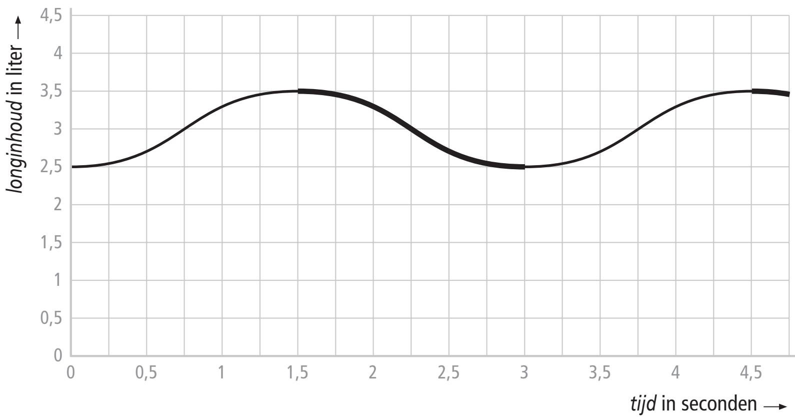
Hoofdstuk 2 - Transformaties

Voorkennis: Grafieken en functievoorschriften

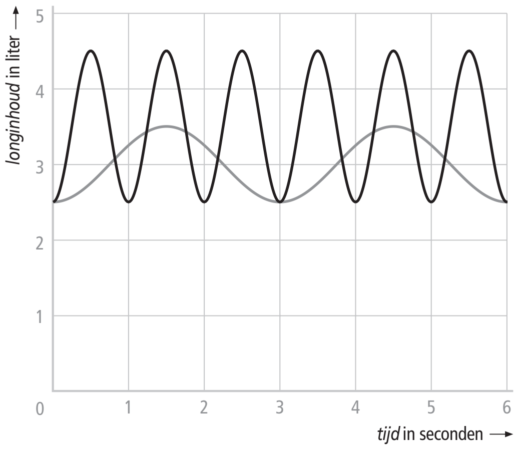
bladzijde 34

V-1a

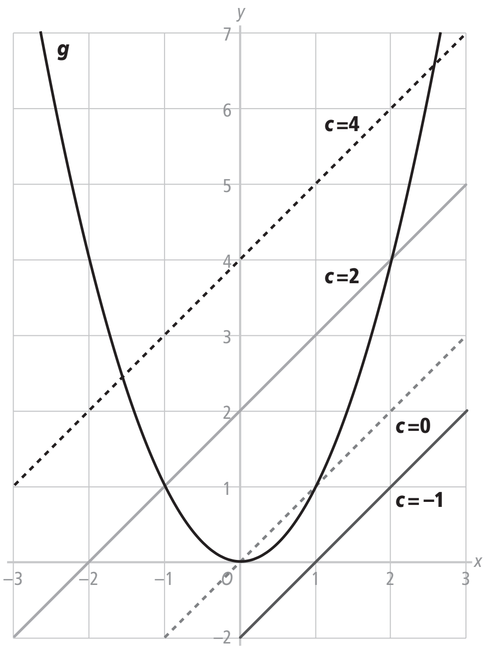


b Van $t=0$ tot $t=3$, dus 3 seconden.

c



V-2a



b Bij verandering van de waarde van c schuift de grafiek van f evenwijdig op.

c Het punt $(5, 25)$ ligt op de grafiek van f als $f(5) = 5 + c = 25$, dus $c = 20$; het andere snijpunt is te vinden door $x^2 = x + 20$ op te lossen: $x^2 - x - 20 = (x-5)(x+4) = 0$; $x = -4$ geeft het andere snijpunt; $f(-4) = -4 + 20 = 16$; het andere snijpunt is $(-4, 16)$.

d $x^2 = x + c$; hieruit volgt $x^2 - x - c = 0$; deze vergelijking heeft precies één oplossing als de discriminant $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-c) = 0$; hieruit volgt $c = -\frac{1}{4}$.

e $x^2 - 2 = 2x + p$ heeft één oplossing als de discriminant van $x^2 - 2x - 2 - p = 0$ gelijk is aan nul: $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2 - p) = 0$; hieruit volgt $p = -3$.

