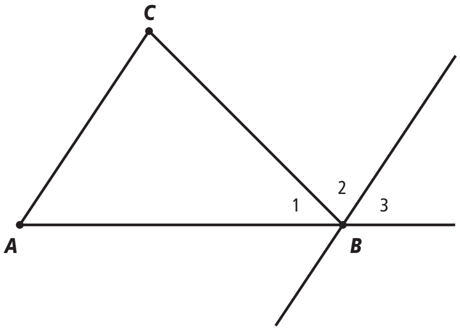
Hoofdstuk 5 - Meetkundige plaatsen

Voorkennis: Eigenschappen en bewijzen

bladzijde 138

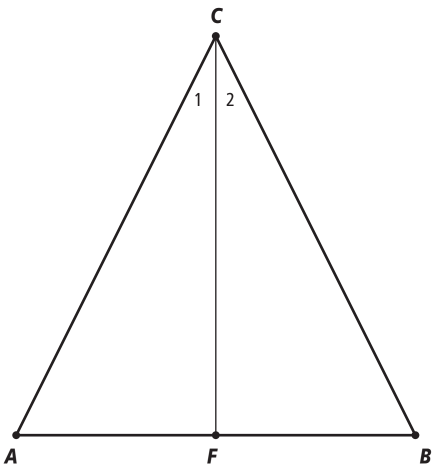
V-1a Gegeven: Driehoek met hoeken : $\angle A$, $\angle B$ en $\angle C$
Te bewijzen: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$
Bewijs:



Teken lijn door B die evenwijdig loopt met AC : lijn door B en D .
$\angle B_3 = \angle A$ (F -figuur $CABD$)
$\angle B_2 = \angle C$ (Z -figuur $ACBD$)
$\angle B_1 = \angle B$
$\angle B_1 + \angle B_2 + \angle B_3 = 180^\circ$ (gestrekte hoek) $\Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

b Buitenhoek van $\angle B = \angle B_2 + \angle B_3 = \angle C + \angle A$
of buitenhoek van $\angle B = \angle C + \angle A$ (stelling van de buitenhoek)

V-2a



$$\left.\begin{array}{l}\angle C_1 = \angle C_2 \\ |AC| = |BC| \\ |CF| = |CF|\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ACF \text{ en } \triangle BCF \text{ zijn congruent } \Rightarrow \angle A = \angle B$$

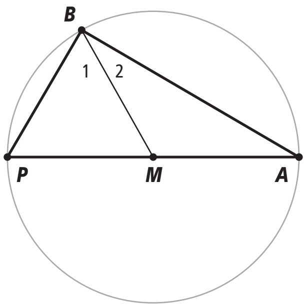
b CF is een hoogtelijn $\Rightarrow \angle F = 90^\circ$ ($\angle AFC = \angle BFC = 90^\circ$), $|AC| = |BC|$ en $|CF| = |CF|$
$\triangle ACF \cong \triangle BCF$ (ZZR) $\Rightarrow \angle A = \angle B$

c De zwaartelijn vanuit C zodat $|AF| = |BF|$, met $|AC| = |BC|$ en $|CF| = |CF|$ (ZZZ).

d F is het midden van AB en $CF \perp AB \Rightarrow CF$ gaat door het midden van AB en staat loodrecht op AB, dus is de middelloodlijn van AB.

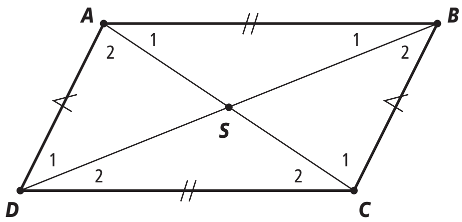
bladzijde 139

V-3



$MP = MR = MA$ (straal cirkel) dus $\triangle PMR$ en $\triangle AMR$ zijn gelijkbenig.
De bijbehorende basishoeken zijn gelijk: $\angle P = \angle R_1$ en $\angle A = \angle R_2$
De hoeken van een driehoek zijn samen 180° of $\angle P + \angle R_1 + \angle R_2 + \angle A = 180^\circ$
Vervang $\angle P$ door $\angle R_1$ en $\angle A$ door $\angle R_2$ dit geeft: $2 \cdot \angle R_1 + 2 \cdot \angle R_2 = 180^\circ \Rightarrow$
$\angle R_1 + \angle R_2 = \angle R = 90^\circ$ dus ΔPQR is rechthoekig.

V-4a



b $\angle C_1 = \angle A_2$ en $\angle B_2 = \angle D_1$

c Als $\triangle ADS \cong \triangle CBS$, dan is S het midden van BD en van AC
Als $\triangle ABS \cong \triangle CDS$, dan is S het midden van BD en AC

d $ABCD$ is een parallellogram $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} |AD| = |BC| \\ \angle C_1 = \angle A_2 \\ \angle B_2 = \angle D_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ADS \cong \triangle CBS \quad \text{(evenwijdige zijden van een paralellogram)}$$

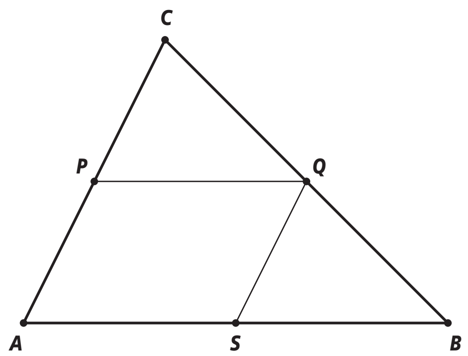
(ZHZ) $\Rightarrow |DS| = |BS|$ en $|AS| = |CS| \Rightarrow S$ is het midden van AC en $BD \Rightarrow$

V-5a De diagonalen van een rechthoek zijn evenlang en delen elkaar middendoor.
Dus de afstand van het snijpunt van de diagonalen tot de hoekpunten is gelijk en gelijk aan de straal van een cirkel met als middelpunt het snijpunt van de diagonalen.
Dus de hoekpunten liggen op een cirkel.

b Door de hoekpunten van een rechthoek kan een cirkel worden getekend.

c De omkering: als de hoekpunten van een vierhoek op een cirkel liggen is de vierhoek een rechthoek, is niet waar.
Stel twee hoekpunten, A en C , liggen op de middellijn van de cirkel.
Neem $\angle CAB = \angle CAD = 30^\circ$, B en D liggen op de cirkel, dus $\angle CBA = \angle CDA = 90^\circ$
$\Rightarrow \angle BAD = 60^\circ$ en $\angle BCD = 120^\circ \neq 90^\circ \Rightarrow$ Bewering is niet waar.

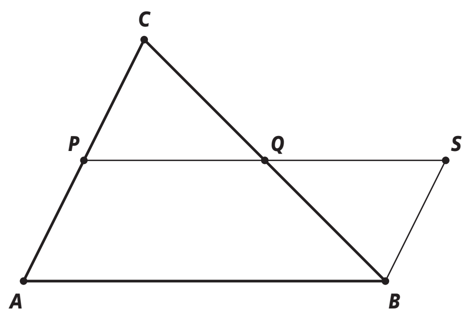
V-6a



Van $\triangle CPQ$ en $\triangle CAB$ zijn de tophoeken ($\angle BCA$) gelijk .
De verhouding van de zijden is $1:2$. Dus de driehoeken zijn gelijkvormig met vergrotingsfactor $2 \Rightarrow |PQ| = \frac{1}{2} \cdot |AB|$.
De bijbehorende hoeken zijn dus ook gelijk.
$\angle CPQ = \angle CAB \Rightarrow PQ\,//\,AB$ (F -figuur).

