tekenen, lijn *SQ*. Dan is de doorsnede compleet, zie onderstaande tekening. Het verkregen vlak kan je eventueel een leuk kleurtje geven.



28a Als eerst zijn de hoekpunten *T* en *S* getekend, vervolgens het hoekpunt op de lijn *DH* en hoekpunt *R*.

b Bij stap 3 tekent Bart de snijlijn tussen vlak *RST* en het linker grensvlak *ADEH*. Om dit te kunnen doen heeft Bart twee punten nodig die zowel in *RST* als in *ADEH* liggen, de verbindingslijn tussen beide punten is de snijlijn van beide vlakken.
Bart heeft al één punt: punt *R*. Om het tweede punt te vinden, bedenk het volgende. Alle punten op de lijn *ST* liggen in vlak *RST*, alle punten op de lijn *AD* liggen in vlak *ADEH*. Het snijpunt tussen de lijnen *ST* en *AD* ligt dus zowel in vlak *RST* als in vlak *ADEH* en is het gezochte tweede punt.
Als derde stap tekent Bart dus de lijn vanuit het snijpunt van *AD* en *ST* een verbindingslijn naar *R*.
Omdat het linkervlak en het rechtervlak van de kubus evenwijdig zijn, zal de snijlijn van *RST* en het rechtervlak evenwijdig zijn met de bij stap 3 gevonden lijn. Bij stap 4 tekent Bart dus vanuit *T* een lijn die evenwijdig is aan de bij stap 3 gevonden lijn. Dit is de snijlijn tussen *RST* en het rechtervlak.

c Stap 5: omdat het ondervlak en bovenvlak van de kubus evenwijdig zijn, zal de snijlijn in het bovenvlak evenwijdig zijn aan *ST*. Bij stap 5 tekent Bart deze snijlijn vanuit punt *R* naar de ribbe *EF*.
Stap 6: nu is zowel het snijpunt van *RST* met *EF* als het snijpunt van *RST* met *BF* bekend. Hiermee kan de snijlijn van *RST* met het voorvlak worden getekend.

bladzijde 265

29ab Hieronder staat een tekening van het snijvlak en een toelichting bij de stappen.
Stap 1: de lijn *GP* geeft de snijlijn van vlak *GPQ* met het rechtervlak van de balk.
De lijn wordt ver doorgetrokken voor stap 2.

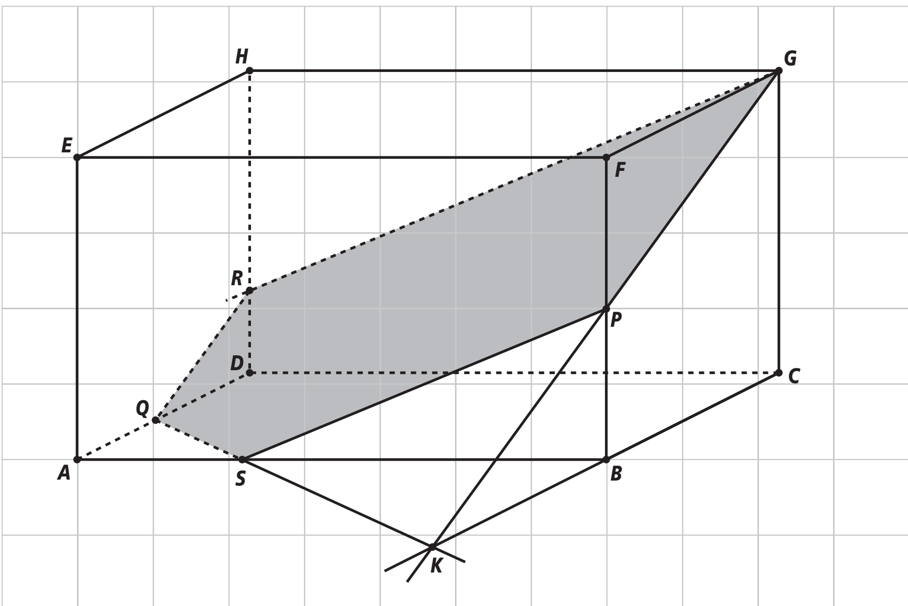
Stap 2: om de snijlijn tussen de vlak GPQ en de onderzijde van de balk te bepalen hebben we twee punten nodig die zowel in GPQ als in $ABCD$ liggen. We hebben al één punt: punt Q. Om het tweede punt te vinden, bedenk het volgende: alle punten op de lijn GP liggen in vlak GPQ, alle punten op de lijn BC liggen in vlak $ABCD$. Het gezochte tweede punt is dus het snijpunt van GP en BC. Om dit snijpunt te vinden trekken we lijn BC door, we krijgen het punt K.

Stap 3: We hebben nu twee in punten die in GPQ en $ABCD$ liggen. De verbindingslijn tussen beide punten de lijn QK is de snijlijn van GPQ met het ondervlak van de balk. We tekenen deze lijn.

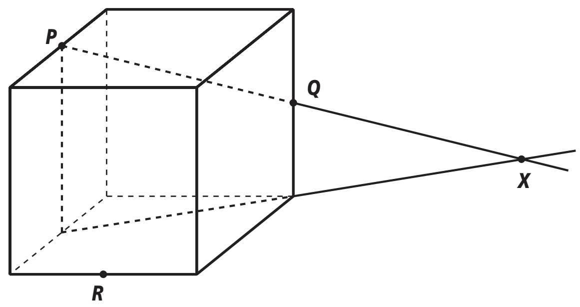
Stap 4: De bij stap 3 getekende lijn ligt in vlak GPQ en snijdt vlak $ABFE$ in de ribbe AB. Dit geeft een eerste snijpunt S tussen vlak GPQ en vlak $ABFE$. We hebben ook een tweede snijpunt tussen deze vlakken: punt P. De verbindingslijn tussen de twee snijpunten, PS, geeft de snijlijn tussen beide vlakken: de snijlijn tussen GPQ en het voorvlak van de balk. We tekenen deze lijn.

Stap 5: Het voorvlak en het achtervlak zijn evenwijdig, de snijlijn in het achtervlak zal dus evenwijdig liggen aan de snijlijn in het voorvlak. Vanuit punt G kunnen we daarom een lijn trekken die evenwijdig loopt met de lijn PS, dit is de snijlijn tussen GPQ en het achtervlak.

