Hoofdstuk 4 - Integreren

Voorkennis: Oppervlakten

bladzijde 98

V-1a $BC = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$
Oppervlakte $ABC = \frac{3 \times 4}{2} = 6$.

b Driehoek ABC is gelijkvormig met driehoek ADB dus $\frac{AC}{BC} = \frac{AB}{BD}$ waaruit volgt dat
$\frac{5}{4} = \frac{3}{BD}$ dus $BD = \frac{3 \times 4}{5} = 2\frac{2}{5}$.

c $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{3^2 - \left(2\frac{2}{5}\right)^2} = 1\frac{4}{5}$
$CD = AC - AD = 5 - 1\frac{4}{5} = 3\frac{1}{5}$

V-2a Een gelijkzijdige driehoek heeft drie gelijke zijden.

b $CD = \sqrt{BC^2 - DB^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$

c Oppervlakte $\triangle ABC = \frac{4 \times 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93$.

V-3a $\cos\angle DCB = \frac{CD}{BC}$ dus $CD = 6 \cdot \cos 25° \approx 5{,}44$.

b $DB = 6\sin 25°$ dus $AB = 12\sin 25°$.
Oppervlakte $\triangle ABC = \frac{12\sin 25° \times 6\cos 25°}{2} = 36\sin 25° \cos 25° \approx 13{,}79$.

V-4 Oppervlakte $\triangle OAB = \frac{2 \times 4}{2} - \frac{2 \times 1}{2} = 3$.

V-5 Eerste vierhoek: oppervlakte $ABCD = 4 \times 8 + \frac{8 \times 6}{2} = 56$.
Tweede vierhoek: hoogte $= 7 \cdot \sin 40°$ dus oppervlakte
$ABCD = 10 \cdot 7\sin 40° = 70\sin 40° \approx 45{,}00$.

bladzijde 99

V-6a De hoogte van zo'n driehoek is $6 \cdot \sin 45° = 3\sqrt{2} \approx 12{,}73$.
Dus de oppervlakte van zo'n driehoek is $\frac{6 \times 3\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}$.

b Eén zo'n driehoek heeft als hoogte $6 \cdot \sin 30° = 3$.
De totale oppervlakte van de 12 driehoeken is $12 \times \frac{6 \times 3}{2} = 108$.

c De oppervlakte nadert naar de oppervlakte van de cirkel dus $\pi \cdot 6^2 \approx 113{,}10$.

V-7a $x^2 + y^2 = 5^2$ dus $y = \sqrt{25 - x^2}$

b Totale oppervlakte $= 2 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{24} + 2 \cdot 5 = 26 + 4\sqrt{24} \approx 45{,}59$.

c Totale oppervlakte $= 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot \sqrt{24} = 16 + 2\sqrt{24} \approx 25{,}80$.

d Het gemiddelde is $21 + 3\sqrt{24} \approx 35{,}70$.

e Totale oppervlakte rode rechthoekjes
$= 2 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{21} + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{24} + 2 \cdot 1 \cdot 5 = 24 + 2\sqrt{21} + 2\sqrt{24} \approx 42{,}96$.
Totale oppervlakte groene rechthoekjes
$= 2 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{21} + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{24} = 14 + 2\sqrt{21} + 2\sqrt{24} \approx 32{,}96$.
Het gemiddelde is $19 + 2\sqrt{21} + 2\sqrt{24} \approx 37{,}96$.

© Noordhoff Uitgevers bv

f Oppervlakte halve cirkel $= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 5^2 = 12\frac{1}{2}\pi \approx 39,27$.
De benadering is te verbeteren door meer rechthoekjes te nemen.

4.1 Oppervlakten benaderen

bladzijde 100

1a Oppervlakte groene vierhoek $= 4 \times 1 + \dfrac{4 \times 2}{2} = 8$.

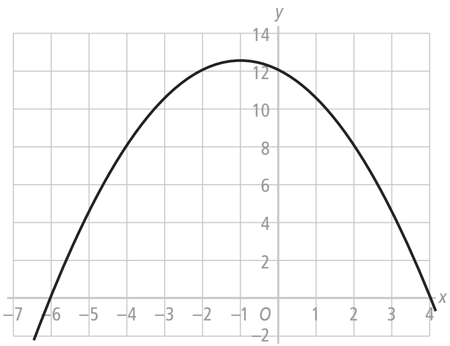
b Je kunt de oppervlakte benaderen door het aantal hokjes te tellen. De oppervlakte zal naar schatting $11\frac{1}{4}$ zijn.

2 Ondersom $= \frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 + 8 = 15\frac{1}{2}$.

Bovensom $= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$.

Het gemiddelde is $\dfrac{15\frac{1}{2} + 31}{2} = 23\frac{1}{4}$.

3a $-\frac{1}{2}x^2 - x + 12 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 24 = 0 \Rightarrow (x+6)(x-4) = 0 \Rightarrow x + 6 = 0$ of $x - 4 = 0 \Rightarrow$
$x = -6$ of $x = 4$



b Bovensom $= f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 12 + 10\frac{1}{2} + 8 + 4\frac{1}{2} = 35$.
Ondersom $= f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 10\frac{1}{2} + 8 + 4\frac{1}{2} + 0 = 23$.
Een benadering voor de oppervlakte is $\frac{35+23}{2} = 29$.

c Bovensom $= \frac{1}{2}\left(f(0) + f(\frac{1}{2}) + ... + f(3\frac{1}{2})\right) = \frac{1}{2}(12 + 11,375 + ... + 2,375) = 32,25$.

Ondersom $= \frac{1}{2}\left(f(\frac{1}{2}) + f(1) + ... + f(4) + \right) = \frac{1}{2}(11,375 + 10,5 + ... + 0) = 26,25$.

Een benadering voor de oppervlakte is $\dfrac{32,25 + 26,25}{2} = 29,25$.

bladzijde 101

4a De grafiek vertoont afnemende stijging waardoor je bij de ondersom meer tekort komt dan er bij de bovensom bijkomt.

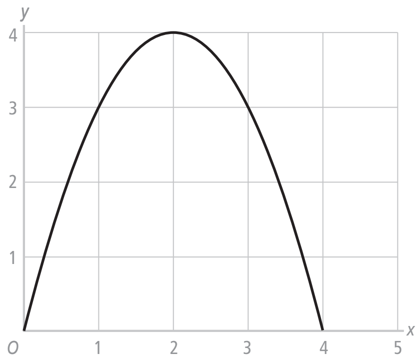
b De ondersom is $2h(1) + 2h(3) + 2h(5) + 2h(7) \approx 15,23$.

De bovensom is $2h(3) + 2h(5) + 2h(7) + 2h(9) \approx 19,23$.

De oppervlakte is bij benadering $\dfrac{15,23 + 19,23}{2} \approx 17,23$.

© Noordhoff Uitgevers bv

5a



b $\sum_{k=1}^{4} f\left(x_k\right)\cdot\Delta x = f\left(\tfrac{1}{2}\right)+f\left(1\tfrac{1}{2}\right)+f\left(2\tfrac{1}{2}\right)+f\left(3\tfrac{1}{2}\right)=11$

6a De middens van de intervallen zijn te schrijven als $1,5+k$ met k achtereenvolgens 0, 1, 2, 3 en 4. Verder is de breedte van elke rechthoek 1.

b $\log 1\tfrac{1}{2}+\log 2\tfrac{1}{2}+\log 3\tfrac{1}{2}+\log 4\tfrac{1}{2}+\log 5\tfrac{1}{2}\approx 2,51$.

7 $\sum_{k=0}^{8} 3\sqrt{\tfrac{1}{2}+k} = 3\sqrt{\tfrac{1}{2}}+3\sqrt{1\tfrac{1}{2}}+3\sqrt{2\tfrac{1}{2}}+3\sqrt{3\tfrac{1}{2}}+3\sqrt{4\tfrac{1}{2}}+3\sqrt{5\tfrac{1}{2}}+3\sqrt{6\tfrac{1}{2}}+3\sqrt{7\tfrac{1}{2}}+3\sqrt{8\tfrac{1}{2}}\approx 54,16.$

4.2 Integralen

bladzijde 102

8ab Hoe kleiner het deelinterval des te kleiner de afwijking met de grafiek des te nauwkeuriger de oppervlakte benaderd wordt. Dit geldt voor zowel de ondersom als de bovensom.

9 Casio: RUN-OPTN-CALC- $\int dx$ -1: $(x^2+1), -1, 1)$ -EXE
TI: $y1 = 1/(x^2+1)$ -GRAPH-CALC- $\int f\left(x\right)dx \cdot -1,1$ - ENTER
geeft 1,57 als oppervlakte.

10a	8,67	**c**	1
b	3,10	**d**	14

bladzijde 103

11a $\int_0^1 3x^2\mathrm{d}x = 1$; $\int_1^3 3x^2\mathrm{d}x = 26$ en $\int_0^3 3x^2\mathrm{d}x = 27$.

b De oppervlakte onder de grafiek van $f\left(x\right)=3x^2$ op interval $\left[0,\,1\right]$ plus de oppervlakte onder de grafiek op interval $\left[1,\,3\right]$ is samen de oppervlakte onder de grafiek op interval $\left[0,\,3\right]$.

© Noordhoff Uitgevers bv

12a $\int_0^2 x\sqrt{x}\,dx \approx 2,26$; $\int_0^2 3x\sqrt{x}\,dx \approx 6,79$.

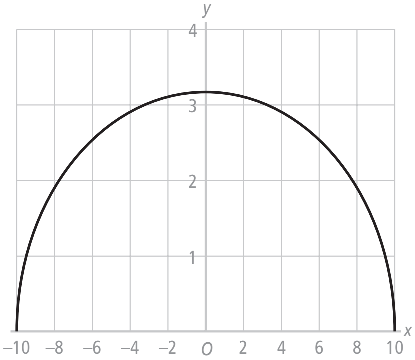
b De functiewaarde is steeds drie keer zo groot waardoor de oppervlakte ook drie keer zo groot is.

13a $\int_1^3 2x\,dx = 8$; $\int_1^3 x^2\,dx = 8,67$ en $\int_1^3 (2x + x^2)\,dx = 16,67$.

b $\int_1^3 2x\,dx + \int_1^3 x^2\,dx = \int_1^3 \left(2x + x^2\right)dx$.

14a $10 - 0,1x^2 \geq 0$ als $x^2 \leq 100$ dus $-10 \leq x \leq 10$. Domein $= \left[-10, 10\right]$.

b



c $\int_{-10}^{10} \sqrt{10 - 0,1x^2}\,dx \approx 49,67$

15a $\int_{-2}^{0} \left(x+2\right)^2 dx + \int_0^2 \left(x-2\right)^2 dx = 2\tfrac{2}{3} + 2\tfrac{2}{3} = 5\tfrac{1}{3}$

b $\int_{-2}^{0} \left(4-x\right)^2 dx - \int_{-2}^{0} \left(x+2\right)^2 dx = 5\tfrac{1}{3} - 2\tfrac{2}{3} = 2\tfrac{2}{3}$

16a $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$; $\int_\pi^{2\pi} \sin x\,dx = -2$

b Omdat van 0 tot π de oppervlakte boven de x-as net zo groot is als de oppervlakte van π tot 2π onder de x-as, heffen deze elkaar op.
De oppervlakte van π tot 2π is 2 maar omdat het onder de x-as ligt geeft de rekenmachine het antwoord –2.