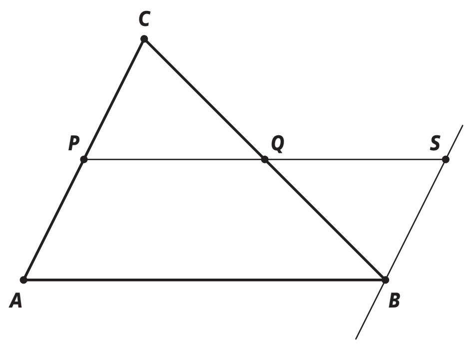
b S is het midden van AB (zie figuur bij a).
Teken hulplijn SQ .
$\triangle BSQ \sim \triangle BAC$: analoog bewijs als bij $\triangle CPQ$ en $\triangle CAB$.
Dan geldt: $\angle BQS = \angle QCP$ en $\angle CQP = \angle QBS$ en $|QB| = |CQ| \Rightarrow \triangle BSQ \cong \triangle QPC$ (HZH)
Dus $|BS| = |QP| = \frac{1}{2}|AB|$.

c Eerste hulplijn:



$\triangle QSB \cong \triangle QPC$ want: $\angle SQB = \angle PQC$ (overstaande hoeken)
$|PQ| = |SQ|$ en $|CQ| = |BQ|$ (ZHZ)
Dus $|SB| = |PC|$, daar $|AP| = |PC|$ geldt $|SB| = |AP|$
$\angle QBS = \angle PCQ \Rightarrow AP \parallel SB$ (Z -figuur).
$APSB$ is dan een parallellogram: $|PS| = |AB|$, $AB \parallel PS$ of $AB \parallel PQ$
$|PQ| = \frac{1}{2} \cdot |PS| = \frac{1}{2} \cdot |AB|$

Tweede hulplijn:



$\triangle QBS \cong \triangle PCQ$ want: $\angle SBQ = \angle PCQ$ (Z -figuur, $BS // AC$)
$\angle QBS = \angle PCQ$ (overstaande hoeken) en $|CQ| = |BQ|$ (HZH)
$APSB$ is dan een parallellogram: $|PS| = |AB|$, $AB // PS$ of $AB // PQ$
$|PQ| = \frac{1}{2} \cdot |PS| = \frac{1}{2} \cdot |AB|$

V-7a $\angle CAB = \angle CBA$ (gelijkbenige driehoek), $\angle AEB = \angle ADB = 90°$ (hoogtelijn) en $|AB| = |BA| \Rightarrow$
$\triangle ABE \cong \triangle BAD$ (ZHH) $\Rightarrow |BE| = |AD|$

b Als de hoogtelijnen uit de basishoeken even lang zijn is de driehoek gelijkbenig.

c De omkering is waar.

$$\left.\begin{array}{l} |BE| = |AD| \\ |AB| = |BA| \\ \angle BEA = \angle ADB = 90° \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABE \cong \triangle BAD \quad \text{(ZZR)} \Rightarrow \angle EAB = \angle DBA \Rightarrow \Delta ABC$$

is gelijkbenig.

5.1 Middelloodlijnen

bladzijde 140

1a Arie zal vermoedelijk naar bron 2 gaan, want die lijkt het dichtst bij.

b A_1 , A_2 en A_3 bijvoorbeeld.

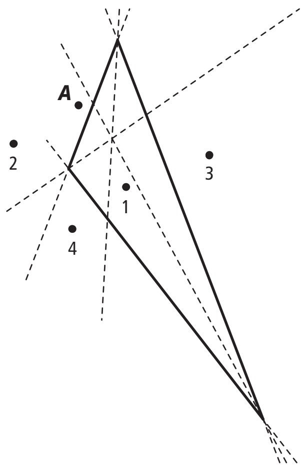
c Teken de lijn door het midden van het verbindingslijnstuk van bron 1 en bron 3. Deze lijn moet ook loodrecht op dat verbindingslijnstuk staan. (Zie de tekening hierboven.)

d Teken de lijn zoals beschreven bij opdracht c. Ook deze lijn staat in de tekening hierboven.

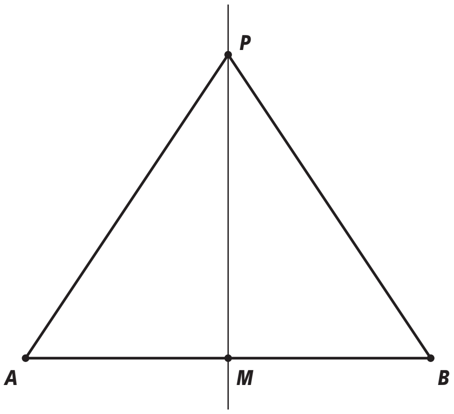
e Het snijpunt van de bij opdracht c en opdracht d getekende lijnen ligt even ver van bron 1 als van bron 2 en bron 3.

f Ja, ook die grenzen gaan door het midden van verbindingslijnstukken van de bronnen.

g



2a

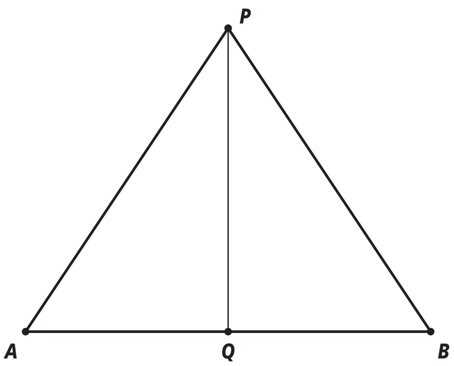


b Voor P moet je bewijzen dat het punt even ver van A als van B ligt.
Je kunt de driehoeken $AP'P$ en $BP'P$ gebruiken en daarmee een congruentiestelling, namelijk het geval ZHZ.

c Gegeven: P ligt op de middelloodlijn van AB.
Te bewijzen: $|PA| = |PB|$.
Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l}\angle AMP = \angle BMP = 90^\circ \\ |PM| = |PM| \\ |AP'| = |BP'|\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AMP \cong \triangle BMP \text{ (ZHZ)} \Rightarrow |PA| = |PB|$$

3a



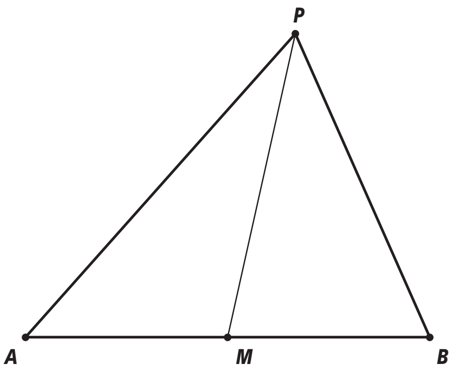
b -

c Aanpak 1
Teken de loodlijn PQ op AB ,
Gegeven: $|PA| = |PB|$, $\angle PQA = \angle PQB = 90^\circ$
Te bewijzen: $|AQ| = |BQ|$
Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l}|PA| = |PB| \text{ (gegeven)} \\ \angle AQP = \angle BQP = 90^\circ \\ |PQ| = |PQ|\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AQP \cong \triangle BQP \text{ (ZZR)} \Rightarrow |AQ| = |BQ|$$

PQ gaat dus door het midden van AB en staat loodrecht op AB en is de middelloodlijn van AB .

Of aanpak 2



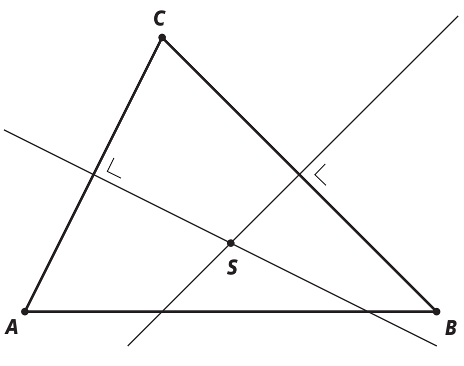
Gegeven: $|PA| = |PB|$, $|AM| = |BM|$
Te bewijzen: $\angle PMA = \angle PMB = 90°$
Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l} |PA| = |PB| \text{ (gegeven)} \\ |AM| = |BM| \text{ (gegeven)} \\ |PM| = |PM| \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AMP \cong \triangle BMP \text{ (ZZZ)} \Rightarrow \angle AMP = \angle BMP = 90°$$

Dus $PM \perp AB$ en gaat door het midden van AB en is de middelloodlijn van AB.

bladzijde 141

4 $AS_1 = BS_1 = straal_1$, $AS_2 = BS_2 = straal_2$ en $straal_1 = straal_2 \Rightarrow S_1$ en S_2 liggen even ver van A als B, dus liggen op de middelloodlijn van AB.