Stap 6: We hebben nu twee snijpunten tussen GPQ en het linkervlak: punt Q en het snijpunt R van de bij stap 5 getekende lijn en de ribbe DH. De verbindingslijn tussen beiden RQ is de snijlijn tussen GPQ en het linkervlak. Hiermee is de doorsnede getekend. Het verkregen vlak kan je eventueel een leuk kleurtje geven.

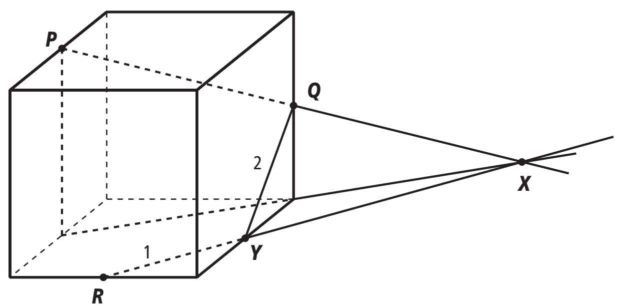


30a Je krijgt onderstaande schets:



b Om de snijlijn tussen vlak PQR en het grondvlak te kunnen trekken heb je twee punten nodig die in beide vlakken liggen. De verbindingslijn tussen deze twee punten is dan de snijlijn. Je hebt al één punt: punt R. Het tweede punt is het bij 30-a geconstrueerde punt X. Immers: alle punten op de lijn PQ liggen in vlak PQR. Punt X ligt op de lijn PQ en ligt dus in vlak PQR. Maar punt X ligt ook in het grondvlak. De verbindingslijn van R en X is dus de snijlijn tussen vlak PQR en het grondvlak. Zie tekening bij c.

c Om de snijlijn tussen vlak PQR en het rechtervlak te kunnen trekken heb je twee punten nodig die in beide vlakken liggen. De verbindingslijn tussen deze twee punten is dan de snijlijn. Je hebt al één punt: punt Q. Het tweede punt is punt Y. Immers: alle punten op de lijn RX liggen in vlak PQR. Punt Y ligt op de lijn RX en ligt dus in vlak PQR. Maar punt Y ligt ook het rechtervlak van de kubus.
De verbindingslijn QY is dus de snijlijn tussen vlak PQR en het rechtervlak van de kubus en behoort dus tot de gevraagde doorsnede.
De snijlijnen van b en c zijn hieronder getekend.



d De doorsnede kan bijvoorbeeld worden afgemaakt met de volgende stappen (er zijn meerdere oplossingen mogelijk):

Stap 1: Het linkervlak en het rechtervlak van de kubus zijn evenwijdig. De snijlijn in het linkervlak zal daarom evenwijdig zijn aan lijn QY. De snijlijn in het linkersnijvlak kan je dus tekenen door een lijn te trekken vanuit P die evenwijdig loopt met QY.

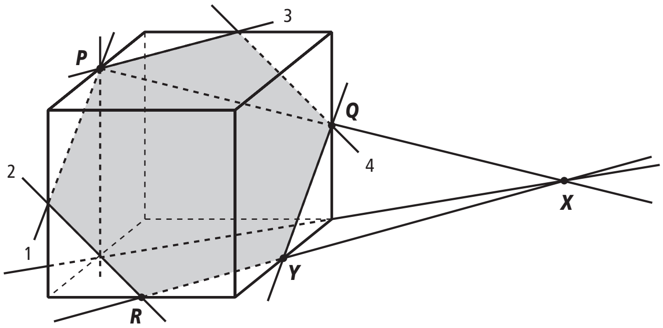
Stap 2: We hebben nu twee punten die zowel in vlak PQR als in het voorvlak liggen: (i) het snijpunt van de bij stap 1 getrokken lijn met de linker-voor-ribbe en (ii) punt R.

De verbindingslijn tussen beiden is het snijvlak van PQR met het voorvlak.

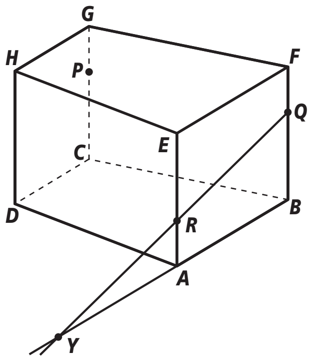
Stap 3: Het bovenvlak en het ondervlak van de kubus zijn evenwijdig. De snijlijn in het bovenvlak zal daarom evenwijdig zijn aan RY. De snijlijn in het bovenvlak kan je dus tekenen door een lijn te trekken vanuit P die evenwijdig loopt met RY.

Stap 4: We hebben nu twee punten die zowel in vlak PQR als in het achtervlak liggen: (i) het snijpunt van de bij stap 3 getrokken lijn met de achter-bovenribbe en (ii) punt Q.

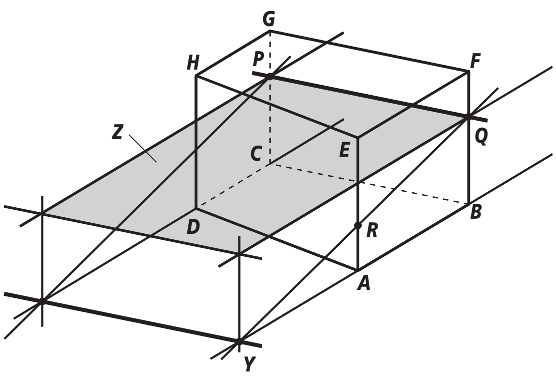
De verbindingslijn tussen beiden is het snijvlak van PQR met het achtervlak.
Hieronder staat een tekening van het verkregen vlak.



31a Alle punten op de lijn AB liggen in het grondvlak. Het snijpunt van QR en AB is dus het snijpunt tussen QR en het grondvlak, zie onderstaande tekening. Het snijpunt heeft de letter Y gekregen.