4.3 Hoofdstelling

bladzijde 104

17a $A\left(2\right) = \frac{2\times1}{2} = 1$; $B\left(3\right) = 3 + \frac{3\times1\frac{1}{2}}{2} = 5\frac{1}{4}$; $C\left(4\right) = 4\times1\frac{2}{3} + \frac{4\times1\frac{1}{3}}{2} = 9\frac{1}{3}$

© Noordhoff Uitgevers bv

b $f(x)=\frac{1}{2}x \Rightarrow A(x)=\dfrac{x\cdot\frac{1}{2}x}{2}=\frac{1}{4}x^2$

$g(x)=\frac{1}{2}x+1 \Rightarrow B(x)=1\cdot x+\dfrac{\left(g(x)-1\right)\cdot x}{2}=x+\dfrac{\left(\frac{1}{2}x\right)\cdot x}{2}=x+\frac{1}{4}x^2$

$h(x)=3-\frac{1}{3}x \Rightarrow C(x)=x\cdot h(x)+\dfrac{\left(3-h(x)\right)\cdot x}{2}=x\left(3-\frac{1}{3}x\right)+\dfrac{\frac{1}{3}x\cdot x}{2}=3x-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}x^2=$ $3x-\frac{1}{6}x^2$.

c $f(x)=\frac{1}{2}x$; $g(x)=1+\frac{1}{2}x$; $h(x)=3-\frac{1}{3}x$

d $A'(x)=f(x)$

e $B'(x)=g(x)$; $C'(x)=h(x)$

18a $F(a+h)$ is de oppervlakte onder de grafiek van *f* van 0 tot *a*+*h*.
$F(a)$ is de oppervlakte onder de grafiek van *f* van 0 tot *a*.
Trek je deze van elkaar af dan houd je dus de oppervlakte onder de grafiek van *f* van *a* tot *a*+*h* over.

b De bedoelde oppervlakte is groter dan een rechthoek met breedte *h* en hoogte $f(a)$ en kleiner dan een rechthoek met breedte *h* en hoogte $f(a+h)$.

c $\dfrac{F(a+h)-F(a)}{h}$ nadert naar $F'(a)$ als *h* nadert naar 0 en daarom geldt $F'(a)=f(a)$.

bladzijde 105

19a $F'(a)=f(a)=\frac{1}{2}a^2$ dus $F(a)=\frac{1}{6}a^3$ en $F(0)=0$.

b $\int_1^3 f(x)\,dx=\int_0^3 f(x)\,dx-\int_0^1 f(x)\,dx=F(3)-F(1)$.

c $\int_1^3\left(\frac{1}{2}x^2\right)dx=F(3)-F(1)=\frac{1}{6}\cdot 3^3-\frac{1}{6}\cdot 1^3=4\frac{1}{3}$.

20a $F(x)=\frac{3}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2$

b $G(x)=-\frac{1}{6}x^5-1\frac{1}{2}x^2$

c $K(x)=5x$

d $L(x)=\frac{3}{16}x^4-\frac{4}{9}x^3$

21a $F_1'(x)=3x^2+6x+3$ en $F_2'(x)=3(x+1)^2=3\left(x^2+2x+1\right)=3x^2+6x+3$.

b $F_2(x)=x^3+3x^2+3x+1$ en $F_1(x)=x^3+3x^2+3x$ dus $F_2(x)-F_1(x)=1$.

c $\int_1^3 f(x)\,dx=\left[x^3+3x^2+3x\right]_1^3=(27+27+9)-(1+3+3)=56$;

$\int_1^3 f(x)\,dx=\left[(x+1)^3\right]_1^3=64-8=56$.

d De constante valt door de bewerking $F_2(3)-F_2(1)$ weg.

22a $g'(x)=\frac{1}{2}(2x-3)^2\cdot 2=(2x-3)^2=f(x)$
$h'(x)=4x^2-12x+9=(2x-3)^2=f(x)$

b $g(x)=\frac{1}{6}(2x-3)(2x-3)(2x-3)=\frac{4}{3}x^3-6x^2+9x-4\frac{1}{2}=h(x)-8\frac{1}{2}$ dus $C=-8\frac{1}{2}$.

c $k(x)=\frac{4}{3}x^3-6x^2+9x+C$ is een primitieve functie van *f* voor elke *C*.

© Noordhoff Uitgevers bv

4.4 Primitiveren

bladzijde 106

23a $F(x)=x^2+C$

b $g(x)=x^{-2}$ dus $G(x)=-x^{-1}+C=-\dfrac{1}{x}+C$

c $h(x)=2x^{\frac{1}{2}}$ dus $H(x)=\frac{2}{1\frac{1}{2}}x^{1\frac{1}{2}}+C=\frac{4}{3}x\sqrt{x}+C$

24a $F'(x)=8\cdot\frac{1}{8}\cdot x^{8-1}=x^7=f(x)$

b $G(x)=\frac{1}{10}x^{10}$; $H(x)=-\frac{1}{2}x^{-2}$; $K(x)=\frac{1}{1\frac{2}{3}}x^{1\frac{2}{3}}=\frac{3}{5}x^{1\frac{2}{3}}$

25 Voor $a=-1$ geldt $F(x)=\frac{1}{0}x^0+C$ en dat bestaat niet.

26a $F(x)=\frac{3}{5}x^5-x^4+C$

b $g(x)=2x^2+3x^{-4}$ dus $G(x)=\frac{2}{3}x^3-x^{-3}+C=\frac{2}{3}x^3-\dfrac{1}{x^3}+C$

c $h(x)=x^2\cdot x^{\frac{1}{2}}=x^{2\frac{1}{2}}$ dus $H(x)=\frac{1}{3\frac{1}{2}}x^{3\frac{1}{2}}+c=\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}+C$

d $k(x)=x-2+x^{-2}$ dus $K(x)=\frac{1}{2}x^2-2x-x^{-1}+C=\frac{1}{2}x^2-2x-\dfrac{1}{x}+C$

27a $\int_2^4(x^3-5x)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4-2\frac{1}{2}x^2\right]_2^4=(64-40)-(4-10)=30$

b $\int_{-2}^2(2x^2-3)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^3-3x\right]_{-2}^2=(5\frac{1}{3}-6)-(-5\frac{1}{3}+6)=-1\frac{1}{3}$

c $\int_1^4\left(\frac{4}{3x^3}+\frac{3}{x^2}\right)dx=\int_1^4\left(\frac{4}{3}x^{-3}+3x^{-2}\right)dx=\left[-\frac{2}{3}x^{-2}-3x^{-1}\right]_1^4$

$=\left[-\frac{2}{3x^2}-\frac{3}{x}\right]_1^4=(-\frac{2}{48}-\frac{3}{4})-(-\frac{2}{3}-3)=2\frac{7}{8}$

d $\int_1^4(3x\sqrt{x}+2\sqrt{x})\,dx=\int_1^4\left(3x^{1\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}\right)dx=\left[\frac{3}{2\frac{1}{2}}x^{2\frac{1}{2}}+\frac{2}{1\frac{1}{2}}x^{1\frac{1}{2}}\right]_1^4$

$=\left[1\frac{1}{5}x^2\sqrt{x}+1\frac{1}{3}x\sqrt{x}\right]_1^4=(38\frac{2}{5}+10\frac{2}{3})-(1\frac{1}{5}+1\frac{1}{3})=46\frac{8}{15}$

bladzijde 107

28a $\int_0^{25}\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{1}{1\frac{1}{2}}x^{1\frac{1}{2}}\right]_0^{25}=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^{25}=83\frac{1}{3}$

b $A(p)=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^p=\frac{2}{3}p\sqrt{p}$

c $\frac{2}{3}p^{1\frac{1}{2}}=18$ geeft $p^{1\frac{1}{2}}=27$ dus $p=27^{\left(\frac{1}{1\frac{1}{2}}\right)}=9$

29a $g(x)=8x^3$ dus $G(x)=2x^4+C$

b $H(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^4+C$

c $k(x)=\frac{1}{5}(x-2)^{-3}$ dus $K(x)=\frac{1}{10}(x-2)^{-2}+C=\dfrac{1}{10(x-2)^2}+C$

© Noordhoff Uitgevers bv

30a Ze moet rekening houden met de kettingregel.

b $G'(x) = 2\frac{1}{2}a(3x-4)^{1\frac{1}{2}} \cdot 3 = 7\frac{1}{2}a(3x-4)^{1\frac{1}{2}}$

c $G'(x) = g(x)$ als $7\frac{1}{2}a = 1$ dus $a = \frac{1}{7\frac{1}{2}} = \frac{2}{15}$

d $G(x) = \frac{2}{15}(3x-4)^{2\frac{1}{2}} + C$

31a $f(x) = 4(x+2)^{-3}$

1 Kies $F(x) = a(x+2)^{-2}$

2 $F'(x) = -2a(x+2)^{-3}$

3 $-2a = 4$ dus $a = -2$

$F(x) = -2(x+2)^{-2} + C = -\frac{2}{(x+2)^2} + C$

b $g(x) = \left(\frac{1}{2}x+7\right)^4$

1 Kies $G(x) = a\left(\frac{1}{2}x+7\right)^5$.

2 $G'(x) = 5a\left(\frac{1}{2}x+7\right)^4 \cdot \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}a\left(\frac{1}{2}x+7\right)^4$

3 $2\frac{1}{2}a = 1$ dus $a = \frac{1}{2\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$

$G(x) = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}x+7\right)^5 + C$

c $h(x) = -2(2x+3)^{-5}$

1 Kies $H(x) = a(2x+3)^{-4}$

2 $H'(x) = -4a(2x+3)^{-5} \cdot 2 = -8a(2x+3)^{-5}$

3 $-8a = -2$ dus $a = \frac{1}{4}$

$H(x) = \frac{1}{4}(2x+3)^{-4} + C = \frac{1}{4(2x+3)^4} + C$

d $k(x) = (3x+5)^{\frac{1}{2}}$

1 Kies $K(x) = a(3x+5)^{1\frac{1}{2}}$

2 $K'(x) = 1\frac{1}{2}a(3x+5)^{\frac{1}{2}} \cdot 3 = 4\frac{1}{2}a(3x+5)^{\frac{1}{2}}$

3 $4\frac{1}{2}a = 1$ dus $a = \frac{1}{4\frac{1}{2}} = \frac{2}{9}$

$K(x) = \frac{2}{9}(3x+5)^{1\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{9}(3x+5)\sqrt{3x+5} + C$