5a


b $AS = BS$ want dan ligt S ook op de middelloodlijn van AB.

c Gegeven: $\triangle ABC$
Te bewijzen: de middelloodlijnen van de driehoek gaan door 1 punt
Bewijs:
Teken de middelloodlijnen van AC en BC. Het snijpunt is S.
$AS = CS$ (middelloodlijn AC) en $CS = BS$ (middelloodlijn BC), dus $AS = CS = BS$ of $AS = BS$.
S ligt dus evenver van A als B, dus ligt S op de middelloodlijn van AB.
Dus de middelloodlijnen gaan door 1 punt.

6a De middelloodlijnen van de zijden van een $\triangle ABC$ gaan door 1 punt, M.
Dus geldt: $AM = BM = CM =$ straal van een cirkel met middelpunt M.
Er is dus 1 middelpunt en ook 1 cirkel door A, B en C.

b $AB = 6$, $cirkel_1(A, 5)$, Op $cirkel_1$ ligt C
$cirkel_2(B, 3)$, Op $cirkel_2$ ligt C
Dus C is het snijpunt van de cirkels. Teken de middelloodlijnen van AB en BC.
Deze snijden elkaar in het middelpunt M van de cirkel door A, B en C.

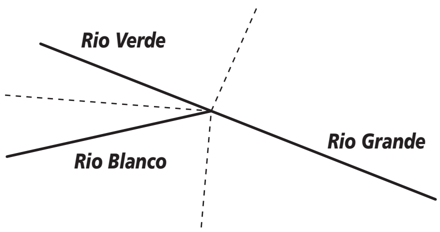
7 Bewijs:
Teken lijnstuk RM.
Er geldt: $|MP| = |MR| \Rightarrow \triangle PMR$ is gelijkbenig. $\Rightarrow \angle MPR = \angle PRM$ (1)
Er geldt: $|MQ| = |MR| \Rightarrow \triangle QMR$ is gelijkbenig. $\Rightarrow \angle RQM = \angle MRQ$ (2)
$\angle MPR + \angle PRQ + \angle RQM = 180° \Rightarrow \angle MPR + \angle PRM + \angle MRQ + \angle RQM = 180° \Rightarrow$
(1) en (2) : $\angle PRM + \angle PRM + \angle MRQ + \angle MRQ = 180° \Rightarrow$
$2 \cdot \angle PRM + 2 \cdot \angle MRQ = 180° \Rightarrow \angle PRM + \angle MRQ = 90° \Rightarrow \angle PRQ = 90° \Rightarrow$
driehoek PRQ is rechthoekig.

5.2 Deellijnen

bladzijde 142

8a -

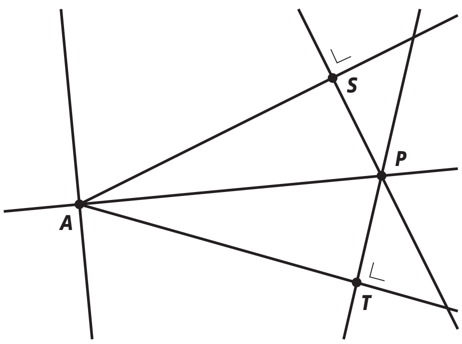
b



De deellijnen van de hoeken vormen de grenzen van de gebieden.

9a $d(P, l) = d(P, m)$

b

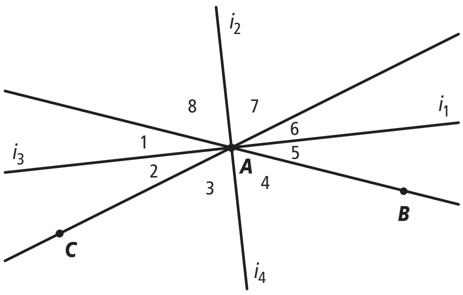


$\triangle ASP \cong \triangle APT$

c Te bewijzen: Als P op de deellijn van $\angle A$ ligt dan geldt: $d(P, l) = d(P, m)$.
Bewijs: Vanuit P loodlijnen op de benen van $\angle A$ tekenen.
$\angle ASP = \angle ATP = 90^\circ$, $|AP| = |AP|$, $\angle SAP = \angle TAP$ (AP deellijn van $\angle A$)
$\triangle ASP \cong \triangle APT$ (ZHH) $\Rightarrow |PS| = |PT| \Rightarrow d(P, l) = d(P, m)$

d Te bewijzen: Als $d(P, l) = d(P, m)$ dan ligt P op de deellijn van $\angle A$.
Bewijs: $d(P, l) = d(P, m)$ dus $|PS| = |PT|$, $\angle ASP = \angle ATP = 90^\circ$, $|AP| = |AP|$
$\triangle ASP \cong \triangle APT$ (ZZH): $\angle SAP = \angle TAP \Rightarrow AP$ is de deellijn van $\angle A$.

10a



$\angle A_8 = \angle A_7$ en $\angle A_6 = \angle A_5$ (l_1 en l_2 zijn deellijnen)
$\angle A_8 + \angle A_7 + \angle A_6 + \angle A_5 = 180^\circ$ (lijn door A en B, gestrekte hoek bij A) geeft:
$2 \cdot \angle A_7 + 2 \cdot \angle A_6 = 180^\circ \Rightarrow \angle A_7 + \angle A_6 = 90^\circ \Rightarrow l_1 \perp l_2$

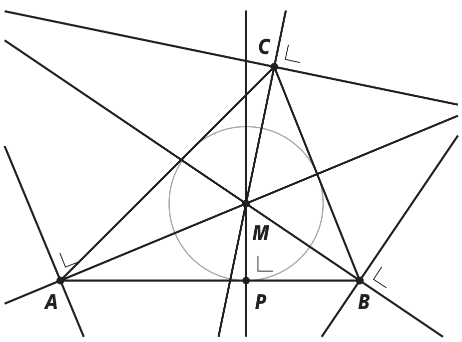
b $\angle A_3 = \angle A_4$ en $\angle A_5 = \angle A_6$ (l_1 en l_4 zijn deellijnen)
$\angle A_3 + \angle A_4 + \angle A_5 + \angle A_6 = 180^\circ$ (lijn door A en C, gestrekte hoek bij A) geeft:
$2 \cdot \angle A_4 + 2 \cdot \angle A_5 = 180^\circ \Rightarrow \angle A_4 + \angle A_5 = 90^\circ \Rightarrow l_1 \perp l_4$
Bij a was gevonden: $\angle A_7 + \angle A_6 = 90^\circ$, met $\angle A_4 + \angle A_5 = 90^\circ$ geeft dit:
$\angle A_7 + \angle A_6 + \angle A_5 + \angle A_4 = 180^\circ$, dus l_2 en l_4 vormen een rechte lijn.

bladzijde 143

11a Afstanden.