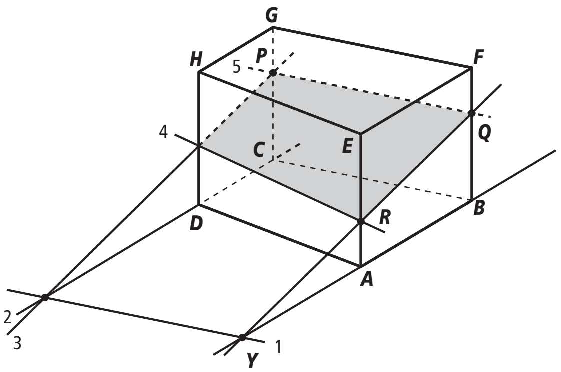


b In de opgave is gegeven dat PQ evenwijdig loopt aan CB. Stel dat door PQ een vlak Z zou gaan dat evenwijdig loopt met het grondvlak, zie onderstaande tekening (Z is hierin grijs gearceerd). Vlak PQR snijdt dan zowel vlak Z als het grondvlak en omdat vlak Z en het grondvlak parallel lopen, heb je in feite geval 2 van de uitleg op pagina 261. De dik afgebeelde snijlijnen van de twee evenwijdige vlakken (het grondvlak en vlak Z) lopen dan dus evenwijdig. Dit zijn de lijnen PQ en de snijlijn van PQR met het grondvlak en die lopen dan dus evenwijdig. Maar PQ is evenwijdig met BC, dus de snijlijn van PQR met het grondvlak is evenwijdig aan BC.



c De doorsnede kan bijvoorbeeld worden afgemaakt met de volgende stappen:
Stap 1: Teken de lijn van opgave 31-b.
Stap 2: Trek lijn CD door tot het de bij stap 1 getekende lijn raakt.
Stap 3: We hebben nu twee punten die zowel in vlak PQR als in het linkervlak liggen: (i) het snijpunt van het verlengde van CD met de lijn van stap 1 en (ii) punt P.
De verbindingslijn tussen beiden is het snijvlak van PQR met het linkervlak.
Stap 4: Nu hebben we ook twee punten die zowel in vlak PQR als in het voorvlak liggen: (i) het snijpunt van de bij stap 3 getrokken lijn met de links-voorribbe en (ii) punt R.
De verbindingslijn tussen beiden is het snijvlak van PQR met het voorvlak.
Stap 5: De verbindingslijn PQ geeft het snijvlak tussen PQR en het achtervlak.

Hieronder staat een tekening van het verkregen vlak.

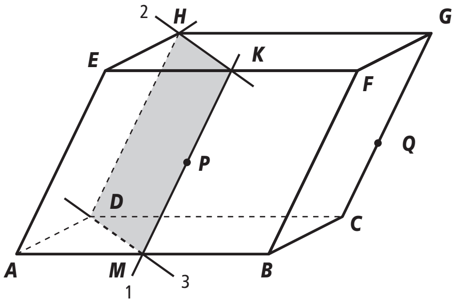


9.6 Verwerken en toepassen

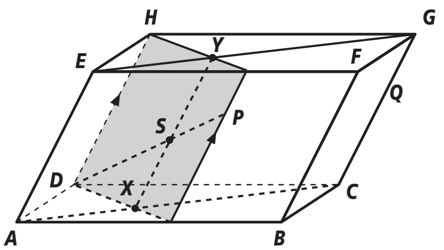
bladzijde 266

32a Alle zijvlakken van het prisma zijn parallellogrammen. Hieruit volgt dat alle overliggende zijden evenwijdig aan elkaar zijn. In het bijzonder is dus het voorvlak $ABFE$ evenwijdig aan het achtervlak $CDHG$ en is het ondervlak $ABCD$ evenwijdig aan het bovenvlak $EFGH$.
Stap 1: Omdat het voorvlak en het achtervlak evenwijdig zijn, zal de snijlijn in het voorvlak evenwijdig zijn aan de snijlijn in het achtervlak. De snijlijn van het voorvlak kunnen we dus tekenen door door punt P een lijn te trekken die evenwijdig loopt aan HD.
Stap 2: We hebben nu twee punten die zowel in vlak HPD als in het bovenvlak liggen: (i) het snijpunt van de bij stap 1 getrokken lijn met ribbe EF en (ii) punt H.
De verbindingslijn tussen beiden is het snijvlak van HPD met het bovenvlak.
Stap 3: We hebben ook twee punten die zowel in vlak HPD als in het ondervlak liggen: (i) het snijpunt van de bij stap 1 getrokken lijn met ribbe AB en (ii) punt D.
De verbindingslijn tussen beiden is het snijvlak van HPD met het ondervlak.

Hieronder staat een tekening van de verkregen doorsnede.

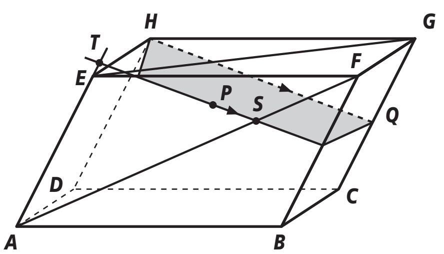


b Om het snijpunt tussen lijn DP en vlak $ACGE$ te bepalen gebruiken we een hulpvlak waar DP in ligt (zie de theorie op pagina 262). Lijn DP ligt in vlak HPD. Door de lijnen AC en EG te trekken kan je de snijlijn XY bepalen tussen de vlakken HPD en $ACGE$.
Alle punten op lijn XY liggen zowel in vlak HPD als in vlak $ACGE$. Het snijpunt tussen XY en lijn DP is dus het snijpunt tussen vlak $ACGE$ en lijn DP, zie onderstaande tekening. Het snijpunt is aangegeven met punt S.



c Stap 1: Teken de lijn HQ.
Stap 2: Omdat het voorvlak en het achtervlak evenwijdig zijn, zal de snijlijn in het voorvlak evenwijdig zijn aan de snijlijn in het achtervlak. De snijlijn van het voorvlak kunnen we dus tekenen door door punt P een lijn te trekken die evenwijdig loopt aan HQ. Het snijpunt van deze lijn met de doorgetrokken ribbe AE is punt T.
tap 3: We hebben nu twee punten die zowel in vlak HPQ als in het rechtervlak liggen: (i) het snijpunt van de bij stap 2 getrokken lijn met ribbe BF en (ii) punt Q. De verbindingslijn tussen beiden is het snijvlak van HPQ met het rechtervlak.
Stap 4: We hebben ook twee punten die zowel in vlak HPQ als in het linkervlak liggen: (i) het snijpunt van de bij stap 2 getrokken lijn met ribbe AE en (ii) punt H.
De verbindingslijn tussen beiden is het snijvlak van HPD met het linkervlak.

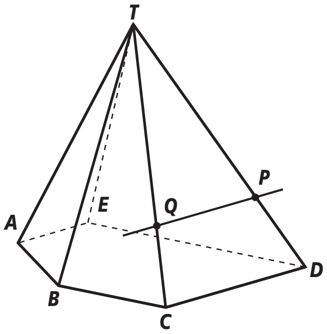
Hieronder staat een tekening van de verkregen doorsnede.



d Trek de lijn AF. Het snijpunt van lijn AF en lijn 2 is het gezochte snijpunt.