V-3a Het randpunt is $(-1, 0)$.

b Het domein van f is $[-1, \rightarrow\rangle$ en het bereik van f is $[0, \rightarrow\rangle$.

c $f(-1) = a\sqrt{-1+b} = 0$; hieruit volgt $b = 1$ want $a \neq 0$; $f(0) = a\sqrt{0+1} = 2$, dus $a = 2$.

bladzijde 35

V-4a Daniëlle heeft gelijk want ${}^2\log x^2 = 2 \cdot {}^2\log|x|$; de grafiek van $f(x) = {}^2\log x^2$ heeft dus nog een tak voor negatieve waarden van x .

b $f(2) = {}^g\log 2 = 2$; hieruit volgt $g^2 = 2$, dus $g = \sqrt{2}$; controle: $f(4) = {}^{\sqrt{2}}\log 4 = 4$ want $(\sqrt{2})^4 = 4$.

V-5a Op de grafiek van g ligt een willekeurig punt $A(x, g(x))$; twee eenheden naar links ligt op de grafiek van f het punt $B(x-2, (x-2)^2)$; omdat $y_A = y_B$ geldt nu ook $g(x) = (x-2)^2$.

b $h(x) = (x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5$.

c $k(x) = x^2 - 6x + 11 = x^2 - 6x + 9 + 2 = (x-3)^2 + 2$.

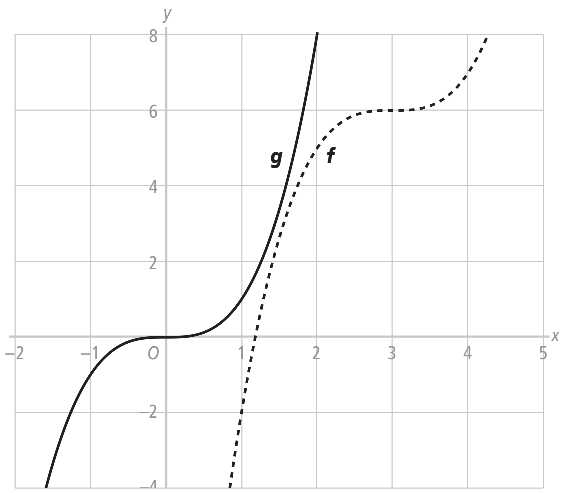
d De coördinaten van de top zijn $(3, 2)$.

e Drie naar rechts en twee omhoog.

2.1 Standaardfuncties

bladzijde 36

1a Kies $\text{Y}_1 = x^3 - 9x^2 + 27x - 21$ en $\text{Y}_2 = x^3$ en maak een plot op de GRM.

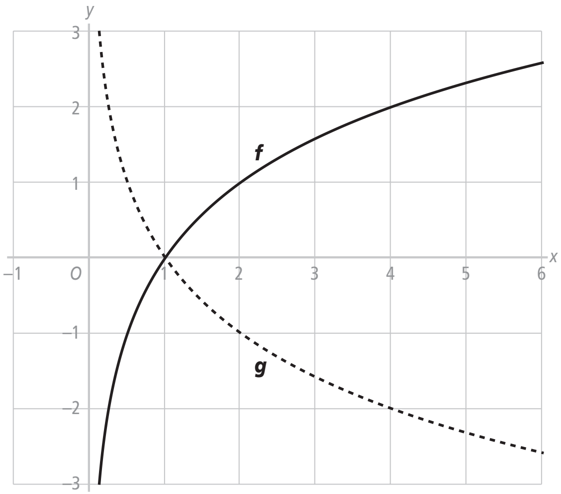


b Het nulpunt van de functie f is $x \approx 1{,}18$ en dat van g is $x = 0$.

c Horizontale raaklijn in de punten $(3, 6)$ en $(0, 0)$.