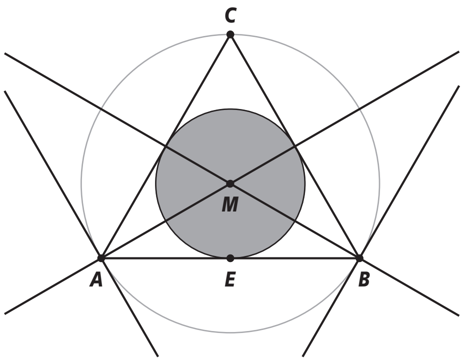
b Te bewijzen: De deellijnen van een driehoek gaan door 1 punt.
Bewijs: In $\triangle ABC$ snijden de deellijnen van $\angle A$ en $\angle B$ elkaar in S.
$d(S, AB) = d(S, AC)$,
$d(S, AB) = d(S, BC)$, omdat op de deellijn van $\angle B$ ligt.
Omdat $d(S, AB)$ in de driehoek een vaste waarde heeft, geldt: $d(S, AC) = d(S, BC)$.
Dus S ligt even ver van AC als van BC en ligt dus op de deellijn van $\angle C$.
Hieruit volgt: de deellijnen van een driehoek gaan door 1 punt.

12a,b



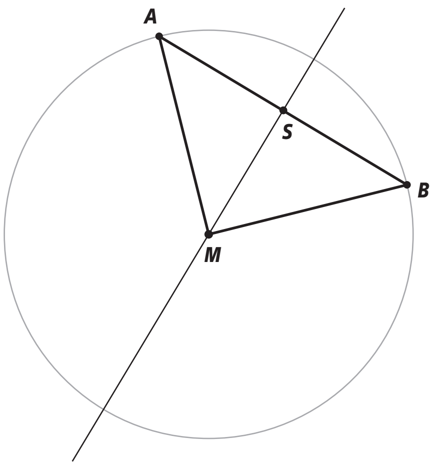
Het snijpunt M van de deellijnen van $\triangle ABC$ is het middelpunt van de ingeschreven cirkel. P is het snijpunt van de loodlijn, uit M op AB, met AB.

13a



b Zie tekening bij a. E ligt op AB en de deellijn van $\angle C$.
$|CE| = |CE|$, $\angle ACE = \angle BCE$, $|AC| = |BC|$ (gelijkzijdige $\triangle ABC$)
$\triangle AEC \cong \triangle BEC$ (ZHZ), $|AE| = |BE|$
$\angle AEC = \angle BEC$, samen zijn zij 180° (gestrekte hoek), dus elk 90°.
CE gaat door het midden van AB en staat loodrecht op AB, dus CE is de middelloodlijn.

14a



Stralen MA en MB zijn de hulplijnen

b $|MA| = |MB|$ (straal cirkel) Loodlijn vanuit M op AB snijdt AB in S.
$\angle MSA = \angle MSB = 90^\circ$, $|MS| = |MS|$.
$\triangle MSB \cong \triangle MSA$ (ZZH) $\Rightarrow |AS| = |BS|$ of S in het midden van AB.

15 Te bewijzen: De middelloodlijn van een koorde gaat door het middelpunt van een cirkel
Bewijs: Koorde AB. De middelloodlijn snijdt de koorde in S. Op de middelloodlijn ligt een willeurig punt P. Dus $|AS| = |BS|$ en $\angle PSA = \angle PSB = 90^\circ$.
$\triangle ASP \cong \triangle BSP$ (ZHZ): $|AP| = |BP|$, dus elk punt op de middelloodlijn ligt even ver van A als van B. Dit moet ook voor het middelpunt gelden, dus het middelpunt ligt op de middelloodlijn.

5.3 Meetkundige plaatsen

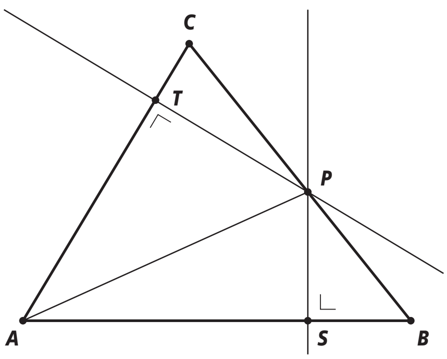
bladzijde 144

16a Het snijpunt van de middelloodlijnen van AD en DC is S met $|AS| = |DS|$ en $|DS| = |CS|$, dus $|AS| = |DS| = |CS|$. Als SB gelijk moet zijn aan SC, dan moet S op de middelloodlijn van BC liggen. Dus S ligt dan even ver van A, D, C en B.
S is het snijpunt van de middelloodlijnen.

b $|MP| = |MQ| = |MR| = |MS| = |MP| =$ straal van de cirkel met middelpunt M.
Dus de punten P, Q, R en S liggen op een cirkel met middelpunt M.

c Het middelpunt van een cirkel door vier punten is het snijpunt van middelloodlijnen van de verbindingslijnen van de opeenvolgende punten.

17a



Teken loodlijn PT op AC en PS op AB.
$\Delta APS \cong \Delta APT$ (twee gelijke hoeken en dus ook de derde, en een gemeenschappelijke zijde AP): $|PS| = |PT|$ of $d(P, AC) = d(P, AB)$

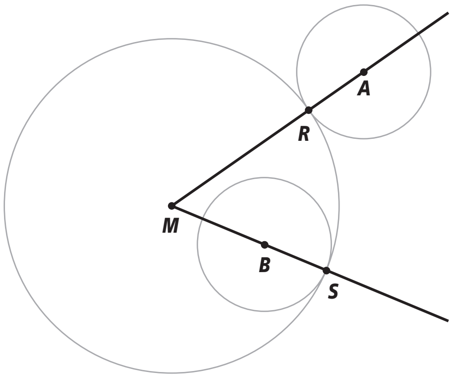
b Waar. Alle punten die even ver van twee snijdende lijnen liggen, liggen op de deellijn van betreffende hoek. P ligt even ver van de lijnen en ligt dus op de deellijn.

c De bijbehorende eigenschap van de meetkundige plaats is gebruikt.

bladzijde 145

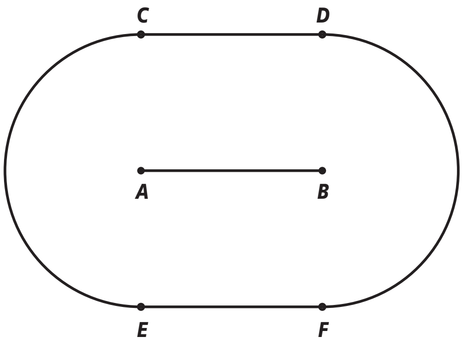
18a De raaklijn in het gemeenschappelijke raakpunt staat loodrecht op de bijbehorende stralen MR en AR, dus MR en AR liggen in elkaars verlengde dus M, R en A liggen op dezelfde lijn.

b,c



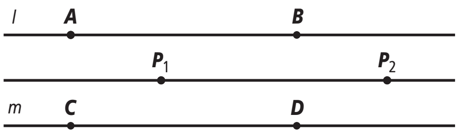
d A : cirkel$(M, 7)$, B : cirkel$(M, 3)$

19a



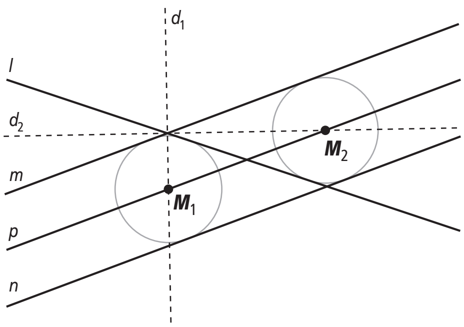
b Twee lijnstukken verbonden door twee halve cirkels

c,d



20a Er zijn twee cirkels die aan alledrie de lijnen raken.

b De cirkel raak t aan m en n dus het middelpunt ligt op de middenparallel p van m en n.
De cirkel raakt aan l en m, dus het moddelpunt ligt op de deelllijnen d_1 en d_2 van de hoeken van l en m.
De lijn p en de lijnen d_1 en d_2 snijden elkaar in M_1 en M_2. Dit zijn de gevraagde middelpunten.