33a De drie vlakken snijden elkaar zodanig dat de snijlijnen van de vlakken evenwijdig lopen. (De situatie is vergelijkbaar met geval 4 van de theorie op pagina 261).

b Uit het antwoord bij opgave 33a volgt dat de snijlijn van V met vlak TCD evenwijdig moet lopen met lijn CD. Teken daarom vanuit P een lijn die evenwijdig loopt met CD. Je krijgt dan onderstaande tekening, waarbij het snijpunt tussen de lijn uit P en de ribbe CT punt Q is genoemd.



c Lijn AE.

d De ribben AE en BC.

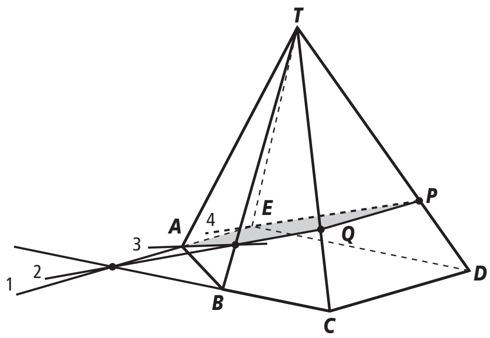
e Stap 1: Verleng de ribben AE en BC.

Stap 2: Alle punten op de lijn BC liggen in vlak BCT, alle punten op de lijn AE liggen in vlak V. We hebben dus nu twee punten die zowel in vlak BCT als in vlak V liggen: (i) het snijpunt van BC met AE en (ii) punt Q. De verbindingslijn tussen beiden is dus de snijlijn tussen BCT en V.

Stap 3: Als gevolg van stap 2 hebben we nu ook twee punten die zowel in vlak ABT als in vlak V liggen: (i) het snijpunt van de bij stap 2 getekende snijlijn met ribbe BT en (ii) punt A. De verbindingslijn tussen beiden is dus het snijlijn tussen ABT en V.

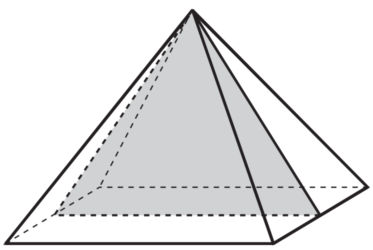
Stap 4: Trek de lijn EP.

Hieronder staat een tekening van de verkregen doorsnede.

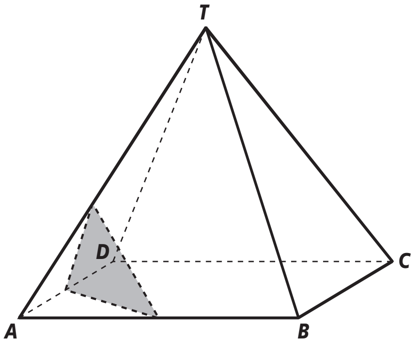


34a Als V een vierkant is dan ligt V evenwijdig aan het grondvlak.

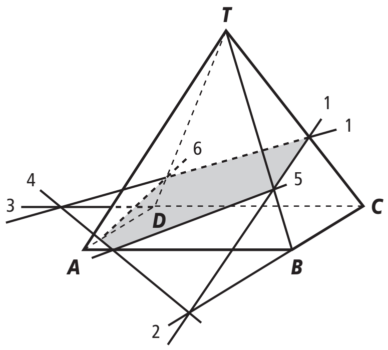
b Hieronder is een mogelijke situatie getekend:



c Ja, als doorsnede kan je een gelijkzijdig driehoek krijgen. Zie onderstaand voorbeeld.



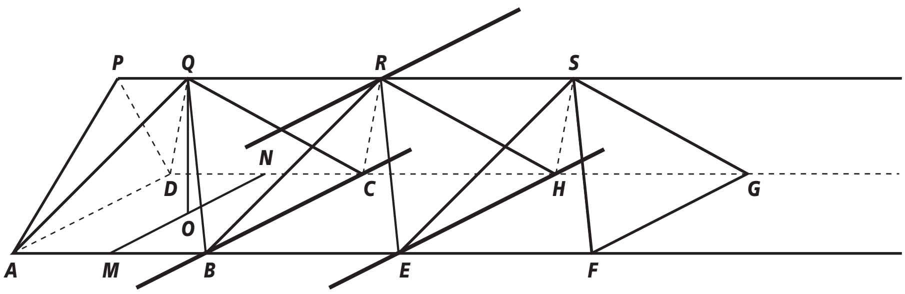
d Een vijfhoekige doorsnede is mogelijk, zie bijvoorbeeld onderstaande tekening. Een zeshoekige doorsnede is niet mogelijk. Dit komt omdat je maximaal *of* vier hoekpunten op de ribben kunt hebben *of* twee hoekpunten in het grondvlak en drie op de ribben.



bladzijde 267

35a De lijnen ER, FS, et cetera zijn evenwijdig met lijn BQ.
b De lijnen AQ en CR kruisen elkaar.
c De punten A, B, E, F, S, R, Q, P en M liggen in vlak ESF.

d De snijlijnen zijn getekend in onderstaand figuur.



e De getekende snijlijnen lopen evenwijdig aan elkaar. De situatie is vergelijkbaar met geval 4 van de theorie op pagina 261.

f Ja, de lijnstukken kunnen evenwijdig zijn. Als we de groene lijn links 'in punt A vastmaken' dan liggen de rode en de groene lijn in hetzelfde vlak, namelijk vlak $AQRB$. Als twee lijnen in hetzelfde vlak lopen snijden ze elkaar of lopen ze evenwijdig. Aan de tekening is te zien dat beide lijnen elkaar niet snijden, dus ze lopen evenwijdig.