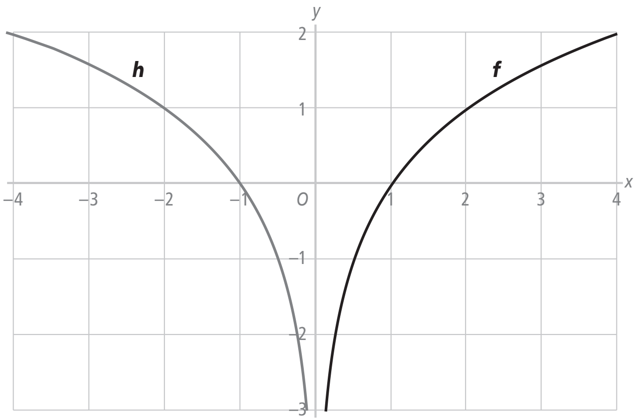
d Drie eenheden naar rechts en zes eenheden omhoog.

2a



De grafieken zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegeling in de x – as.

b



De grafieken zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegeling in de y – as.

bladzijde 37

3

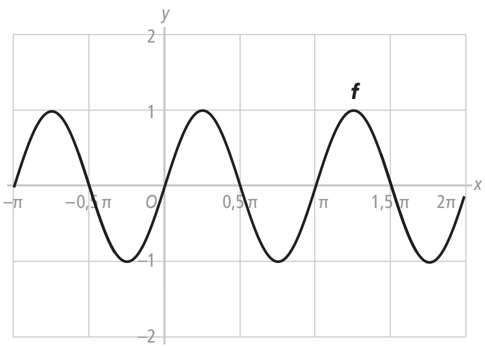
	$f(x) = x$	$f(x) = x^2$	$f(x) = x^3$	$f(x) = \sqrt{x}$	$f(x) = \frac{1}{x}$
domein	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$[0, \rightarrow\rangle$	$\langle\leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$
bereik	$\mathbb{R}$	$[0, \rightarrow\rangle$	$\mathbb{R}$	$[0, \rightarrow\rangle$	$\langle\leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$
snijpunt x-as	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	geen
snijpunt y-as	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	geen
randpunt	geen	geen	geen	(0, 0)	geen
asymptoot	geen	geen	geen	geen	x-as en y-as
periode	geen	geen	geen	geen	geen
stijgend/dalend	stijgend	dalend/stijgend	stijgend	stijgend	dalend

	$f(x)=1$	$f(x)=\sin x$	$f(x)=\cos x$	$f(x)=2^x$	$f(x)={}^2\log x$
domein	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$[0,\rightarrow\rangle$
bereik	{1}	[−1, 1]	[−1, 1]	$[0,\rightarrow\rangle$	$\mathbb{R}$
snijpunt x-as	geen	$(k\cdot\pi,\ 0)$	$(\frac{1}{2}\pi+k\cdot\pi,\ 0)$	geen	(1, 0)
snijpunt y-as	(0, 1)	(0, 0)	(0, 1)	(0, 1)	geen
randpunt	geen	geen	geen	geen	geen
asymptoot	geen	geen	geen	x – as	y – as
periode	geen	2π	2π	geen	geen
stijgend/dalend	constant	stijgend/dalend	stijgend/dalend	stijgend	stijgend