21a middelloodlijn van verbindingslijnstuk

b de twee deellijnen van de twee hoeken tussen de lijnen

c concentrische cirkel

d snijpunt van de deellijnen van de drie hoeken van de driehoek

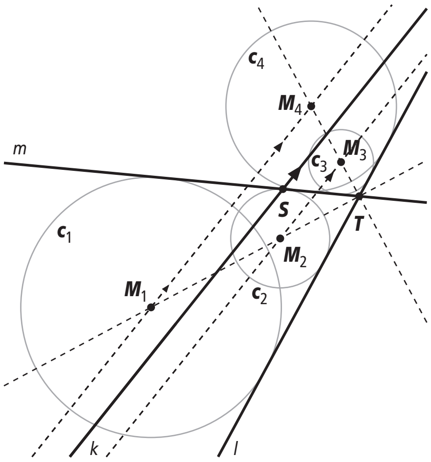
5.4 Construeren

bladzijde 146

22a M ligt even ver van l als m
M ligt op een afstand 2 van k

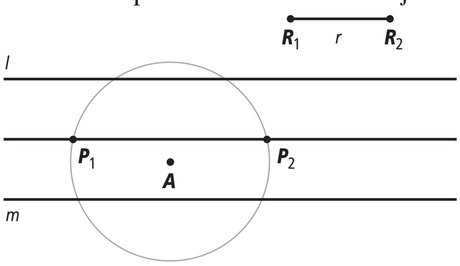
b de deellijn van de hoek tussen l en m, een lijn evenwijdig aan k op een afstand 2 van k

c Het middelpunt moet zowel op een lijn liggen, welke zowel op 2 van k ligt , als op de deellijn van de hoek tussen l en m. Dit resulteert in 4 middelpunten: M_1, M_2, M_3 en M_4 met bijbehorende cirkels.

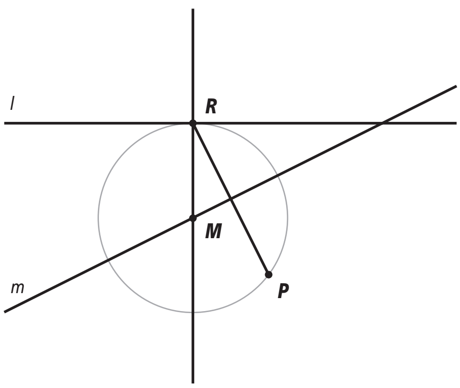


bladzijde 147

23 Voorwaarde 1: d(P, l) = d(P, m): construeer de middenparallel van l en m.
Voorwaarde 2: $|PA| = r$: construeer de cirkel (A, r).
De middenparallel en de cirkel snijden in twee punten. Dit zijn de gevraagde punten.

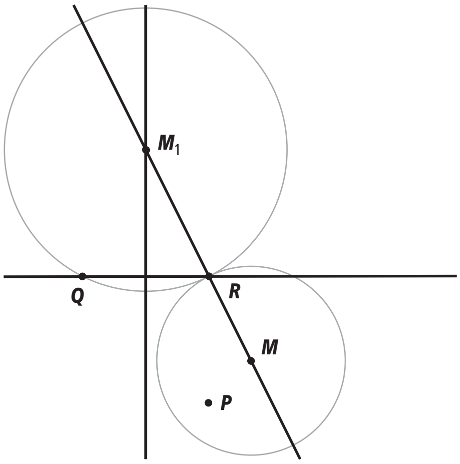


24



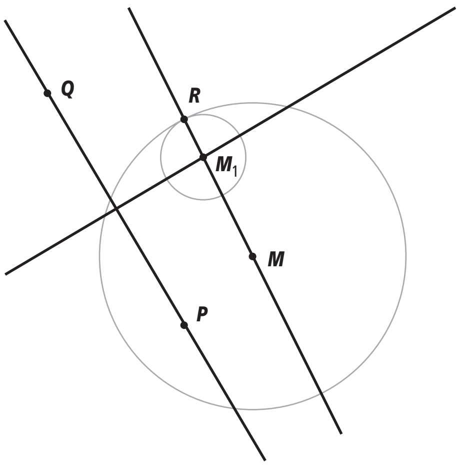
Constructiestappen:
1. Loodlijn in R op l
2. R en P verbinden
3. Middelloodlijn van RP tekenen
4. Middelpunt M is het snijpunt van de loodlijn en middelloodlijn.
5. Teken cierkel met middelpunt M en straal MR

25a



M_1 is het snijpunt van: middelloodlijn QR en de lijn door M en R, straal $= M_1R$

b

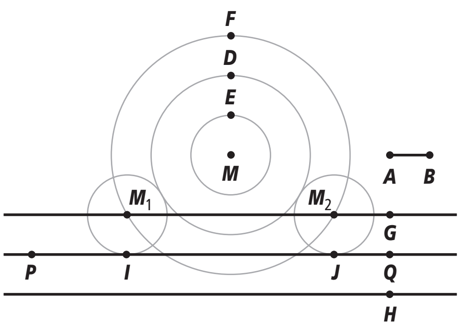


Het middelpunt M_1 van de cirkel is het snijpunt van de lijn door M en R en de middelloodlijn van PQ. straal $= M_1R$

26a cirkel c_2 : raakt lijn l, raakt cirkel c_1 en heeft een straal AB

b - middelpunt M_1 ligt op een lijn evenwijdig aan l op een afstand AB; raakt l en heeft straal AB
- middelpunt M_1 ligt op een cirkel, middelpunt M en een straal van $r + AB$ of $r - AB$

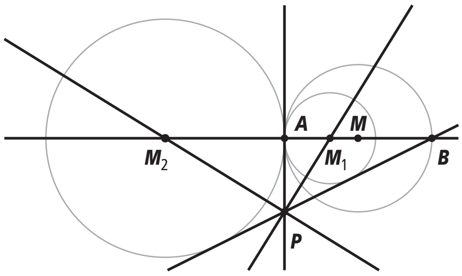
c



d lijn l is de lijn door P en Q. De lijnen door G en H, evenwijdig met l, liggen vast t.o.v. de lijn door P en Q.
Cirkel c en de cirkels met stralen $r + AB$ en $r - AB$ blijven op hun plaats.
Door l te verschuiven verandert het aantal snijpunten van de lijnen met de cirkels.

1. l en lijn G : onder cirkels geen snijpunten;
2. lijn G raakt buitenste cirkel: 1 snijpunt of middelpunt
3. lijn G snijdt buitenste cirkel: 2 snijpunten of middelpunten
4. lijn G raakt binnencirkel en lijn H raakt buitencirkel: er komen 2 snijpunten bij dus 4 snijpunten of middelpunten
5. lijn G snijdt binnencirkel en lijn H snijdt buitencirkel: 6 snijpunten of middelpunten

27



A is raakpunt, middelpunt op de lijn door A en B

BP en AP zijn raaklijnen; middelpunt ligt evenver van de raakpunten en dus raaklijnen, ligt op deellijnen van de hoek tussen lijnen AP en AB.

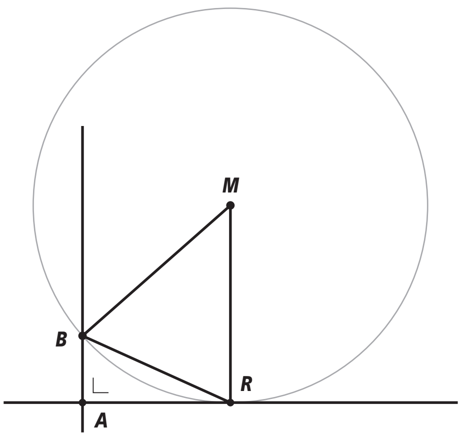
Snijpunten: M_1 en M_2 ; straal M_1A of M_2A

5.5 Gemengde opdrachten

bladzijde 148

28 Teken AC . $|AD| = |CD|$, ΔADC is gelijkbenig, dus de basishoeken zijn gelijk of $\angle DAC = \angle ACD$.
Met $\angle BAC = \angle ACD$ (Z -figuur) geeft dit $\angle DAC = \angle BAC$, dus AC is de bissectrice van $\angle A$.