ICT Vlakken en lijnen in de ruimte

bladzijde 268

I-1a Klik op de knop voor '*Teken een lijn*', rechts in beeld verschijnt de knop '*Verdeel ribben in*'. Gebruik dit om AE in drie stukken te verdelen en teken lijnstuk IC.
b Het is alleen mogelijk CI en DF bij een bepaalde stand van de kubus over elkaar te laten heen vallen als CI evenwijdig is aan DF. Dit is niet het geval, dus er is geen stand van de kubus mogelijk waarbij CI en DF over elkaar heen vallen.
De lijnen CI en DF snijden elkaar niet.
c Bijvoorbeeld de lijnstukken HE, EF, FG en GH.
d Ja, de lijnen CI en AG snijden elkaar.
e Ja, als je de lijnen CI en GE ver genoeg doortrekt zie je dat ze een snijpunt hebben (zoom het beeld eventueel wat uit).

bladzijde 269

I-2a -
b De lijnen kruisen elkaar.
c Punt J ligt niet in vlak HIB.
d De lijnen HJ en BG snijden elkaar. Je kan dit op twee manieren inzien.
Manier 1: verleng beide lijnen en kijk of ze elkaar snijden. Als je dit voor HJ en BG doet zul je zien dat ze elkaar snijden.
Manier 2: kijk of beide lijnstukken in hetzelfde vlak liggen. Als je dit doet voor HJ en BG is te zien dat ze in hetzelfde vlak liggen.
Omdat HJ en BG duidelijk niet evenwijdig zijn, zullen ze elkaar dan dus snijden.
e IJ en BH kruisen elkaar; BI en EC snijden elkaar; AD en FG lopen evenwijdig; CI en BE snijden elkaar.

I-3a -
b Als AQ en CP elkaar snijden, dan liggen ze in hetzelfde vlak. In dit vlak liggen in ieder geval de punten A, Q en C. Punt P moet dus zo worden gekozen dat het in vlak AQC ligt, maar P ligt ook op de lijn GH. Punt P ligt dus op het snijpunt van vlak AQC met lijn GH.
c FI en AB kruisen elkaar, immers: ze liggen niet in één vlak; BK en CH kruisen elkaar, immers: ze liggen niet in één; HI en GJ liggen in één vlak en lopen niet evenwijdig, dus ze snijden elkaar; GK en BH kruisen elkaar, immers: ze liggen niet in één vlak.

I-4a -
b
c Tekening 1: de lijnen kunnen evenwijdig zijn of elkaar kruisen.
Tekening 2: de lijnen kunnen elkaar snijden of kruisen.
Tekening 3: de lijnen kunnen elkaar snijden of evenwijdig aan elkaar lopen.

ICT Twee, drie of meer vlakken

bladzijde 270

I-5a De lijn AF.

b Nee, de vlakken $IJCF$ en $KLEG$ lopen evenwijdig aan elkaar en hebben dus geen snijlijn.

I-6a Alle punten op de snijlijn van de twee vlakken liggen in beide vlakken.

b Er is maar één punt dat zowel in $IJKL$, BDG en $ACGE$ ligt.

c De vlakken BDG en AFH lopen evenwijdig. Beiden snijden ze vlak $IJKL$ Er zijn dus twee snijlijnen.
Het snijpunt van deze snijlijnen zou het punt zijn waarop alle drie de vlakken elkaar snijden, maar omdat BDG en AFH, en daarmee hun snijlijnen met $IJKL$, evenwijdig lopen, is er geen punt waarop de snijlijnen elkaar snijden en zijn er dus geen gemeenschappelijke punten.

d Alle punten op de lijn CD liggen in alle drie de vlakken ABC, EFC en CDH.

bladzijde 271

I-7a Bijvoorbeeld de drie vlakken $ABCD$, $BDHF$ en BDG.

b Bijvoorbeeld de drie vlakken $ABFE$, $ADHE$ en $BDHF$.

c De vlakken ABC, DBG en $CDHG$ snijden elkaar in één punt (zijnde punt D). Dit komt overeen met geval 5.

d De vlakken BCF, DBG en $CDHG$ snijden elkaar zoals in geval 5, het gemeenschappelijk snijpunt is punt G.

I-8a De drie vlakken staan loodrecht op elkaar. (In andere woorden: de hoek tussen alle vlakken onderling is 90°.) Vlakken die loodrecht op elkaar staan snijden elkaar in één punt.

b De drie vlakken snijden elkaar in één punt (het snijpunt van de verlengden van AB en CF), maar staan niet loodrecht op elkaar.

c Ook deze drie vlakken snijden elkaar in één punt (zijnde punt C), maar staan niet loodrecht op elkaar.

I-9 1-III: De vlakken BCH, ADJ en KLF staan evenwijdig aan elkaar hebben dus geen snijlijnen.
2-I: De vlakken HOM, BGI en PQR hebben drie evenwijdige snijlijnen.
3-II: De vlakken HLD, ABC en ACG hebben één gemeenschappelijk snijpunt.
4-I: De vlakken BDJ, CEK en CFL hebben drie evenwijdige snijlijnen.

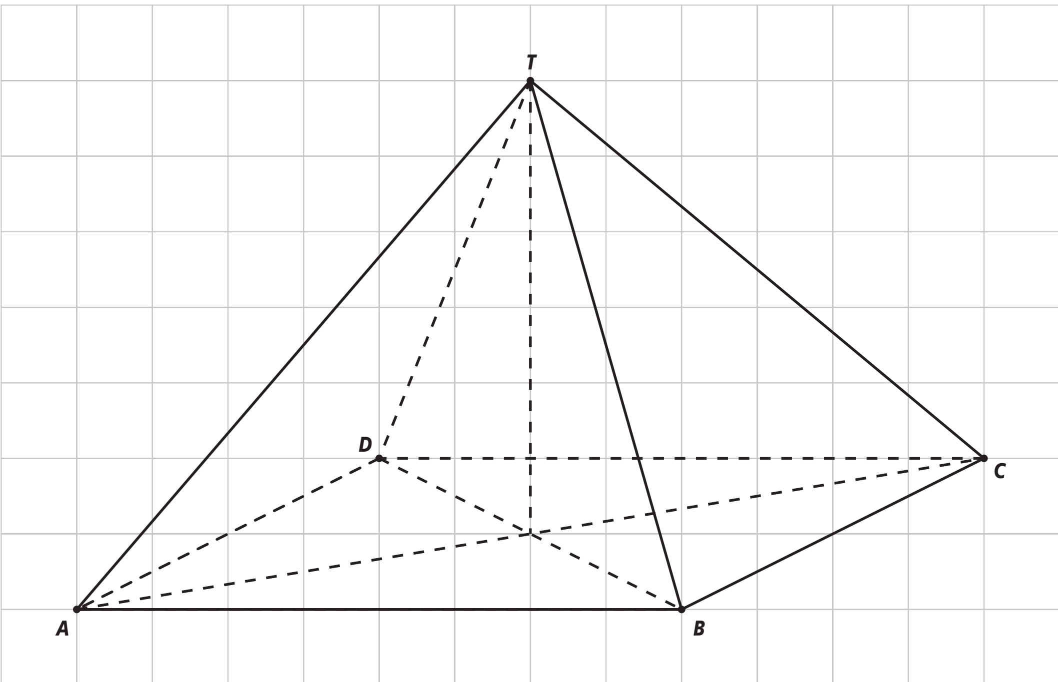
I-10a Bijvoorbeeld de vlakken QPR, ABG en KLN hebben één snijpunt dat buiten het prisma ligt.

b Noem het punt halverwege LN punt T en het punt halverwege AR punt Z. De vlakken IJT, CDZ en QPR hebben één gemeenschappelijke snijlijn buiten het prisma.