32a $\sqrt{px} - px = 0 \Rightarrow \sqrt{px} = px \Rightarrow px = p^2x^2 \Rightarrow p^2x^2 - px = 0 \Rightarrow px(px-1) = 0 \Rightarrow px = 0$
of $px - 1 = 0 \Rightarrow$
$x = 0$ of $px = 1 \Rightarrow x = 0$ of $x = \dfrac{1}{p}$

b $\int_0^{\frac{1}{p}} \left(\sqrt{px} - px\right) dx = \int_0^{\frac{1}{p}} \left(p^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} - px\right) dx = \left[p^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{3}x^{1\frac{1}{2}} - p \cdot \frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{p}} =$

$p^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{3}p^{-1\frac{1}{2}} - p \cdot \frac{1}{2}p^{-2} = \frac{2}{3}p^{-1} - \frac{1}{2}p^{-1} = \frac{1}{6}p^{-1} = 10$ geeft $p^{-1} = 60$ dus $p = \frac{1}{60}$

© Noordhoff Uitgevers bv

4.5 Integraal en oppervlakte

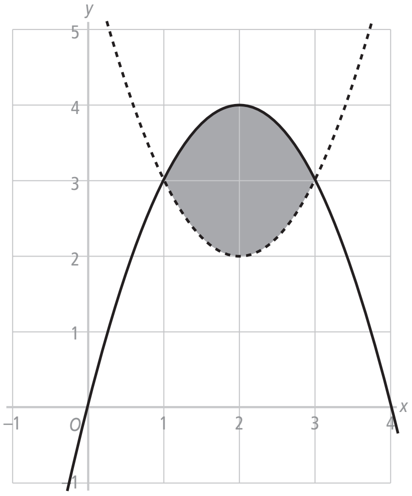
bladzijde 108

33a $\int_0^4 \left(0{,}3x^3 - 1{,}2x^2 - 0{,}6x - 2{,}4\right)\mathrm{d}x = \left[0{,}075x^4 - 0{,}4x^3 - 0{,}3x^2 - 2{,}4x\right]_0^4 = -20\tfrac{4}{5}$

De oppervlakte kan natuurlijk niet negatief zijn.

b De oppervlakte is $20\tfrac{4}{5}$.

34a



b $x^2 - 4x + 6 = -x^2 + 4x \Rightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow$

$x = 1$ of $x = 3$

$f(1) = 3$ en $f(3) = 3$ dus de snijpunten zijn $(1, 3)$ en $(3, 3)$

c $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 6x\right]_1^3 = (9 - 18 + 18) - \left(\tfrac{1}{3} - 2 + 6\right) = 4\tfrac{2}{3}$

$\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\tfrac{1}{3}x^3 + 2x^2\right]_1^3 = (-9 + 18) - \left(-\tfrac{1}{3} + 2\right) = 7\tfrac{1}{3}$

$g(x) - f(x)$ is steeds de afstand van f tot g dus de oppervlakte van het gearceerde gebied is $7\tfrac{1}{3} - 4\tfrac{2}{3} = 2\tfrac{2}{3}$

bladzijde 109

35a $\int_{-1}^{2} \left(\left(x^3 - 4x\right) - \left(-x^3 + 2x^2\right)\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2}\left(2x^3 - 2x^2 - 4x\right)\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 - 2x^2\right]_{-1}^{2}$

$= \left(8 - 5\tfrac{1}{3} - 8\right) - \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3} - 2\right) = -4\tfrac{1}{2}$

b Het deel onder de x-as wordt op deze manier als een negatieve waarde weergegeven.

c $\int_{-1}^{0} \left(f(x) - g(x)\right)\mathrm{d}x + \int_0^2 \left(g(x) - f(x)\right)\mathrm{d}x$

$= \left[\tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 - 2x^2\right]_{-1}^{0} + \left[-\tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{2}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^2 = \tfrac{5}{6} + 5\tfrac{1}{3} = 6\tfrac{1}{6}$

© Noordhoff Uitgevers bv

36a $f(1)=g(1)=-2$ en $f(2)=g(2)=1$

b Tussen $x=1$ en $x=2$ ligt de grafiek van g hoger dan de grafiek van f dus de gevraagde integraal is $\int_1^2\left(\left(2-\frac{4}{x^2}\right)-(3x-5)\right)dx$.

c $\int_1^2\left(\left(2-\frac{4}{x^2}\right)-(3x-5)\right)dx=\left[2x+\frac{4}{x}-1\frac{1}{2}x^2+5x\right]_1^2=(4+2-6+10)-(2+4-1\frac{1}{2}+5)=\frac{1}{2}$

37a Eerst de snijpunten berekenen
$(x+2)^3=4(x+2)\Rightarrow(x+2)^2=4$ of $x+2=0\Rightarrow x+2=-2$ of $x+2=2$ of $x+2=0\Rightarrow$
$x=-4$ of $x=0$ of $x=-2$
De totale oppervlakte van de twee vlakdelen is $\int_{-4}^{-2}(f(x)-g(x))dx+\int_{-2}^{0}(g(x))-f(x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}(x+2)^4-(2x^2+8x)\right]_{-4}^{-2}+\left[(2x^2+8x)-\frac{1}{4}(x+2)^4\right]_{-2}^{0}=(8-4)+(-4-(-8))=4+4=8$

b $\int_{-2}^{0}f(x)dx=\left[\frac{1}{4}(x+2)^4\right]_{-2}^{0}=4$

c Het eerste deel van de oppervlakte is de oppervlakte begrensd door de grafieken van f en g tussen de grenzen $x=0$ en $x=2$. Het tweede deel van de oppervlakte is die van een driehoek begrensd door de lijnen $x=2$, $y=64$ en $y=8+4x$.
De oppervlakte is dus:

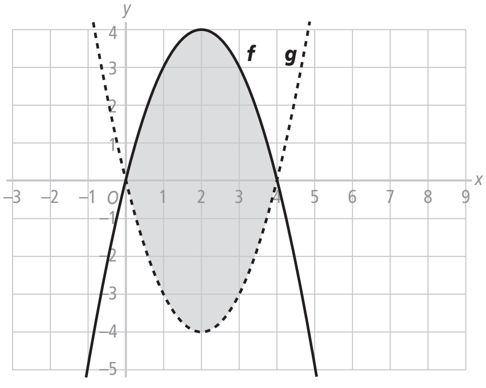
$\int_0^2(f(x)-g(x))dx+\int_2^{14}(64-(8+4x))dx=\left[\frac{1}{4}(x+2)^4-(2x^2+8x)\right]_0^2+\left[56x-2x^2\right]_2^{14}$

$=(40-4)+(392-104)=324$

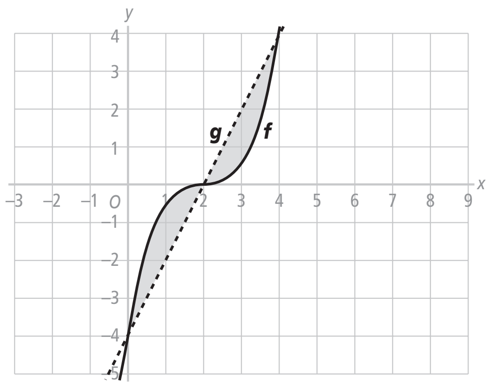
d Alleen op het interval $[0,2]$ wordt het gebied ingesloten door de grafieken van f en g, kortom het zijn verschillende integralen over verschillende gebieden en dat kun je niet integreren over één gebied.

38 $\int_0^1(0-f(x))dx=\int_0^1(-x^2+1)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$
Dus moet gelden $\int_1^0(x^2-1)dx=\frac{2}{3}$.
$\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^a=\left(\frac{1}{3}a^3-a\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)=\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}a^3-a=0\Rightarrow a\left(\frac{1}{3}a^2-1\right)=0\Rightarrow a=0$ of $\frac{1}{3}a^2-1=0\Rightarrow a=0$ of $a=-\sqrt{3}$ of $a=\sqrt{3}$
a is positief dus als $a=\sqrt{3}$ hebben de twee gebieden dezelfde oppervlakte.

39a Kies bijvoorbeeld $f(x)=-x^2+4x$ en $g(x)=x^2-4x$.



b Kies bijvoorbeeld $f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^3$ en $g(x)=2x-4$.



4.6 Gemengde opdrachten

bladzijde 110

40a $\int_0^5 9{,}8t\,\mathrm{d}t=\left[4{,}9t^2\right]_0^5=122{,}5$ m

b Na 5 seconden is haar snelheid $v(5)=49$ m/s.
6 seconden later is haar snelheid 4 m/s dus na het openen van de parachute neemt de valsnelheid af met $\frac{49-4}{6}=7{,}5$ m/s^2.

c $v(t)=-7{,}5t+b\ (5,\ 49)$
$49=-7{,}5\times5+b$ dus $b=86{,}5$
$v(t)=-7{,}5t+86{,}5$ voor $5\le t\le11$

d $\int_5^{11}(-7{,}5t+86{,}5)\mathrm{d}t=\left[-3{,}75t^2+86{,}5t\right]_5^{11}=497{,}75-338{,}75=159$ m

e De laatste 70 seconden legt ze nog $70\times4=280$ m af. Ze sprong dus van een hoogte van $122{,}5+159+280=561{,}5$ m uit het vliegtuig.

41a Eerst moet je de snijpunten met de x-as weten:
$-x^2+x=0$
$x(-x+1)=0$
$x=0$ of $x=1$
Dan $\int_0^1(-x^2+x)\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

b $\int_0^b(-x^2+x)\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}bx^2\right]_0^b=-\frac{1}{3}b^3+\frac{1}{2}b^3=\frac{1}{6}b^3=36$ geeft $b^3=216$ dus
$b=\sqrt[3]{216}=6$

c De raaklijn in $(0,\ 0)$ heeft helling $f'(0)=b$.
De raaklijn in $(0,\ 0)$ is dus van de vorm $y=bx$.
De x-coördinaat van punt C is $\frac{1}{2}b$ en de bijbehorende y-coördinaat is dan
$y=b\cdot\frac{1}{2}b=\frac{1}{2}b^2$.
De oppervlakte van $\triangle ABC$ is $\frac{1}{2}\cdot AB\cdot hoogte=\frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{1}{2}b^2=\frac{1}{4}b^3$.
De oppervlakte onder de parabool is $\frac{1}{6}b^3$ (zie opdracht b).
De oppervlakte van de twee gebieden verhouden zich dan als $\frac{1}{6}b^3$ tot
$\frac{1}{4}b^3-\frac{1}{6}b^3=\frac{1}{12}b^3$ dus als 2 staat tot 1.