29

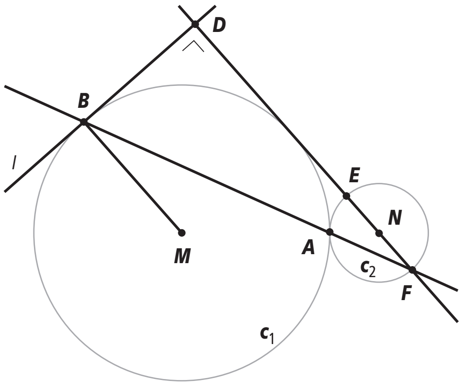


$|BM| = |MR|$ (straal cirkel) $\Rightarrow \Delta BRM$ is gelijkbenig $\Rightarrow$ basishoeken gelijk
$\Rightarrow \angle MBR = \angle MRB$

$AB \perp AR$, $MR \perp$ raaklijn $AR \Rightarrow AB \parallel MR \Rightarrow \angle ABR = \angle MRB$ (Z -figuur)

$\angle MBR = \angle MRB$ en $\angle ABR = \angle MRB \Rightarrow \angle ABR = \angle MBR$

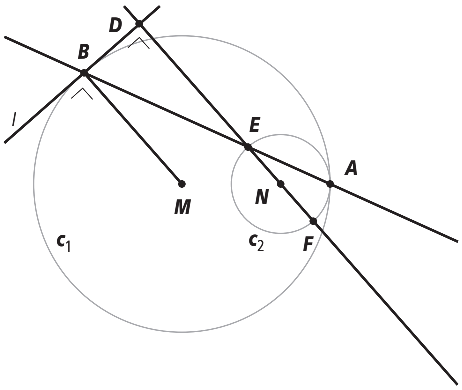
30a



b A is een gemeenschappelijk raakpunt, raaklijn staat dan loodrecht op AN en AM dus AN en AM liggen in elkaars verlengde of M, N en A liggen op een lijn.

c $|BM|=|AM|$, $\triangle BMA$ is gelijkbenig, basishoeken gelijk of $\angle MBA=\angle MAB$
$|AN|=|NF|$, $\triangle ANF$ is gelijkbenig, basishoeken gelijk of $\angle NAF=\angle NFA$
Buitenhoek van $\angle BMA=\angle MBA+\angle MAB=2\cdot\angle MAB$
Buitenhoek van $\angle BMA=\angle ENA$ ($BM \parallel NE$, F -figuur)= buitenhoek van $\angle ANF$
Buitenhoek van $\angle ANF=\angle NAF+\angle NFA=2\cdot\angle NAF$ =buitenhoek van $\angle BMA=2\cdot\angle MAB$, dus: $\angle NAF=\angle MAB$, dan is BAF een rechte lijn die gesneden wordt door de lijn MN , waarbij de overstaande hoeken $\angle NAF$ en $\angle MAB$ gelijk zijn.

d

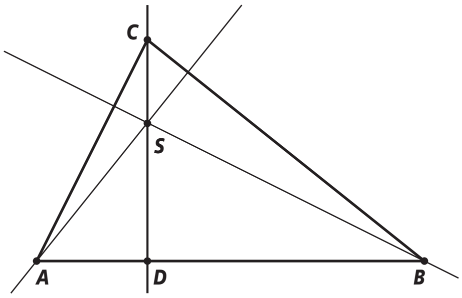


Dit geldt ook als de cirkels elkaar inwendig raken.
Beschouw nu $\triangle BMA$ en $\triangle ANE$.
$\angle EAN=\angle BAM$ dus van beide gelijkbenige driehoeken zijn de basishoeken gelijk dus $\angle MBA=\angle NEA$. $BM//EN$ dus BE en EA hebben dezelfde richting en lopen vanuit punt E in dezelfde richting of ligt E op de lijn BA .

31a $ABCD$ en $ABEC$ zijn parallellogrammen (overstaande zijden lopen evenwijdig)
Bij een parallellogram zijn de overstaande zijden gelijk: $|AB|=|DC|=|CE|$

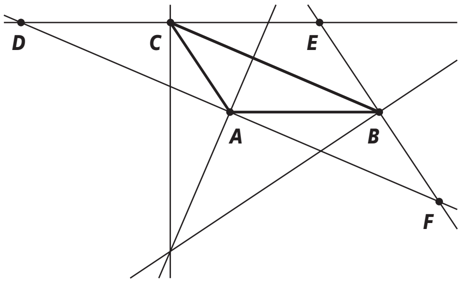
b C is het midden van DE ($|DC|=|CE|$). De hoogtelijn staat loodrecht op AB en dus op DE omdat $DE//AB$. Dus de hoogtelijn is de middelloodlijn van DE .

c



De drie hoogtelijnen van ΔABC zijn de middelloodlijnen van ΔDEF.
Er is bewezen dat de middelloodlijnen door 1 punt gaan, dit is tevens het snijpunt van de hoogtelijnen, dus de hoogtelijnen gaan ook door 1 punt.

d

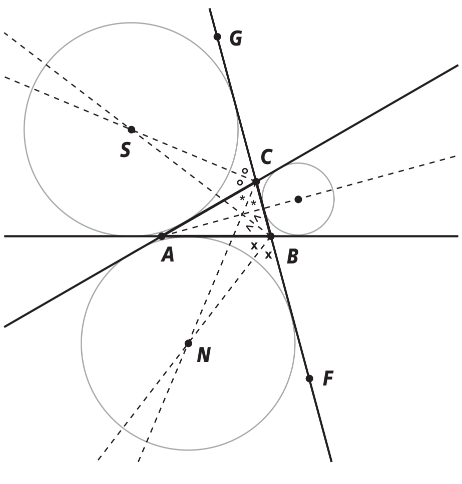


In de tekening met een stompe $\angle A$ snijden de hoogtelijnen van ΔABC elkaar in het snijpunt van de middelloodlijnen van ΔDEF.

bladzijde 149

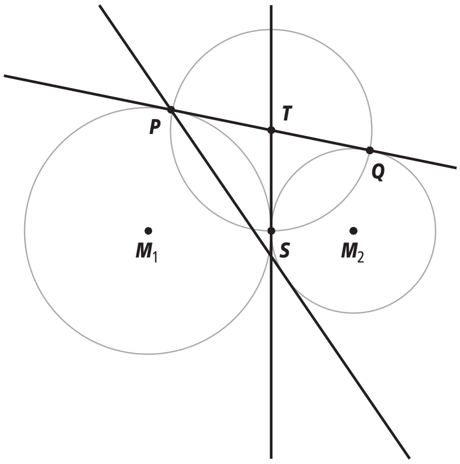
32a Het middelpunt van de aangeschreven cirkel ligt even ver van CE als BD dus op de bissectrice van $\angle A$. Het middelpunt van de ingeschreven cirkel ligt even ver van AC en AB dus op de bissectrice van $\angle A$. Beide middelpunten liggen op de bissectrice van $\angle A$, die door A gaat. A en de middelpunten liggen op 1 lijn.

b Verleng zijde CB en kies hierop een punt F.
Construeer de deellijnen van $\angle ACB$ en $\angle ABF$, deze snijden elkaar in N. De cirkel $(N, \mathrm{d}(N, AB))$ is een aangeschreven cirkel van driehoek ABC.
Verleng zijde BC en kies daarop een punt G. Construeer de deellijnen van $\angle ACB$ en $\angle ACG$, deze snijden elkaar in S. De cirkel $(S, \mathrm{d}(S, AC))$ is een aangeschreven cirkel van driehoek ABC.