Test jezelf

bladzijde 274

T-1 De piramide kan je op onderstaande wijze tekenen.
Stap 1: teken het grondvlak.
Stap 2: vind met behulp van de diagonalen of door opmeten het midden van vlak $ABCD$.
Stap 3: trek vanuit het middelpunt een lijn van 6 cm omhoog, hiermee heb je het toppunt T.
Verbind T met A, B, C en D.
Je krijgt dan onderstaande figuur.



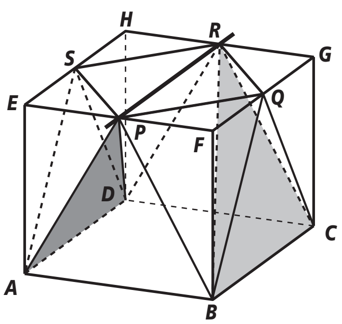
T-2a De punten A, C, N, S en W.

b Door twee lijnen is een vlak mogelijk als de lijnen evenwijdig lopen of elkaar snijden. SW en DP lopen evenwijdig, dus een vlak door deze lijnen is mogelijk.

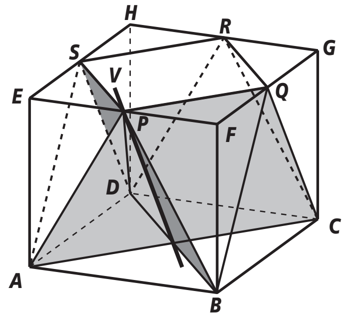
c Door twee lijnen is een vlak mogelijk als de lijnen evenwijdig lopen of elkaar snijden. Maar AR en DP kruisen elkaar. Er is dus geen vlak door deze lijnen mogelijk.

d Als lijn SN in vlak ACV zou liggen dan moeten alle punten van SN in ACV liggen. Punt N ligt wel op de lijn SN, maar niet in vlak ACV, dus lijn SN ligt niet in vlak ACV.

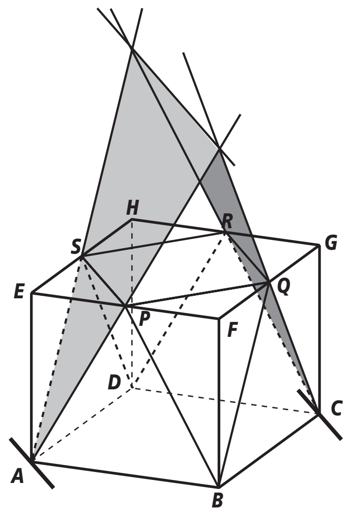
T-3a Hieronder zijn de vlakken ADP en BCR getekend, samen met hun snijlijn.



b Hieronder zijn de vlakken ACQ en BDP getekend, samen met hun snijlijn V.

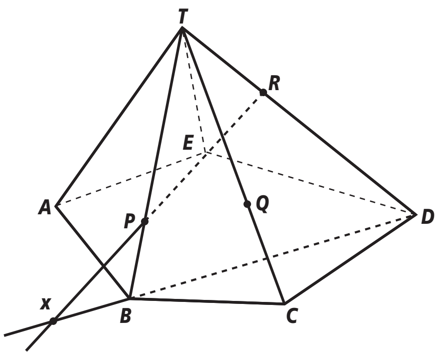


c De snijlijnen van APS, CQR en $ABCD$ liggen evenwijdig aan elkaar, zie onderstaande tekening. De situatie is vergelijkbaar met geval 2 van de theorie op pagina 261.

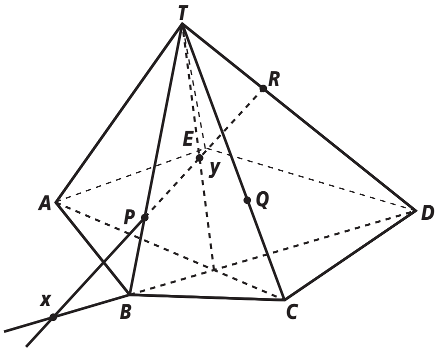


Dit komt door het volgende:
Vlak $SPQR$ ligt evenwijdig aan vlak $ABCD$, dus elk ander vlak dat deze vlakken snijdt zorgt voor twee evenwijdige snijlijnen in $ABCD$ en $SPQR$. Bij vlak APS zijn dat de lijnen SP en de lijn bij A, bij vlak CQR zijn dit de lijnen QR en de lijn bij C. $SPQR$ is een vierkant, dus de lijnen SP en RQ zijn evenwijdig aan elkaar. Als SP evenwijdig is aan RQ, terwijl de lijn bij A evenwijdig is aan SP en de lijn bij C evenwijdig ligt aan RQ, dan zijn dus ook de lijnen bij A en C evenwijdig aan elkaar. Omdat de lijnen SP en QR evenwijdig zijn zullen bovendien alle vlakken die door deze lijnen gaan elkaar snijden in een lijn die evenwijdig is aan SP en QR, en daarmee aan de lijn bij A en de lijn bij C

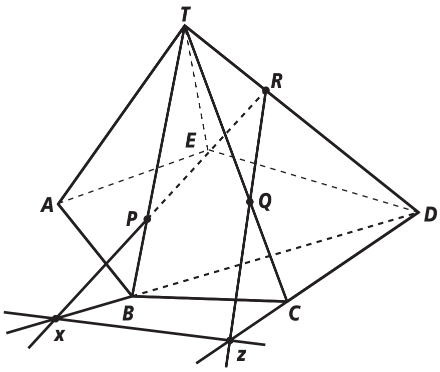
T-4a Lijn PR ligt in vlak TPR, gebruik dit als hulpvlak. Teken de snijlijn van TPR met het grondvlak, dit is lijn BD. Alle punten op lijn BD liggen dus zowel in TPR als in het grondvlak. Het snijpunt x van PR met BD is daarom gezochte snijpunt tussen PR en het grondvlak, zie onderstaande tekening.



b We gaan verder met het resultaat van opgave T-4a en blijven vlak *TPR* als hulpvlak gebruiken. Om de snijlijn tussen vlak *TPR* en vlak *TAC* te bepalen zijn er twee punten nodig die in beide vlakken liggen. De verbindingslijn tussen deze punten is dan de snijlijn. Eén punt is al bekend: punt *T*. Het andere punt is het snijpunt tussen *BD* en *AC*. Teken nu de snijlijn tussen *TPR* en *TAC*. Het snijpunt *y* van deze snijlijn met *PR* is het snijpunt van vlak *TAC* met *PR*. Zie ter illustratie onderstaande tekening.