© Noordhoff Uitgevers bv

d De driehoek is gelijkzijdig als $AC = BC = AB = b$.
Volgens de stelling van Pythagoras moet gelden:
$\left(\frac{1}{2}b\right)^2 + \left(\frac{1}{2}b^2\right)^2 = AC^2 = b^2$
$\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}b^4 = b^2$
$-\frac{3}{4}b^2 + \frac{1}{4}b^4 = 0$
$\frac{1}{4}b^2\left(-3 + b^2\right) = 0$
$b = 0$ of $b = -\sqrt{3}$ of $b = \sqrt{3}$
Als $b = \sqrt{3}$ is $\triangle ABC$ gelijkzijdig.

bladzijde 111

42a $f'(x) = 1\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1\frac{1}{2}}{\sqrt{x}}$ dus $f'(4) = \frac{3}{4}$
$g(x) = \frac{3}{4}x + b$ $(4,\ 6)$ geeft $6 = \frac{3}{4} \times 4 + b$ dus $b = 3$
$g(x) = \frac{3}{4}x + 3$

b $F(x) = 2x^{1\frac{1}{2}} = 2x\sqrt{x}$

c $\int_0^4 \left(g(x) - f(x)\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{8}x^2 + 3x - 2x\sqrt{x}\right]_0^4 = 6 + 12 - 16 = 2$

43a In één uur ontstaat een cilinder van $3600 \times 2 = 7200$ meter hoogte.
De inhoud van deze cilinder $= \pi \cdot r^2 \cdot hoogte = \pi \cdot 0{,}012^2 \cdot 7200 = 3{,}257$ m^3 =3257 liter.
Er stroomt 3257 liter water per uur door deze buis.

b Per seconde ontstaat een cilinder van 2 meter hoogte en straal R.
De inhoud van deze cilinder is $\pi \cdot R^2 \cdot 2 = 2\pi \cdot R^2$ m^3 $= 2000\pi R^2$ liter.
De stroomsnelheid is 2000 R^2 liter/s.

c Heel dicht bij de wand geldt $r^2 \approx R^2$ dus $v \approx 0$. De snelheid is dus bijna nul.

d $2\pi \int_0^{0{,}012} 2r\mathrm{d}r = 2\pi\left[r^2\right]_0^{0{,}012} = 2\pi \cdot 0{,}012^2$ m^3/s
Door dit met 3600 te vermenigvuldigen krijg je inderdaad de 3257 liter uit opdracht a.

e $v = k\left(R^2 - r^2\right)$ met $v = 2$, $R = 0{,}012$ en $r = 0$ dus $2 = k \cdot 0{,}012^2$ geeft $k = \frac{2}{0{,}012^2}$

$2\pi\int_0^R k\left(R^2 - r^2\right)r\mathrm{d}r = 2\pi \cdot \frac{2}{0{,}012^2}\int_0^{0{,}012}\left(0{,}012^2 \cdot r - r^3\right)\mathrm{d}r = \frac{4\pi}{0{,}012^2}\left[\frac{1}{2} \cdot 0{,}012^2 \cdot r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_0^{0{,}012}$

$= \frac{4\pi}{0{,}012^2} \cdot 5{,}184 \cdot 10^{-9} \approx 4{,}524 \cdot 10^{-4}$ m^3/sec $\approx 0{,}45$ liter per seconde

f $2\pi\int_0^R k\left(R^2 - r^2\right)r\mathrm{d}r = 2\pi k\int_0^R\left(rR^2 - r^3\right)\mathrm{d}r = 2\pi k\left[\frac{1}{2}r^2R^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_0^R = \frac{1}{2}\pi kR^4 = c \cdot R^4$ dus

evenredig met de vierde macht van de straal van de buis.

ICT Oppervlakten benaderen

bladzijde 112

I-1a Je kunt de oppervlakte splitsen in een rechthoek van 3 bij 1 en een driehoek met basis 3 en hoogte $1\frac{1}{2}$. De oppervlakte wordt dan $3 \times 1 + \frac{1}{2} \times 3 \times 1\frac{1}{2} = 5\frac{1}{4}$.

b Als je de stapgrootte 1 kiest krijg je als oppervlakte 6. Deze oppervlakte is te groot omdat elke rechthoek boven de lijn uitkomt.
Met de methode Rechts krijg je 4,5 en dat is te weinig.

c Wat er bij methode Links teveel is, kom je bij methode Rechts tekort.

I-2a Met de methode Links is de oppervlakte 15,5.

b Met de methode Rechts is de oppervlakte 31.

c Bij een stapgrootte van 0,5 krijg je bij methode Links 18,71016 en bij methode Rechts 26,46016.
Een benadering voor de oppervlakte is dan $\frac{18{,}71016+26{,}46016}{2} \approx 22{,}59$.

I-3 Met stapgrootte 1 krijg je met methode Links 29,306 en met methode Rechts 32,46828. Het gemiddelde is 30,88714. Dit is natuurlijk de beste benadering omdat bij methode Links elke rechthoek te klein is en bij methode Rechts is elke rechthoek te groot.

bladzijde 113

I-4a Kies bijvoorbeeld 100 stappen. De oppervlakte is dan ongeveer 10,7.

b De oppervlakte is ongeveer 10,67.

I-5a De oppervlakte op het interval $\left[0, 6\right]$ is ongeveer 10.

b Op elk interval wordt een willekeurige hoogte gekozen. De benadering wordt beter naarmate je de stapgrootte kleiner neemt.

I-6 $\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \approx 1{,}89$. Neem voor de stapgrootte bijvoorbeeld 0,001.

I-7 Kijk bijvoorbeeld naar opdracht I-4a.
Als je daar $\int_0^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ uitrekent komt er een negatief getal uit en dat kan dus nooit de oppervlakte zijn.

I-8a $\int_1^3 x^2\mathrm{d}x \approx 8{,}7$; $\int_0^3 x^2\mathrm{d}x = 9$; $\int_1^4 x^2\mathrm{d}x = 21$

Deze stellen allemaal een oppervlakte voor.

b $\int_1^3 \left(9-x^2\right)\mathrm{d}x = 9{,}3$; $\int_0^3 \left(9-x^2\right)\mathrm{d}x = 18$; $\int_1^4 \left(9-x^2\right)\mathrm{d}x = 6$

De laatste stelt geen oppervlakte voor omdat op interval $\left[3, 4\right]$ de grafiek van $f\left(x\right) = 9 - x^2$ onder de x-as ligt.

ICT Rekenen met integralen

bladzijde 114

I-9a $\int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 0$

© Noordhoff Uitgevers bv

b De exacte uitkomst is 0 omdat de oppervlakte van het gedeelte onder de x-as exact gelijk is aan de oppervlakte van het gedeelte boven de x-as.

I-10 $\int_0^5 1{,}5x^2\,dx + \int_5^8 1{,}5x^2\,dx = \int_0^8 1{,}5x^2\,dx$ omdat op interval $[0, 8]$ de grafiek van $f(x) = 1{,}5x^2$ geheel boven de x-as ligt.

I-11a $\int_0^2 x\sqrt{x}\,dx \approx 2{,}26$ en $\int_0^2 3x\sqrt{x}\,dx \approx 6{,}79$

b De functiewaarden van $f(x) = 3x\sqrt{x}$ zijn drie keer zo groot als die van $g(x) = x\sqrt{x}$ en daarom is ook de oppervlakte drie keer zo groot.

I-12a $\int_1^3 2x\,dx = 8$; $\int_1^3 x^2\,dx \approx 8{,}7$; $\int_1^3 (2x + x^2)\,dx \approx 16{,}7$

b De som van de oppervlakte onder de afzonderlijke grafieken is gelijk aan de oppervlakte onder de somfunctie omdat alle functiewaarden op interval $[1, 3]$ positief zijn.

I-13a $\int_{-2}^2 (x+2)^2\,dx + \int_0^2 (x-2)^2\,dx \approx 2{,}67 + 2{,}67 \approx 5{,}33$

b $\int_0^2 \left((4 - x^2) - (x-2)^2\right)dx \approx 2{,}67$

I-14 $\int_0^4 (x^2 - 4x)\,dx \approx -10{,}67 \Rightarrow \int_4^p (x^2 - 4x)\,dx$ moet 10,67 zijn.

Door proberen is te vinden dat $p = 6$.

bladzijde 115

I-15a $\int_0^2 f(x)\,dx = 2 \times 2 = 4$; $\int_0^5 f(x)\,dx = 5 \times 2 = 10$; $\int_0^8 f(x)\,dx = a \times 2 = 2a$

b -

c $F(x) = 2x$

I-16a $\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$; $\int_0^5 f(x)\,dx = \frac{1}{2} \times 5 \times 5 = 12\frac{1}{2}$; $\int_0^a f(x)\,dx = \frac{1}{2} \times a \times a = \frac{1}{2}a^2$

b -

c $F(x) = \frac{1}{2}x^2$

I-17a $\int_0^a (x+2)\,dx$

b $\int_0^a (x+2)\,dx = \int_0^a x\,dx + \int_0^a 2\,dx = \frac{1}{2}a^2 + 2a$

I-18a $\int_0^a x^2 \mathrm{d}x$ **b** $\int_0^a x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}a^3$

I-19 De oppervlakte op het interval $[1, 4]$ is gelijk aan de oppervlakte op het interval $[0, 4]$ min de oppervlakte op het interval $[0, 1]$.
Er geldt vervolgens dat $F(4)$ is de oppervlakte op het interval $[0, 4]$ en $F(1)$ is de oppervlakte op het interval $[0, 1]$.

I-20

f(x)	F(x)
2	2x
x	$\frac{1}{2}x^2$
x^2	$\frac{1}{3}x^3$
$x+2$	$\frac{1}{2}x^2+2x$

Er geldt $F'(x) = f(x)$.

I-21 $F(x) = x^3$; $G(x) = -\frac{1}{4}x^4$; $k(x) = x^{-2}$ dus $K(x) = -x^{-1} = -\dfrac{1}{x}$

I-22 $F'(x) = 6x^5 = f(x)$ want de afgeleide van een constante is 0.

Test jezelf

bladzijde 118

T-1a Ondersom $= 2\big(f(0)+f(2)+f(4)+f(6)+f(8)\big)$.
$2(1+4,6+7,4+9,4+10,6) = 66$
Bovensom $= 2\big(f(2)+f(4)+f(6)+f(8)+f(10)\big)$.
$2(4,6+7,4+9,4+10,6+11) = 86$

b Ondersom $= f(0)+f(1)+.....+f(9) = 71,5$.
Bovensom $= f(1)+f(2)+.....+f(10) = 81,5$.

c Het verschil tussen bovensom en ondersom wordt kleiner omdat de breedte van de intervallen kleiner is.