33a De stralen M_1S en M_2S staan in het raakpunt S loodrecht op de raaklijn ST en liggen dus in elkaars verlengde. M_1, S en M_2 liggen op dezelfde lijn.

b

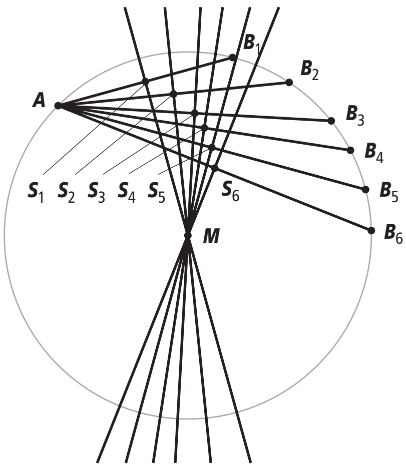


$M_1P = M_1S$, $M_1T = M_1T$, $\angle M_1PT = \angle M_1ST = 90°$, $\triangle M_1PT \cong \triangle M_1ST$(ZZH), dus $|TP| = |TS|$

$M_2S = M_2Q$, $M_2T = M_2T$, $\angle M_2ST = \angle M_2SQT = 90°$, $\triangle M_2QT \cong \triangle M_2ST$ (ZZH), dus $|TQ| = |TS|$

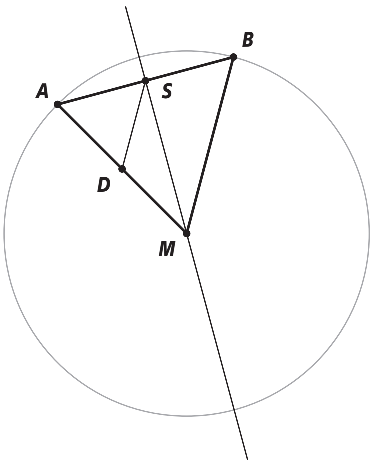
Dus $|TP| = |TS| = |TQ|$ of P, S en Q liggen op een cirkel met middelpunt T.

34a



b in M

c



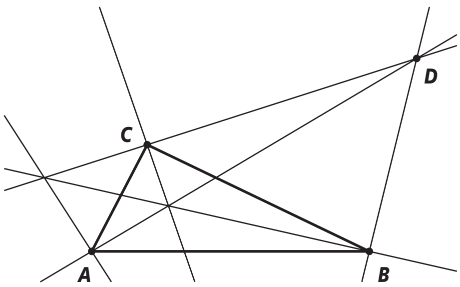
$|AS| = |BS|$, $\angle ASM = \angle BSM$, $|SM| = |SM|$, $\triangle ASM \cong \triangle BSM$ (ZHZ), dus:
$\angle DAS = \angle MBS$ omdat $DS \parallel BM$ geldt: $\angle ASD = \angle MBS$, dus $\angle ASD = \angle DAS$.
In ΔASD zijn dan twee basishoeken gelijk, dus $|AD| = |DS|$.
Als B verandert zal S veranderen, maar de afstand van S tot D blijft gelijk aan $|AD|$.
S beweegt op een cirkel met middelpunt D en straal $|AD|$.

Test jezelf

bladzijde 152

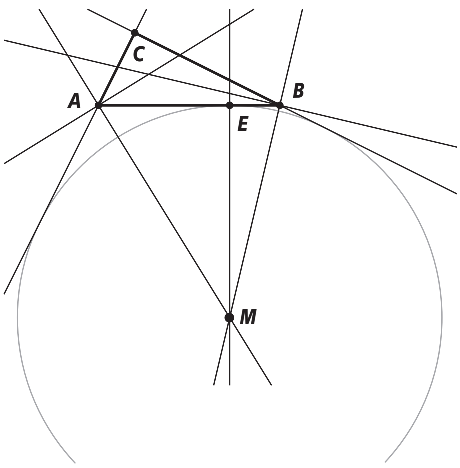
T-1 $M_1P = M_1Q$ dus M_1 ligt evenver van P als Q en ligt dus op de middelloodlijn van PQ.
$M_2P = M_2Q$ dus M_2 ligt evenver van P als Q en ligt dus op de middelloodlijn van PQ.
M_1 en M_2 zijn twee punten van de middelloodlijn, dus de lijn door M_1 en M_2 is de middelloodlijn van koorde PQ.

T-2a



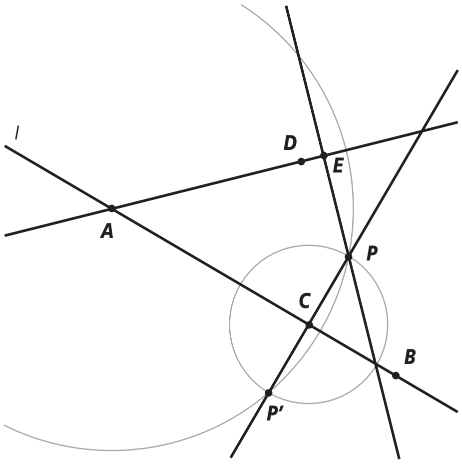
Deellijn AD van $\angle CAB$ geeft $d(D, AB) = d(D, AC)$.
Deellijn BD van buitenhoek geeft $d(D, AB) = d(D, BC)$
Dus $d(D, AB) = d(D, AC) = d(D, BC)$ en dit betekent dat D evenver van AC als BC ligt en op de deellijn van buitenhoek van C moet liggen: de deellijnen gaan door hetzelfde punt.

b



M is het snijpunt van de deellijnen van de buitenhoeken A van en B. Loodlijn vanuit M op AB: snijpunt E. Cirkel met middelpunt M en straal ME is de gevraagde cirkel.

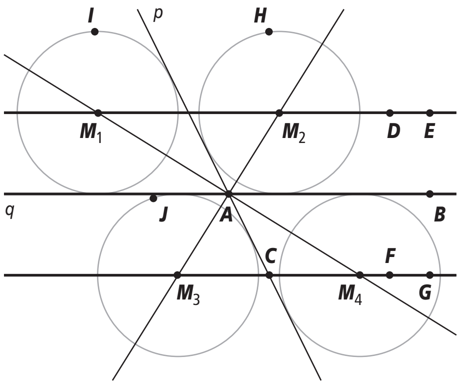
T-3a



b,c Door B en dus de lijn door A te veranderen is het spoor van de beeldpunten van P zichtbaar: bij een cirkel met middelpunt A en straal AP.

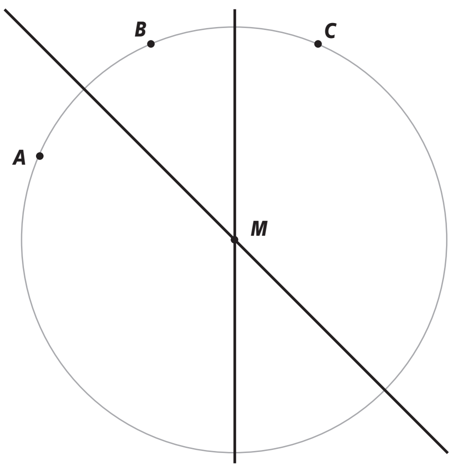
d P_1 is het spiegelbeeld van P bij spiegelen in AB. $PP \perp AC$, $|PC| = |P_1 \cdot C|$ en $|AC| = |AC| \Rightarrow \triangle APC \cong \triangle AP_1C$ (ZHZ) $\Rightarrow |AP_1| = |AP|$
Dus het beeld van P ligt op een cirkel met middelpunt A en straal AP.