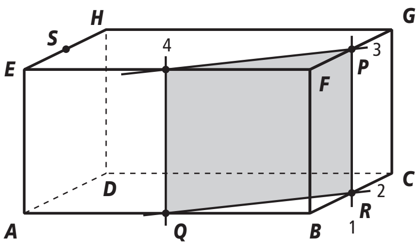
c Er zijn twee snijpunten tussen *PQR* en het grondvlak nodig om de snijlijn tussen beiden te kunnen bepalen. Lijn *PR* ligt in vlak *PQR*, dus het eerste punt is bepaald bij opgave T-4a. Als tweede punt gebruiken we het snijpunt *z* van *QR* met *CD*. De verbindingslijn tussen *X* en *Z* is de gezochte snijlijn, zie onderstaande tekening.



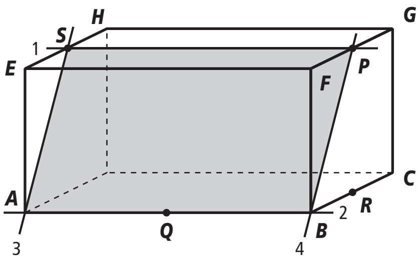
d De punten *P* en *Q* moeten even hoog boven het grondvlak komen te liggen.

bladzijde 275

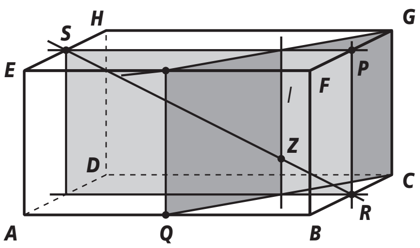
T-5a De doorsnede kan je op de volgende wijze tekenen:
Stap 1: Teken *PR*.
Stap 2: Teken *QR*.
Stap 3: Het bovenvlak ligt evenwijdig aan het ondervlak, dus ook de snijlijn in het bovenvlak ligt evenwijdig aan het ondervlak. Teken dus door punt *P* een lijn evenwijdig aan *QR*.
Stap 4: Teken de lijn van *Q* naar het snijpunt van lijn 3 met ribbe *EF*.
Je krijgt dan de volgende doorsnede:



b De doorsnede kan je op de volgende wijze tekenen:
Stap 1: Teken *SP*.
Stap 2: Het bovenvlak ligt evenwijdig aan het ondervlak, dus ook de snijlijn in het bovenvlak ligt evenwijdig aan het ondervlak. Teken dus door punt *Q* een lijn evenwijdig aan *SP*. Dit is de ribbe *AB*.
Stap 3: Teken de lijn *AS*.
Stap 4: Teken de lijn *BP*.
Je krijgt dan de volgende doorsnede:



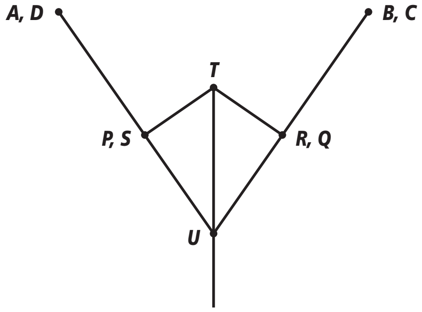
c Lijn *SR* ligt in vlak *SPR*, dit vlak gebruiken we als hulpvlak. Eerst vinden we de snijlijn *l* tussen *SPR* en *QCG*, het snijpunt *Z* tussen *l* en *SR* is het gezochte snijpunt.
Stap 1: Omdat het bovenvlak evenwijdig ligt aan het ondervlak ligt de snijlijn van *SPR* met het ondervlak dus evenwijdig met de snijlijn van *SPR* met het bovenvlak. De snijlijn van *SPR* door het ondervlak kan dus worden getekend door vanuit *R* een lijn te trekken die evenwijdig loopt met *SP*. Het snijpunt van deze lijn vanuit *R* met de lijn *QC* ligt in zowel vlak *SPR* als in vlak *QCG*.
Stap 2: Op dezelfde wijze: omdat het ondervlak evenwijdig is aan het bovenvlak kunnen we de doorsnede van *QCG* met het bovenvlak tekenen door vanuit *G* een lijn te trekken die evenwijdig loopt met *QC*. Het snijpunt van deze lijn vanuit *G* met de lijn *SP* ligt in zowel vlak *SPR* als in vlak *QCG*.
Stap 3: We hebben nu twee punten die zowel in *SPR* als in *QCG* liggen. De verbindingslijn tussen beiden is snijlijn *l*.
Stap 4: Het snijpunt *Z* tussen verbindingslijn *l* en lijn *SR* is het snijpunt tussen vlak *QCG* en lijn *SR*.
Zie onderstaande tekening ter illustratie.



T-6a In de ruimte zijn er drie mogelijkheden voor de ligging van twee lijnen: (i) ze kunnen elkaar snijden; (ii) ze kunnen evenwijdig lopen of (iii) ze kunnen elkaar kruisen. De lijnen *AC* en *PQ* lopen duidelijk niet evenwijdig en ze snijden elkaar ook niet. Dus ze kruisen elkaar.

b De lijnen *ST*, *RT*, *CU* en *DU* kruisen *PQ*.

c Intekenen van de punten geeft de onderstaande afbeelding:



T-7 Met de volgende stappen kan je de doorsnede van de piramide met vlak MPQ tekenen.

Stap 1: Trek de ribbe AB door.

Stap 2: Teken de lijn MP (de snijlijn met het voorvlak)) en trek deze door tot je de lijn AB snijdt. Noem het snijpunt X. Punt X ligt zowel in vlak MPQ als in het grondvlak.

Stap 3:Trek de ribbe BC door.