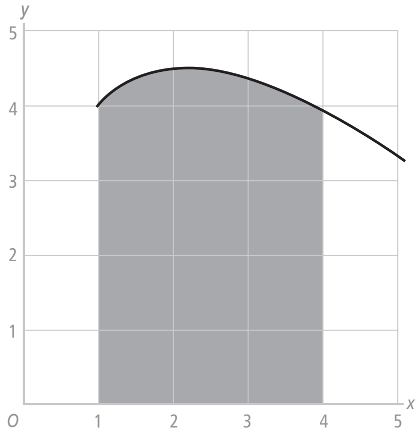
d Het midden van het eerste interval ligt bij 0,1 en het midden van het volgende interval ligt steeds 0,2 verder dus
$0,1+0,2(k-1) = 0,1+0,2k-0,2 = 0,2k-0,1 = 0,1\cdot(2k-1)$.

e $\sum_{k=1}^{50}\left(-\frac{1}{10}\big(0,1(2k-1)\big)^2 + 2\big(0,1(2k-1)\big)+1\right)\cdot 0,2$

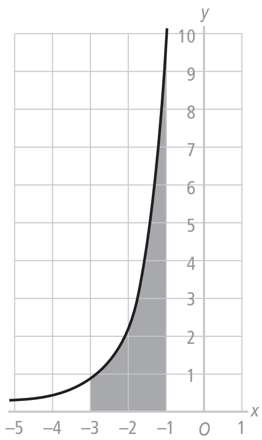
$= 0,2\cdot\big(f(0,1)+f(0,3)+.....f(9,7)+f(9,9)\big) = 0,2\times 383,35 = 76,67$

© Noordhoff Uitgevers bv

T-2a $\int_1^4 \left(6\sqrt{x}-2x\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{6}{1\frac{1}{2}}x^{1\frac{1}{2}}-x^2\right]_1^4 = \left[4x\sqrt{x}-x^2\right]_1^4 = (32-16)-(4-1)=13$



b $\int_{-3}^{-1}\left(\frac{-2}{x^3}+\frac{8}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_{-3}^{-1}\left(-2x^{-3}+8x^{-2}\right)\mathrm{d}x = \left[x^{-2}-8x^{-1}\right]_{-3}^{-1} = \left[\frac{1}{x^2}-\frac{8}{x}\right]_{-3}^{-1} = (1+8)-\left(\frac{1}{9}+\frac{8}{3}\right)=6\frac{2}{9}$



bladzijde 119

T-3a $\int_{-2}^{0}\sqrt{x+2}\,\mathrm{d}x+\int_0^2\left(\sqrt{x+2}-x\right)\mathrm{d}x \approx 1,886+1,448\approx 3,33$

b $\int_0^2\left(\sqrt{x+2}-x\right)\mathrm{d}x = \int_0^2\left((x+2)^{\frac{1}{2}}-x\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}(x+2)^{1\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 = \left(\frac{2}{3}\cdot 4^{1\frac{1}{2}}-2\right)-\frac{2}{3}\cdot 2^{1\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{3}-1\frac{1}{3}\sqrt{2}$

T-4a $F(x)=\frac{1}{3}x^2-x^3+\frac{1}{5}x^4$

b $f(x)=x^{1\frac{1}{2}}+3x^{2\frac{1}{2}}-2x^{-\frac{1}{2}}$ dus $F(x)=\frac{1}{2\frac{1}{2}}x^{2\frac{1}{2}}+\frac{3}{3\frac{1}{2}}x^{3\frac{1}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{6}{7}x^3\sqrt{x}-4\sqrt{x}$

c $f(x)=-2x^2+\frac{1}{3}x^{-3}$ dus $F(x)=-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{6}x^{-2}=-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{6x^2}$

d $f(x)=x^{-2}+2x^{-4}-3x^{-5}$ dus $F(x)=-x^{-1}-\frac{2}{3}x^{-3}+\frac{3}{4}x^{-4}=-\frac{1}{x}-\frac{2}{3x^2}+\frac{3}{4x^4}$

© Noordhoff Uitgevers bv

T-5 $A = \int_{-4}^{0} 3\sqrt{x+4}\,\mathrm{d}x = \left[2(x+4)^{1\frac{1}{2}}\right]_{-4}^{0} = 16$

$B = \int_{0}^{a} 3\sqrt{x+4}\,\mathrm{d}x = \left[2(x+4)^{1\frac{1}{2}}\right]_{0}^{a} = 2(a+4)^{1\frac{1}{2}} - 16$

$2(a+4)^{1\frac{1}{2}} - 16 = 16$

$(a+4)^{1\frac{1}{2}} = 16$

$a+4 = 16^{\frac{2}{3}}$

$a = 16^{\frac{2}{3}} - 4 \approx 2{,}35$

T-6 $\int_{0}^{4}\left(\left(\frac{1}{8}x^2+2\right)-\left(4\sqrt{x}-4\right)\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{24}x^3+2x-\frac{4}{1\frac{1}{2}}x^{1\frac{1}{2}}+4x\right]_{0}^{4} = 2\frac{2}{3}+8-21\frac{1}{3}+16 = 5\frac{1}{3}$

T-7a $\frac{8x-6}{x^3} = \frac{2}{x^2}$

$x^2(8x-6) = 2x^3$

$6x^3 - 6x^2 = 0$

$6x^2(x-1) = 0$

$x = 0$ of $x = 1$ ($x = 0$ vervalt). Dus het snijpunt is het punt $(1, 2)$.

b $\int_{1}^{4}\left(\frac{8x-6}{x^3}-\frac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_{1}^{4}\left(8x^{-2}-6x^{-3}-2x^{-2}\right)\mathrm{d}x = \int_{1}^{4}\left(6x^{-2}-6x^{-3}\right)\mathrm{d}x = \left[-6x^{-1}+3x^{-2}\right]_{1}^{4}$

$= \left[-\frac{6}{x}+\frac{3}{x^2}\right]_{1}^{4} = \left(-\frac{6}{4}+\frac{3}{16}\right)-\left(-6+3\right) = 1\frac{11}{16}$

c Er geldt dan $\int_{1}^{a}\frac{8x-6}{x^3}\mathrm{d}x = 2\int_{1}^{a}\frac{2}{x^2}\mathrm{d}x \Rightarrow \left[-\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}\right]_{1}^{a} = 2\left[-\frac{2}{x}\right]_{1}^{a} \Rightarrow$

$\left(-\frac{8}{a}+\frac{3}{a^2}\right)-\left(-8+3\right) = 2\left(-\frac{2}{a}-(-2)\right) \Rightarrow$

$\frac{3}{a^2}-\frac{4}{a}+1 = 0$ (alles met a^2 vermenigvuldigen)

$\Rightarrow a^2-4a+3 = 0 \Rightarrow (a-1)(a-3) = 0$

$a = 1$ of $a = 3$ dus $a = 3$

© Noordhoff Uitgevers bv

Blok 2 - Vaardigheden

bladzijde 122

1a $9-x^2 \geq 0$ geeft $x^2 \leq 9$ dus $-3 \leq x \leq 3$. Dus $D_f = [-3, 3]$
b $x^2-1 \geq 0$ geeft $x^2 \geq 1$ dus $x \leq -1$ of $x \geq 1$. Dus $D_f = \langle \leftarrow, -1] \cup [1, \rightarrow\rangle$
c $x^2+5>0$ geeft $x^2>-5$. Dus x kan elke waarde aannemen. $D_f = \mathbb{R}$
d $x^2-4x-5 \geq 0$ geeft $(x-5)(x+1) \geq 0$ dus $x \leq -1$ of $x \geq 5$. $D_f = \langle \leftarrow, -1] \cup [5, \rightarrow\rangle$
e $6-x^2>0$ geeft $x^2<6$ dus $-\sqrt{6}<x<\sqrt{6}$. $D_f = \langle -\sqrt{6}, \sqrt{6}\rangle$
f $x^4-2x^3 \geq 0$ geeft $x^3(x-2) \geq 0$ dus $x \leq 0$ of $x \geq 2$. $D_f = \langle \leftarrow, 0] \cup [2, \rightarrow\rangle$

2a $x^2+2x+10 \geq 0$ voor elke waarde van x. $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = [3, \rightarrow\rangle$
b $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = \langle 0, \frac{1}{3}]$
c $1-\frac{2}{x} \geq 0$ geeft $\frac{2}{x} \leq 1$ dus $x<0$ of $x \geq 2$. $D_f = \langle \leftarrow, 0\rangle \cup [2, \rightarrow\rangle$ en $B_f = [0, 1\rangle \cup \langle 1, \rightarrow\rangle$
d $x \geq 0$ en $2-x>0$ dus $x \geq 0$ en $x<2$. $D_f = [0, 2\rangle$ en $B_f = [0, \rightarrow\rangle$

3a $D_h = [1, \rightarrow\rangle$
b De uitkomst van $2\sqrt{x-1}$ is altijd groter of gelijk aan nul dus het bereik van h is $[1, \rightarrow\rangle$.
c Het randpunt is $(1, 1)$.

bladzijde 123

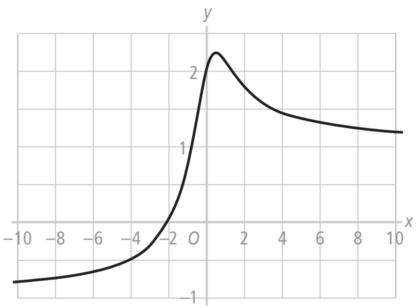
4a $\sqrt{x+2}=x \Rightarrow x+2=x^2 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow (x+1)(x-2)=0 \Rightarrow x=-1$ of $x=2$
$x=-1$ voldoet niet dus de oplossing is $x=2$
b $\sqrt{x+2}=x-4 \Rightarrow$
$x+2=x^2-8x+16 \Rightarrow x^2-9x+14=0 \Rightarrow (x-2)(x-7)=0 \Rightarrow x=2$ of $x=7$
$x=2$ voldoet niet dus de oplossing is $x=7$
c $3\sqrt{x}-x=2 \Rightarrow 3\sqrt{x}=x+2 \Rightarrow 9x=x^2+4x+4 \Rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow$
$(x-1)(x-4)=0 \Rightarrow x=1$ of $x=4$
d $\frac{3\sqrt{x}}{2}=x \Rightarrow 3\sqrt{x}=2x \Rightarrow 9x=4x^2 \Rightarrow 4x^2-9x=0 \Rightarrow x(4x-9)=0 \Rightarrow x=0$ of $x=2\frac{1}{4}$
e $3\sqrt{x+2}-2=-x \Rightarrow 3\sqrt{x+2}=-x+2 \Rightarrow 9(x+2)=x^2-4x+4 \Rightarrow x^2-13x-14=0 \Rightarrow$
$(x-14)(x+1)=0 \Rightarrow$
$x=14$ of $x=-1$
$x=14$ voldoet niet dus de oplossing is $x=-1$
f $\frac{5}{2\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{9}{4} \Rightarrow \frac{5}{2\sqrt{x}}+\frac{4}{2\sqrt{x}}=\frac{9}{2\sqrt{x}}=\frac{9}{4} \Rightarrow 2\sqrt{x}=4 \Rightarrow \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4$

5a Nee, $f(x)=g(x)$ alleen voor $x=0$.
b Nee, $f(x)=g(x)$ alleen voor $x>0$.
c Ja, $f(x)=g(x)$ want $\sqrt{4x^3}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{x^3}=2(x^3)^{\frac{1}{2}}=2x^{1\frac{1}{2}}=2x\sqrt{x}$