T-4



q: lijn door A en B;
p: lijn door A en C.
Deellijnen van $\angle A$ tekenen.
Op een afstand van 2 van AB twee lijnen tekenen. Deze snijden de deellijnen in de middelpunten: M_1, M_2, M_3 en M_4.
Cirkels met straal 2 vanuit de middelpunten tekenen.

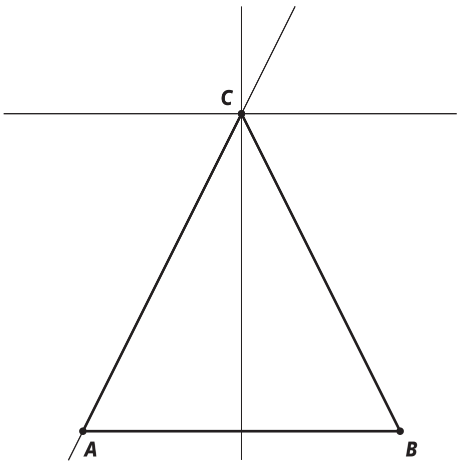
T-5a Het middelpunt van de cirkel ligt even ver van elk punt op de cirkelomtrek.



b Neen drie punten A, B en C op de cirkel. Het snijpunt van de middelloodlijnen van AB en BC is het middelpunt van de cirkel.

bladzijde 153

T-6a

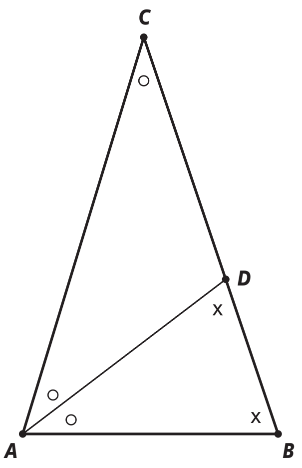


Buitenhoek van C is gelijk aan de som van de basishoeken bij A en B.
De driehoek is gelijkbenig dus de basishoeken zijn gelijk.
Dus de buitenhoek is 2 keer de basishoek. De deellijn van de buitenhoek verdeelt deze hoek in twee gelijke hoek, die weer gelijk zijn aan de basishoek.
AB maakt dan dezelfde hoek met BC als de deellijn door C, zodat (Z -figuur) de deellijn en AB evenwijdig zijn.

b Als de bissectrice van de buitenhoek van de tophoek van een driehoek evenwijdig loop met de basis is de driehoek gelijkbenig.

c buitenhoek $C = \angle A + \angle B$; $\angle B =$ helft van buitenhoek C omdat de bissectrice evenwijdig loopt met AB (Z -figuur). Maar dan is $\angle A$ de andere helft en dus gelijk aan $\angle B$.
$\triangle ABC$ is gelijkbenig (gelijke basishoeken).

T-7a

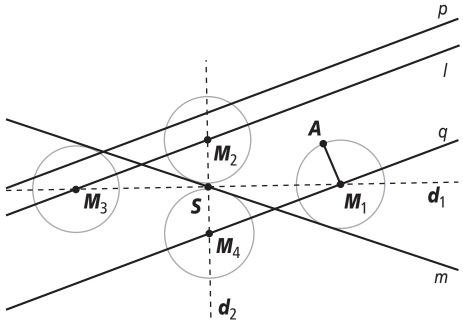


$|AD| = |AB|$ en $|CD| = |AD|$
$\triangle ADC$ en $\triangle BAD$ zijn gelijkbenig $\Rightarrow \angle CAD = \angle ACD$ en $\angle ABD = \angle ADB$
AD is een deellijn $\Rightarrow \angle DAB = \angle CAD$

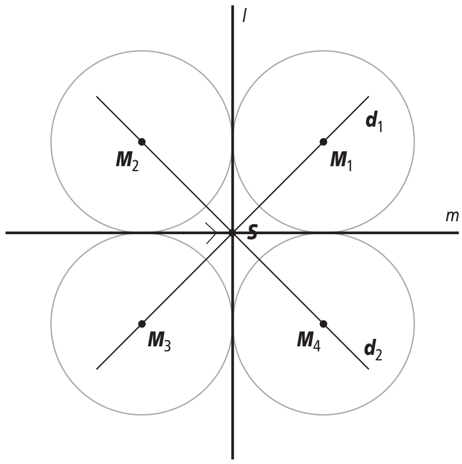
b $\angle C = 0{,}5 \cdot \angle A$, $\angle B = 180° - 1{,}5 \cdot \angle A$, $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

c Buitenhoek $D =$ som van de binnenhoeken: $\angle ADB = \angle CAD + \angle ACD = \angle A$
Buitenhoek $D = \angle B \Rightarrow \angle B = \angle A$, $\angle A + \angle B + \angle C = 180° \Rightarrow 2{,}5 \cdot \angle A = 180°$
$\Rightarrow \angle A = 72°$, $\angle B = 72°$ en $\angle C = 36°$

T-8a Construeer de deellijnen d_1 en d_2 van de hoeken van *l* en *m*.
Kies op d_1 een punt M_1 en teken de cirkel met middelpunt M_1 en straal d(M_1 , *l*).
Teken de lijnen *p* en *q* evenwijdig aan *l* zodat d(*l, p*) = d(*l, q*) =
p en *q* snijden d_1 en d_2 naast M_1 ook in M_2 , M_3 en M_4 .
Teken de andere drie cirkels met middelpunt M_2 , M_3 en M_4 en met straal d(M_1 , *l*).



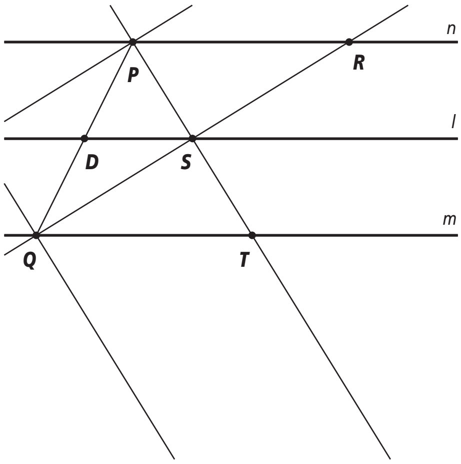
b



Indien M_1 , M_2 , M_3 en M_4 op één cirkel liggen met middelpunt *S* dan geldt:
$|M_1S| = |M_2S| = |M_3S| = |M_4S| \Rightarrow M_1, M_2, M_3$ en M_4 vormen een vierhoek waarvan de diagonalen (de deellijnen van de hoeken van *l* en *m*) elkaar loodrecht middendoor delen en evenlang zijn $\Rightarrow$ M_1 , M_2 , M_3 en M_4 vormen een vierkant $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \angle(M_1M_2,\ M_1M_4) = 90° \\ M_1M_2 \,//\, m \\ M_1M_4 \,//\, l \end{array}\right\} \Rightarrow \angle(l, m) = 90°$$

T-9a



$PR \parallel QT$. De scherpe hoek tussen PQ en PR of QT is dus hetzelfde.
In de tekening hebben deze hoeken dezelfde stand, dus de bissectrices hebben dit ook.
Per hoek staan de bissectrices (binnen- en buitenhoek) loodrecht op elkaar.
Dit geldt dan ook voor PT en QR met snijpunt S.
$\angle PQS = \angle SQT$ (deellijn), $|QS| = |QS|$, $\angle QST = 90^\circ$
$\Delta QSP \cong \Delta QST$ (HZH) is het midden van PT
Lijn DS is de middenparallel en gaat dan door het midden van PT en dus door S.
S ligt dus op de middenparallel.

T-10a De hoekpunten moeten dan even ver van het snijpunt van de diagonalen, het middelpunt, liggen.
Bij een rechthoek zijn de diagonalen even lang en delen elkaar midden door.
Het parallellogram is een rechthoek.

b Twee lijnstukken evenwijdig aan AB en evenlang als AB, verbonden door twee halve cirkels.
AB ligt in het centrum van de verzameling.