Stap 4:Teken de lijn PQ (de snijlijn met het rechtervlak) en trek deze door tot je de lijn BC raakt. Noem het snijpunt Y. Punt Y ligt zowel in vlak MPQ als in het grondvlak.

We hebben nu twee punten die zowel in vlak MPQ als in het grondvlak liggen: de punten X en Y. De verbindingslijn van beide punten vormt dus de snijlijn tussen MPQ en het grondvlak.
Deze verbindingslijn kunnen we gebruiken doorsnee-lijnen van het achtervlak en het rechtervlak te tekenen.

Stap 5:Trek de ribbe CD door.

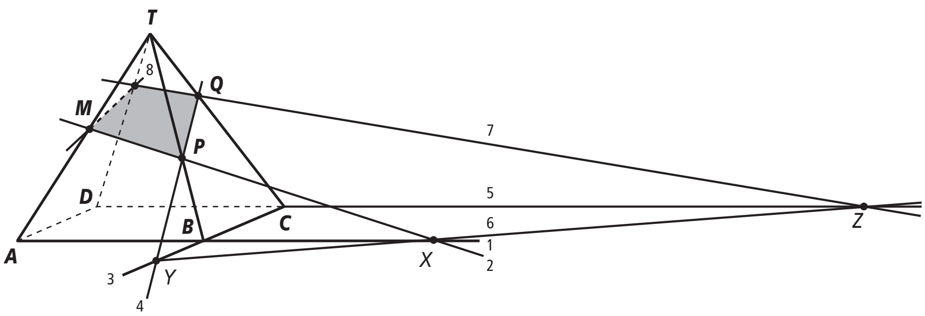
Stap 6:Teken de lijn XY en trek deze door tot je de lijn CD raakt. Noem het snijpunt Z. Punt Z ligt op XY en ligt dus in MPQ. Maar punt Z ligt ook op lijn CD en daarmee in vlak CDT.

We hebben nu twee punten die zowel in vlak MPQ als in vlak CDT liggen: punt Z en punt Q. De verbindingslijn van beide punten vormt dus de snijlijn tussen MPQ en CDT en geeft dus de snijlijn van de doorsnede met het achtervlak.

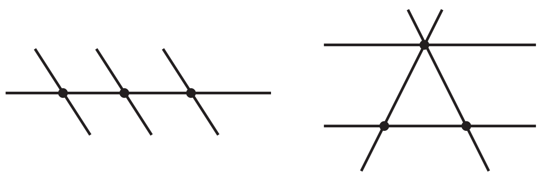
Stap 7:Dus teken de lijn ZQ (de snijlijn met het achtervlak).

Stap 8:We hebben nu twee punten die zowel in vlak MPQ als ADT liggen: (i) het snijpunt van ZQ met DT en (ii) punt M. De verbindingslijn van beiden is de snijlijn tussen MPQ en ADT en geeft dus de snijlijn van de doorsnede met het linkervlak.

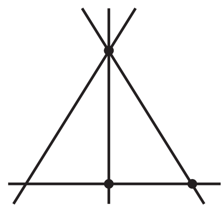
Vergelijk deze stappen ook de stappen bij opgave 25. Je krijgt onderstaande tekening:



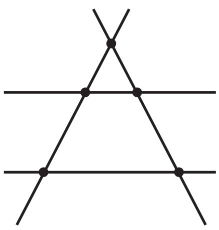
T-8a Vier vlakken kunnen één snijlijn hebben. Zie bijvoorbeeld de tekening van geval 3 van de theorie op pagina 261 en denk een extra vlak dat ook door dezelfde snijlijn gaat.
Vier vlakken met twee snijlijnen is niet mogelijk, vier vlakken met drie snijlijnen daarentegen weer wel. Ook vier vlakken met vier snijlijnen en vier vlakken met vijf snijlijnen zijn mogelijk.
Elk vlak kan een ander vlak maximaal één keer snijden. Het maximaal aantal snijlijnen wordt dus bereikt als elk vlak elk ander vlak snijdt. Vlak A snijdt dan 3 andere vlakken, vlak B snijdt ook de andere 2 en ook vlak drie en vier snijden elkaar onderling. Er zijn dan dus $3 + 2 + 1 = 6$ snijlijnen. Zie hieronder enkele bovenaanzichten van snijdende vlakken als voorbeeld. (De vlakken staan dus loodrecht het papier in, waardoor je van elk vlak maar een lijn ziet. De snijlijnen van de vlakken gaan eveneens loodrecht het papier in en van de snijlijnen zie je dus maar een punt.)



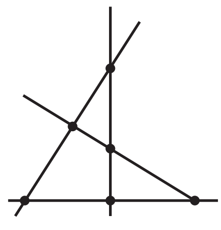
Vier vlakken met 3 snijlijnen



Vier vlakken met 4 snijlijnen

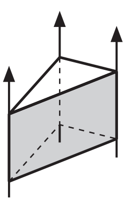


Vier vlakken met 5 snijlijnen

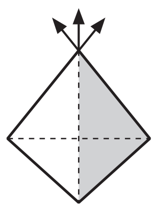


Vier vlakken met 6 snijlijnen

b Bij twee lijnen weet je dat als ze beiden in één vlak liggen, dat ze elkaar snijden of evenwijdig aan elkaar lopen. (Het omgekeerde geldt ook: als twee lijnen elkaar snijden of evenwijdig aan elkaar lopen liggen ze in één vlak.)
Bij drie lijnen geldt ook dat als ze in één vlak liggen ze elkaar snijden of dat ze evenwijdig zijn. Dat is ook begrijpelijk. Stel dat de lijn A, B en C in één vlak liggen. We weten dan dat (i) de lijnen A en B elkaar snijden of evenwijdig zijn; (ii) de lijnen B en C elkaar snijden of evenwijdig zijn en (iii) de lijnen C en A elkaar snijden of evenwijdig zijn. Dus *of* A, B en C snijden elkaar alle drie *of* twee lijnen lopen evenwijdig en de derde snijdt beiden *of* ze zijn alle drie evenwijdig.
(Het omgekeerde geldt nu echter niet: als de drie lijnen evenwijdig zijn of elkaar snijden hoeven ze nog niet in één vlak te liggen. Zie ook de voorbeelden hieronder.)



De drie lijnen liggen evenwijdig aan elkaar, maar liggen niet in hetzelfde vlak.



De drie lijnen snijden elkaar, maar liggen niet in hetzelfde vlak.