6a domein $=\mathbb{R}$ want $x^2+1>0$ voor elke waarde van x
b $x+2=0$ als $x=-2$

© Noordhoff Uitgevers bv

c



$y=1$ en $y=-1$ zijn de horizontale asymptoten

d $\frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{5}\cdot\sqrt{x^2+1}=x+2 \Rightarrow 5\left(x^2+1\right)=x^2+4x+4 \Rightarrow$
$4x^2-4x+1=0 \Rightarrow x^2-x+\frac{1}{4}=0 \Rightarrow$
$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$
Het maximum van de functie ligt bij $x=\frac{1}{2}$ dus $f(x)\geq\sqrt{5}$ voor $x=\frac{1}{2}$.

e De lijn $y=\sqrt{5}$ gaat door de top van de grafiek.

bladzijde 124

7a $\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}=1\frac{1}{2}\sqrt{2}$

b $\frac{6}{\sqrt{3}}=\frac{6}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{3}=\frac{6}{3}\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

c $\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^4=\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\left(\sqrt{3}\right)^4=\frac{16}{81}\cdot 9=\frac{16}{9}=1\frac{7}{9}$

d $\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}=1\frac{1}{2}\sqrt{2}$

e $\sqrt{1875}=\sqrt{625}\cdot\sqrt{3}=25\sqrt{3}$

f $\sqrt{2048}=\sqrt{1024}\cdot\sqrt{2}=32\sqrt{2}$

8a $\dfrac{\frac{6}{\sqrt{x}}}{2x}=\frac{6}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2x}=\frac{3}{x\sqrt{x}}$

b $\frac{1}{2}x\cdot\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}$

c $\frac{x-3}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x\sqrt{x}}=\frac{x(x-3)}{x\sqrt{x}}+\frac{2}{x\sqrt{x}}=\frac{x^2-3x+2}{x\sqrt{x}}$

d $\frac{x-1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{2\sqrt{x}}{x+1}=\frac{2x-2}{x+1}$

9a $x^2-4x+2=0$

$x=\frac{4-\sqrt{8}}{2}$ of $x=\frac{4+\sqrt{8}}{2}$

b $\frac{4\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{2}}{2}=\frac{4}{2}\pm\frac{2\sqrt{2}}{2}=2\pm\sqrt{2}$

c $\frac{6+\sqrt{45}}{3}=\frac{6+\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}}{3}=\frac{6}{3}+\frac{3\sqrt{5}}{3}=2+\sqrt{5}$

d $\frac{8-\sqrt{112}}{12}=\frac{8-\sqrt{16}\cdot\sqrt{7}}{12}=\frac{8}{12}-\frac{4}{12}\sqrt{7}=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{7}$

10a $\sqrt{x^2-4}=x-2$
$x^2-4=x^2-4x+4$
$4x=8$
$x=2$

b $2\sqrt{x}=\sqrt{2x}$
$4x=2x$
$x=0$

© Noordhoff Uitgevers bv

c $x\sqrt{x} = 3x$
$x^2 \cdot x = 9x^2$
$x^3 - 9x^2 = 0$
$x^2(x-9) = 0$
$x = 0$ of $x = 9$

d $\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{x}}{x^2}$
$2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x^3} = 2x^2$
$2\sqrt{x^4} = 2x^2$
$4x^4 = 4x^4$ mits $x > 0$
dus $x > 0$

e $\sqrt{\tfrac{x}{4}} \cdot \sqrt{4x} = x$
$\sqrt{\tfrac{x}{4} \cdot 4x} = x$
$\sqrt{x^2} = x$
$x = x$ mits $x \geq 0$
dus $x \geq 0$

f $\sqrt{\tfrac{4}{x}} = \tfrac{2}{\sqrt{x}}$
$\tfrac{4}{x} = \tfrac{4}{x}$ mits $x > 0$
dus $x > 0$

bladzijde 125

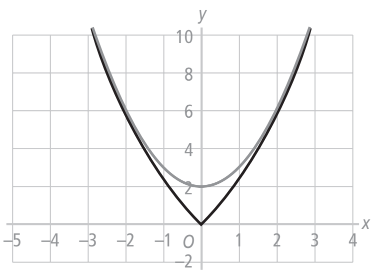
11a $f(x) = 4x^{-1\frac{1}{2}}$ dus $f'(x) = -6x^{-2\frac{1}{2}} = -\dfrac{6}{x^2\sqrt{x}}$
$f'(4) = -\dfrac{6}{16\sqrt{4}} = -\tfrac{3}{16}$

b $\dfrac{4}{x\sqrt{x}} = \sqrt{x} \Rightarrow x\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ of $x = -2$
$x = -2$ voldoet niet dus $x = 2$
$g(2) = \sqrt{2}$ dus $S(2, \sqrt{2})$

c $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ dus $g'(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$
$y = \tfrac{1}{2\sqrt{2}}x + b$ $(2, \sqrt{2})$
$\sqrt{2} = \tfrac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 2 + b$ dus $b = \sqrt{2} - \tfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$
$y = \tfrac{1}{2\sqrt{2}}x + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$

d $f'(4) = -\tfrac{6}{32}$
$y = -\tfrac{6}{32}x + b$ $(4, \tfrac{1}{2})$
$\tfrac{1}{2} = -\tfrac{6}{32} \times 4 + b$ dus $b = 1\tfrac{1}{4}$
Dus $y = -\tfrac{6}{32}x + 1\tfrac{1}{4}$ is inderdaad de lijn die de grafiek van *f* raakt in *A*.

12a



b $\sqrt{x^4 + 4x^2} = x^2 + 4 \Rightarrow x^4 + 4x^2 = x^4 + 8x^2 + 16 \Rightarrow -4x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = -4$ dus geen oplossingen
De grafieken van *f* en *g* hebben geen snijpunten.

c $x^2 + 2 - \sqrt{x^4 + 4x^2} = \tfrac{1}{2} \Rightarrow x^2 + 1\tfrac{1}{2} = x^4 + 4x^2 \Rightarrow x^4 + 3x^2 + 2\tfrac{1}{4} = x^4 + 4x^2 \Rightarrow 2\tfrac{1}{4} = x^2 \Rightarrow$
$x = 1\tfrac{1}{2}$ of $x = -1\tfrac{1}{2}$

d Uit de grafiek volgt $\langle -1\tfrac{1}{2}, 1\tfrac{1}{2} \rangle$.

© Noordhoff Uitgevers bv

13a $\frac{3}{\sqrt{2x+4}}=2 \Rightarrow \sqrt{2x+4}=1\frac{1}{2} \Rightarrow 2x+4=2\frac{1}{4} \Rightarrow 2x=-1\frac{3}{4} \Rightarrow x=-\frac{7}{8}$

b $\sqrt{x^2+2x}=x+2 \Rightarrow x^2+2x=x^2+4x+4 \Rightarrow -2x=4 \Rightarrow x=-2$

c $\frac{2+x}{\sqrt{x}}=3 \Rightarrow 3\sqrt{x}=2+x \Rightarrow 9x=4+4x+x^2 \Rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow (x-1)(x-4)=0 \Rightarrow$

$x=1$ of $x=4$

d $2+\sqrt{x}=x \Rightarrow \sqrt{x}=x-2 \Rightarrow x=x^2-4x+4 \Rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow (x-1)(x-4)=0 \Rightarrow$

$x=1$ of $x=4$

$x=1$ voldoet niet dus $x=4$ is de oplossing

e $\sqrt{6+\sqrt{x}}=4 \Rightarrow 6+\sqrt{x}=16 \Rightarrow \sqrt{x}=10 \Rightarrow x=100$

f $x\sqrt{x}=\sqrt{11} \Rightarrow x^{1\frac{1}{2}}=\sqrt{11} \Rightarrow x=\left(11^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{1\frac{1}{2}}}=11^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{11}$

14a $g'(x)=-2x+\frac{1}{\sqrt{x}}$ dus $g'(4)=-8+\frac{1}{2}=-7\frac{1}{2}$

$y=-7\frac{1}{2}x+b \; (4,-12)$

$-12=-30+b$ geeft $b=18$ dus $y=-7\frac{1}{2}x+18$

b $h'(x)=\frac{1}{3\sqrt{x}}$ dus $h'(9)=\frac{1}{9}$

$y=\frac{1}{9}x+b \; (9, 1)$

$1=1+b$ geeft $b=0$ dus $y=\frac{1}{9}x$

c $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{x}}$ dus $f'(1)=1\frac{1}{2}$

$y=1\frac{1}{2}x+b \; (1, 5)$

$5=1\frac{1}{2}+b$ geeft $b=3\frac{1}{2}$ dus $y=1\frac{1}{2}x+3\frac{1}{2}$

d $r'(x)=\frac{1}{2x\sqrt{x}}-\frac{2}{x^2}+\frac{6}{x^3}$ dus $r'(1)=4\frac{1}{2}$

$y=4\frac{1}{2}x+b \; (1,-2)$

$-2=4\frac{1}{2}+b$ geeft $b=-6\frac{1}{2}$ dus $y=4\frac{1}{2}x-6\frac{1}{2}$

15a $-2x+3\sqrt{x}=0$

$3\sqrt{x}=2x$

$9x=4x^2$

$4x^2-9x=0$

$x(4x-9)=0$

$x=0$ of $x=2\frac{1}{4}$

$(0, 0)$ en $(2\frac{1}{4}, 0)$

b Eerst de vergelijking oplossen.

$-2x+3\sqrt{x}=-2$

$3\sqrt{x}=-2+2x$

$9x=4-8x+4x^2$

$4x^2-17x+4=0$

$x^2-4\frac{1}{4}x+1=0$

$(x-4)(x-\frac{1}{4})=0$

$x=4$ of $x=\frac{1}{4}$ ($x=\frac{1}{4}$ voldoet niet)

Uit de plot volgt $[0, 4\rangle$.

c $f'(x)=-2+\frac{3}{2\sqrt{x}}$

d $-2+\frac{3}{2\sqrt{x}}=0$

$\frac{3}{2\sqrt{x}}=2$

$4\sqrt{x}=3$

$16x=9$

$x=\frac{9}{16}$

$f(\frac{9}{16})=1\frac{1}{8}$

In punt $(\frac{9}{16}, 1\frac{1}{8})$ is de helling nul

© Noordhoff Uitgevers bv

Blok 2 - Verdieping Lineaire benaderingen

bladzijde 126

1a Naarmate je verder inzoomt gaat de grafiek steeds meer op een rechte lijn lijken.
b $f'(1) = 2 \times 1 + 3 = 5$
c $y = 5x + b \ (1,5)$
$5 = 5 + b$ geeft $b = 0$ dus $y = 5x$

2a $f'(x) = 3x^2 - 4x$ dus $f'(3) = 27 - 12 = 15$
$y = 15x + b \ (3, f(3)) = (3, 9)$
$9 = 45 + b$ geeft $b = -36$ dus $y = 15x - 36$

b $g'(x) = 1 + \frac{3}{2\sqrt{3x}}$ dus $g'(3) = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$
$y = 1\frac{1}{2}x + b \ (3, g(3)) = (3, 6)$
$6 = 4\frac{1}{2} + b$ geeft $b = 1\frac{1}{2}$ dus $y = 1\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$

3a De helling is 2 en de lijn gaat door (3, 5).
b De helling in $P(p, q)$ is $f'(p)$. De lijn $y = q + f'(p)(x - p)$ gaat door (p, q) en heeft helling $f'(p)$.
c $f(p) = q$, dus $y = q + f'(p)(x - p)$ is dezelfde lijn als $y = f(p) + f'(p)(x - p)$.

4a $f'(x) = 3x^2 + 2$ dus $f'(0) = 2$
$y = f(p) + f'(p)(x - p)$ wordt dan $y = 3 + 2(x - 0) = 3 + 2x$
b $f'(-1) = 5$ dus $y = 0 + 5(x - (-1)) = 5x + 5$
c $f'(x) = -x - 2$ dus $f'(-2) = 0$ en $f(-2) = 3$ dus $y = 3$ is de gevraagde raaklijn.

bladzijde 127

5a $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ dus $f'(1) = \frac{1}{3}$
De lineaire benadering in $(1, 1)$ is $y = 1 + \frac{1}{3}(x - 1) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x$.
b $f(1{,}006) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1{,}006 = 1{,}002$
c $f(1{,}006) = \sqrt[3]{1{,}006} \approx 1{,}001996013$
d De afwijking is $\frac{1{,}002 - \sqrt[3]{1{,}006}}{\sqrt[3]{1{,}006}} \times 100\% \approx 0{,}0004\%$.
e $f(1{,}6)$ is volgens de lineaire benadering $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1{,}6 = 1{,}2$
$f(1{,}6) = \sqrt[3]{1{,}6}$
De afwijking is $\frac{1{,}2 - \sqrt[3]{1{,}6}}{\sqrt[3]{1{,}6}} \times 100\% \approx 2{,}60\%$.
Deze afwijking wordt groter naarmate de afwijking tot punt $(1, 1)$ groter is.

6 $f'(x) = 17x^{16}$
$y = f(2) + f'(2)(x - 2) = 2^{17} + 17 \cdot 2^{16}(x - 2) = 1114112x - 2097152$ is de raaklijn in het punt met $x = 2$
De eerstegraads benadering van $2{,}01^{17}$ is $1114112 \cdot 2{,}01 - 2097152 = 142213{,}12$.
De afwijking is $\frac{142213{,}12 - 2{,}01^{17}}{2{,}01^{17}} \times 100\% \approx -0{,}32\%$.
De eerstegraads benadering van $2{,}003^{17}$ is $1114112 \cdot 2{,}003 - 2097152 = 134414{,}336$.

De afwijking is $\dfrac{134414{,}336-2{,}003^{17}}{2{,}003^{17}}\times 100\% \approx -0{,}03\%$.

De eerstegraads benadering van $1{,}98^{17}$ is $1114112\cdot 1{,}98-2097152=108789{,}76$.

De afwijking is $\dfrac{108789{,}76-1{,}98^{17}}{1{,}98^{17}}\times 100\% \approx -1{,}54\%$.

7a f: $y=4+4(x-2)=4x-4$

g: $y=3+\frac{2}{3}(x-2)=\frac{2}{3}x+1\frac{2}{3}$

s: $y=(3+4)+(4+\frac{2}{3})(x-2)=4\frac{2}{3}x-2\frac{1}{3}$

p: $y=4\cdot 3+14\frac{2}{3}(x-2)=14\frac{2}{3}x-17\frac{1}{3}$

b $(4x-4)+(\frac{2}{3}x+1\frac{2}{3})=4\frac{2}{3}x-2\frac{1}{3}$

c $(4x-4)(\frac{2}{3}x+1\frac{2}{3})=2\frac{2}{3}x^2+4x-6\frac{2}{3}\neq 14\frac{2}{3}x-17\frac{1}{3}$

8a $y=x$ is de linearisering van $\sin x$ in $(0,0)$. Verder geldt $t(x)=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ en $\cos 0=1$ dus $t(x)=\tan x\approx\dfrac{\sin x}{1}=\sin x$ voor $x\approx 0$.

b De afwijking tussen de benaderde waarde op $y=x$ en de werkelijke waarde op $y=\sin x$ is dus $x-\sin x$ en is procentueel gezien gelijk aan $\dfrac{x-\sin x}{\sin x}\times 100\%$.

Voor een afwijking van 5% geldt dus $\dfrac{x-\sin x}{\sin x}=0{,}05 \Rightarrow x-\sin x=0{,}05\sin x \Rightarrow$ $x=1{,}05\sin x$.

Voer op je rekenmachine in: $Y1=X$ en $Y2=1{,}05*SIN(X)$ en je vind met CALC/INTERSECT de oplossing $x\approx 0{,}5384$ (zet je rekenmachine op radialen!)

Wegens de puntsymmetrie van $\sin x$ wordt het interval $[-0{,}5384;\ 0{,}5384]$ waar de afwijking maximaal 5% is.

De afwijking tussen de benaderde waarde op $y=x$ en de werkelijke waarde op $y=\sin x$ is $\tan x-x$ en is procentueel gezien gelijk aan $\dfrac{\tan x-x}{\tan x}\times 100\%$. Voor een afwijking van 5% geldt dus $\dfrac{\tan x-x}{\tan x}=0{,}05 \Rightarrow \tan x-x=0{,}05\tan x$

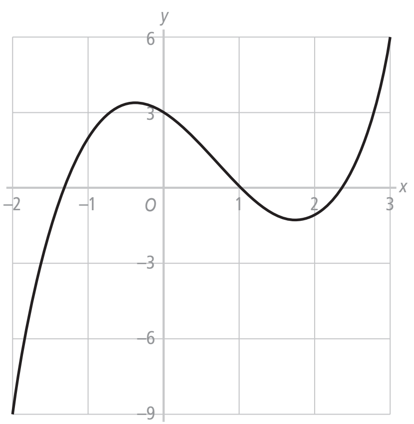
$\Rightarrow x=0{,}95\tan x$. Met de rekenmachine vind je met CALC/INTERSECT de oplossing

$x\approx 0{,}3854$.

Wegens de puntsymmetrie van $\tan x$ wordt het interval $[-0{,}3854;\ 0{,}3854]$ waar de afwijking maximaal 5% is.

bladzijde 128

9a



© Noordhoff Uitgevers bv

b $y = f(3) + f'(3)(x-3) = 6 + 13(x-3) = 13x - 33$ want $f(3) = 6$ en $f'(3) = 13$

c $13x_2 - 33 = 0$ geeft $x_2 = \frac{33}{13} = 2\frac{7}{13}$

d $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 3 - \frac{6}{13} = 2\frac{7}{13}$

e De eerstegraads benadering voor *f* door het punt met $x = 2\frac{7}{13}$ is

$y = f(2\frac{7}{13}) + f'(2\frac{7}{13})(x - 2\frac{7}{13}) \approx 7{,}1775x - 16{,}8270$.
Voor x_3 geldt $7{,}1775x_3 - 16{,}8270 = 0$ dus $x_3 \approx 2{,}3444$.

f De eerstegraads benadering voor *f* door het punt met x_n is $y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$.
Voor het snijpunt x_{n+1} met de *x*-as geldt
$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$
$0 = f(x_n) + f'(x_n) \cdot x_{n+1} - f'(x_n) \cdot x_n$
$f'(x_n) \cdot x_{n+1} = f'(x_n) \cdot x_n - f(x_n)$

$x_{n+1} = \dfrac{f'(x_n) \cdot x_n - f(x_n)}{f'(x_n)} = \dfrac{f'(x_n) \cdot x_n}{f'(x_n)} - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ waaruit volgt $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

10a Uit de grafiek blijkt dat het nulpunt tussen –2 en –1 ligt. Neem dus $x_1 = -2$.
Dan geldt: $x_2 = -2 - \dfrac{f(-2)}{f'(-2)} = -2 - \dfrac{-9}{18} = -1{,}5$ en dus

$x_3 = -1{,}5 - \dfrac{f(-1{,}5)}{f'(-1{,}5)} = -1{,}5 - \dfrac{-1{,}875}{10{,}75} = -1{,}326$ en vervolgens

$x_4 = -1{,}326 - \dfrac{f(-1{,}326)}{f'(-1{,}326)} = -1{,}326 - \dfrac{-0{,}196}{8{,}579} = -1{,}303$
Het nulpunt is dan bij benadering $x \approx -1{,}3$.

Voor het andere nulpunt start je met $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 - \dfrac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \dfrac{0}{-3} = 1$. Het derde nulpunt is dan $x = 1$

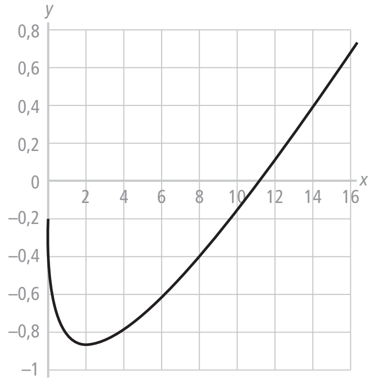
b De snijpunten van de raaklijnen met de *x*-as in combinatie met het stijgen of dalen van de grafiek leidt tot een bepaald nulpunt.

11a $f(x) = 0{,}2x - \sqrt[3]{x}$; $f'(x) = 0{,}2 - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$
Zet in cel B5 de uitdrukking $=0{,}2*(A5)-(A5)\wedge(1/3)$ en in cel C5 de uitdrukking $=0{,}2-(1/3)*(A5)\wedge(-2/3)$.
Selecteer B5 en C5 en kopieer met de vulgreep de inhoud naar de onderste cellen van kolom B en C. Voor $x_1 = 3$ krijg je door 3 in C2 in te vullen.
De tabel wordt dan:

x	f(*x*)	f'(*x*)
3	–0,84225	0,03975
24,18864	1,945692	0,160146
12,03916	0,115916	0,136543
11,19023	0,001318	0,133373
11,18034	1,94E–07	0,133333
11,18034	4,44E–15	0,133333
11,18034	0	0,133333
11,18034	0	0,133333
11,18034	0	0,133333
11,18034	0	0,133333

© Noordhoff Uitgevers bv

b Een plot van *f* staat hieronder.



In de eerste kolom van de tabel lees je af dat het rechter nulpunt hoort bij $x \approx 11{,}18034$.

c Het linker nulpunt $x = 0$ kun je met Newton-Raphson niet vinden want in de buurt van $x = 0$ snijdt de raaklijn van *f* de negatieve *x*-as die buiten het domein van *f* valt (*f* is voor $x < 0$ niet gedefinieerd). Ergens tijdens de herhaalde berekeningen geeft Excel dus een fout.

d Als de raaklijn voorbij het minimum ligt snijdt deze de *x*-as voor $x > 0$ en wordt uiteindelijk het rechter nulpunt gevonden bij de herhaalde berekeningen. Voor deze *x*-waarde moet dus gelden $f'(x) > 0$.
Oplossing: $f'(x) = 0$;
$f'(x) = 0{,}2 - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$; $x^{-\frac{2}{3}} = 3 \cdot 0{,}2 = 0{,}6$; $x = (0{,}6)^{-\frac{3}{2}} \approx 2{,}151657$ dus voor $x > 2{,}151657$ vind je het rechter nulpunt.

bladzijde 129

12a De uitzettingscoëfficiënt is de relatieve (lengte)verandering per graad Celcius. Voor koper geldt dus $\dfrac{\Delta lengte}{lengte} = \Delta T \cdot 16{,}5 \times 10^{-6}$ waarin $\Delta lengte$ de lengteverandering is als gevolg van de uitzetting.
Bij $\Delta T = 20 - 10 = 10$ °C geldt dus voor de lengte:
$\dfrac{\Delta lengte}{lengte} = \Delta T \cdot 16{,}5 \times 10^{-6}$; $\dfrac{\Delta lengte}{10 \text{ cm}} = 10 \cdot 16{,}5 \times 10^{-6}$
$\Delta lengte = 10 \cdot 10 \cdot 16{,}5 \times 10^{-6} = 16{,}5 \times 10^{-4}$ cm, dus wordt de afmeting voor de lengte $10 + 16{,}5 \times 10^{-4} = 10{,}00165$ cm.
Voor de breedte geldt:
$\Delta breedte = 1 \cdot 10 \cdot 16{,}5 \times 10^{-6} = 16{,}5 \times 10^{-5}$ cm dus wordt de afmeting voor de breedte $1 + 16{,}5 \times 10^{-5} = 1{,}000165$ cm.
Voor de hoogte geldt:
$\Delta hoogte = 0{,}5 \cdot 10 \cdot 16{,}5 \times 10^{-6} = 82{,}5 \times 10^{-6}$ cm dus wordt de afmeting voor de hoogte $0{,}5 + 82{,}5 \times 10^{-6} = 0{,}5000825$

b De factor voor de lengtevermeerdering bij een temperatuurstijging van 10 °C is
$\dfrac{lengte + \Delta lengte}{lengte} = \dfrac{lengte}{lengte} + \dfrac{\Delta lengte}{lengte} = 1 + \Delta T \cdot 16{,}5 \cdot 10^{-6} = 1 + 10 \cdot 16{,}5 \cdot 10^{-6} = 1{,}000165$.
Het volume wordt met deze factor voor lengte, breedte en hoogte:
$V = lengte \cdot 1{,}00165 \times breedte \cdot 1{,}000165 \times hoogte \cdot 1{,}000165 =$
$lengte \cdot breedte \cdot hoogte \times 1{,}000165^3 = 10 \cdot 1 \cdot 0{,}5 \times 1{,}000165^3 =$
$5 \times 1{,}000165^3 \approx 5{,}0024754$ cm³.

© Noordhoff Uitgevers bv

c Voor de spoorstaaf geldt: lengte = 10 m en $\Delta T = 35 - 15 = 20$ °C .
Met de factor volgens opdracht b geeft dat:
$lengte\ bij\ 35\ °\ C = \left(1 + \Delta T \cdot 12 \times 10^{-6}\right) \cdot lengte\ bij\ 15\ °\ C =$
$\left(1 + 20 \cdot 12 \times 10^{-6}\right) \cdot 10 = 10{,}0024$ meter
Het volume van 150 dm^3 wordt met de factor volgens opdracht b:
$volume\ bij\ 35\ °\ C = \left(volume\ bij\ 15\ °\ C\right) \cdot \left(1 + \Delta T \cdot 12 \times 10^{-6}\right)^3 =$
$150 \cdot \left(1 + 20 \cdot 12 \times 10^{-6}\right)^3 \approx 150{,}108$ dm^3

d Het volume van het koperen staafje is $l \cdot b \cdot h = 10 \cdot 1 \cdot 0{,}5 = 5$ cm^3.
V is het nieuwe volume bij het temperatuursverschil g met 10 ° C .
De lengteverandering is volgens opdracht b bij het temperatuursverschil g met 10 °C gelijk aan de factor $\left(1 + g \cdot 16{,}5 \cdot 10^{-6}\right)$. Voor het volume V geldt dan
$V = l \cdot \left(1 + g \cdot 16{,}5 \cdot 10^{-6}\right) \times b \cdot \left(1 + g \cdot 16{,}5 \cdot 10^{-6}\right) \times h \cdot \left(1 + g \cdot 16{,}5 \cdot 10^{-6}\right)$
$= l \cdot b \cdot h \cdot \left(1 + g \cdot 16{,}5 \cdot 10^{-6}\right)$
$= 5\left(1 + g \cdot 16{,}5 \cdot 10^{-6}\right)^3$

e Je moet hier een lineaire benadering vinden voor $V(g) = 5\left(1 + g \cdot 16{,}5 \cdot 10^{-6}\right)^3$ rond het punt met $g = 0$. Met deze benadering ga je de waarde voor $g = 10$ benaderen (want dat is het temperatuursverschil bij opdracht b tussen 10 °C en 20 °C).
Met de regel $y = f(p) + f'(p)(x - p)$ krijg je voor het lineariseren rond het punt $g = 0$:
$V = V(0) + V'(0)(g - 0)$. Met
$V'(g) = 5 \cdot 3\left(1 + g \cdot 16{,}5 \cdot 10^{-6}\right) \cdot 16{,}5 \cdot 10^{-6} = 5 \cdot 3 \cdot 16{,}5 \cdot 10^{-6}\left(1 + g \cdot 16{,}5 \cdot 10^{-6}\right) = 5 \cdot 3 \cdot 16{,}5 \cdot 10^{-6}\left(1 + g \cdot 16{,}5 \cdot 10^{-6}\right)^2$
wordt dat $V = 5 + 5 \cdot 3 \cdot 16{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot g = 5\left(1 + 3 \cdot 16{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot g\right)$.
Merk op dat de factor voor de volumevermeerdering dus
$\left(1 + 3 \cdot uitzettingscoëfficiënt \cdot g\right)$ wordt bij deze benadering.
De benaderde waarde voor opdracht a wordt hiermee dus voor $g = 10$:
$5\left(1 + 3 \cdot 16{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 10\right) = 5{,}002475$ cm^3 (exact).

f Er is nauwelijks verschil tussen de antwoorden bij b en e want de onbenaderde functie $V(g) = 5\left(1 + g \cdot 16{,}5 \cdot 10^{-6}\right)^3$ verloopt tussen $g = 0$ en $g = 10$ bijna lineair.
Een lineaire benadering hiervoor geeft dus heel weinig verschil (maar is eenvoudiger om mee te rekenen).

13a $\dfrac{1}{R_s} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} = \dfrac{1}{470} + \dfrac{1}{100}$, dus $R_s = \dfrac{1}{\frac{1}{470} + \frac{1}{100}} \approx 82{,}456\,\Omega$

b $\dfrac{1}{R_s} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} = \dfrac{R_2}{R_1 R_2} + \dfrac{R_1}{R_2 R_1} = \dfrac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$, dus $R_s = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

c Voor R_s stel je een lineaire benadering op rond het punt met $R_1 = 470\,\Omega$ en $R_2 = 100\,\Omega$.
Voor de lineaire benadering van R_s afhankelijk van R_1 hou je hier R_2 constant op $100\ \Omega$. De formule voor R_s wordt dan $R_s(R_1) = \dfrac{R_1 \cdot 100}{R_1 + 100} = 100 R_1 (R_1 + 100)^{-1}$ en de afgeleide $R_s'(R_1) = \dfrac{100^2}{(R_1 + 100)^2}$.
Met de regel $y(x) = f(p) + f'(p)(x - p)$ krijg je voor het lineariseren rond het punt met $R_1 = 470\,\Omega$:
$R_s(R_1) = R_s(470) + R_s'(R_1 - 470) = 47000(570)^{-1} + \frac{100^2}{570^2}(R_1 - 470)$;
Als R_1 met 10% toeneemt wordt de weerstand $1{,}1 \cdot 470 = 517\,\Omega$ en
$R_s(517) = 47000(570)^{-1} + \frac{100^2}{570^2}(517 - 470) \approx 83{,}9027\,\Omega$ in de benadering.

© Noordhoff Uitgevers bv

De niet-benaderde waarde van R_s is $100 \cdot 517(517+100)^{-1} \approx 83,7925\,\Omega$.

De procentuele afwijking die R_s dus krijgt door de benadering is

$\frac{83,9027-83,7925}{83,7925} \times 100\% \approx 0,13\%$.

d Voor de lineaire benadering van R_s afhankelijk van R_2 hou je hier R_1 constant op 470Ω. De formule voor R_s wordt dan $R_s(R_2) = \frac{470 \cdot R_2}{470+R_2} = 470R_2(470+R_2)^{-1}$ en de afgeleide $R_s'(R_2) = \frac{470^2}{(470+R_2)^2}$.

Met de regel $y(x) = f(p) + f'(p)(x-p)$ krijg je voor het lineariseren rond het punt met $R_2 = 100\,\Omega$:

$R_s(R_2) = R_s(100) + R_s'(R_2 - 100) = 47000(570)^{-1} + \frac{470^2}{570^2}(R_2 - 100)$;

Als R_2 met 5% toeneemt wordt de weerstand $1,05 \cdot 100 = 105\ \Omega$ en

$R_s(105) = 47000(570)^{-1} + \frac{470^2}{570^2}(105-100) \approx 85,8556\,\Omega$ in de benadering.

De niet-benaderde waarde van R_s is $470 \cdot 105(105+470)^{-1} \approx 85,8261\,\Omega$.

De procentuele afwijking die R_s dus krijgt door de benadering is

$\frac{85,8556-85,8261}{85,8261} \times 100\% \approx 0,034\%$.

e Als de veranderingen beide plaatsvinden kun je een optelling maken voor de verandering voor R_s:

De verandering in R_s door de verandering van R_1 is

$R_s'(R_1) \cdot \Delta R_1 = \frac{100^2}{(470+100)^2} \cdot (0,10 \cdot 470) \approx 1,4466\,\Omega$.

De verandering in R_s door de verandering van R_2 is

$R_s'(R_2) \cdot \Delta R_2 = \frac{470^2}{(470+100)^2} \cdot (0,05 \cdot 100) \approx 3,3995\,\Omega$.

Samen dus $1,4466 + 3,3995 = 4,8461\,\Omega$.

De nieuwe waarde van R_s wordt dan $82,456 + 4,8461 \approx 87,30\,\Omega$.

De niet-benaderde waarde is $R_s = \frac{1}{\frac{1}{517} + \frac{1}{105}} \approx 87,275\,\Omega$.

De afwijking door de lineaire benadering is hier dus verwaarloosbaar klein.

© Noordhoff Uitgevers bv