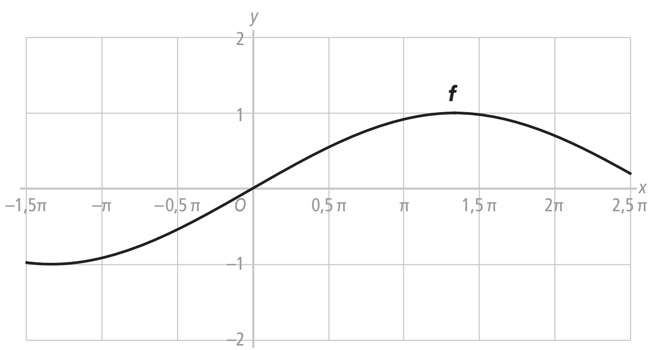
4a,b De eerste grafiek is ontstaan uit de grafiek van $f(x)=\sqrt{x}$ door vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as met factor $\frac{1}{2}$, spiegelen in de x – as en drie eenheden omhoog schuiven.
De tweede grafiek is ontstaan uit de grafiek van $f(x)=\sin x$ door vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as met factor 2 en vermenigvuldigen ten opzichte van de y-as met factor $\frac{1}{2}$.
De derde grafiek is ontstaan uit de grafiek van $f(x)={}^2\log x$ door één eenheid naar links schuiven.

5a Voor $b=1$ is er sprake van een standaardfunctie: $f(x)=\sin x$.

b $\sin(b\cdot\frac{1}{2}\pi)=0$ als b is een even getal, bijvoorbeeld $b=2$.
Hieronder is de grafiek getekend van $f_2(x)=\sin(2x)$.



c $\sin(b\cdot 1\frac{1}{3}\pi)=1$ als $b\cdot 1\frac{1}{3}\pi=\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi$, dit is bijvoorbeeld het geval als $b=\frac{3}{8}$.
Hieronder is de grafiek getekend van $f_2(x)=\sin(\frac{3}{8}x)$.



6a $0 < g < 1$ of $g > 1$

b $g > 1$

c

$f(x) = {}^{g}\log x$ met $0 < g < 1$	
domein	$\langle 0, \rightarrow \rangle$
bereik	$\mathbb{R}$
snijpunt y-as	(1, 0)
verticale asymptoot	y-as
stijgend/dalend	dalend

7a $-5 = 3x + 6 - 5$; hieruit volgt $3x = -6$, en dus $x = -2$. Het snijpunt $S = (-2, -5)$.

b $f(-2) = -2m + 2m - 5 = -5$

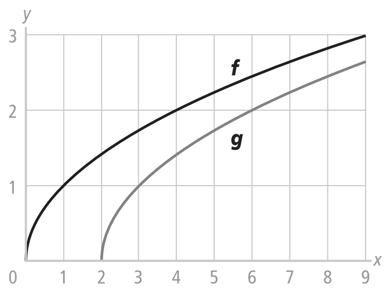
c Invullen van het punt $(4, 3)$ geeft $3 - 3 = n(4 - 4)$, en dit is waar voor elke waarde van n .

d De verticale lijn met vergelijking $x = 4$ behoort niet tot de familie.

2.2 Translaties

bladzijde 38

8a



b

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{8}$	3
$g(x)$	-	-	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$

c Voor elke waarde van x geldt $g(x) = f(x - 2)$.

d Door de grafiek van f twee eenheden naar rechts te schuiven ontstaat de grafiek van g .

e

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	0	1	1,41	1,73	2	2,24	2,45	2,65	2,83	3
$h(x)$	3	4	4,41	4,73	5	5,24	5,45	5,65	5,83	6

Door de grafiek van f drie eenheden omhoog te schuiven ontstaat de grafiek van h .

f De grafiek van k ontstaat door de grafiek van f twee eenheden naar rechts en drie eenheden omhoog te schuiven.

9a $g(-5) = \frac{1}{2}(-5)^2 + 4 \cdot (-5) + 8 = \frac{1}{2}$ en $f(-1) = \frac{1}{2}(-1)^2 = \frac{1}{2}$

$g(3) = \frac{1}{2}(3)^2 + 4 \cdot (3) + 8 = 24\frac{1}{2}$ en $f(7) = \frac{1}{2}(7)^2 = 24\frac{1}{2}$

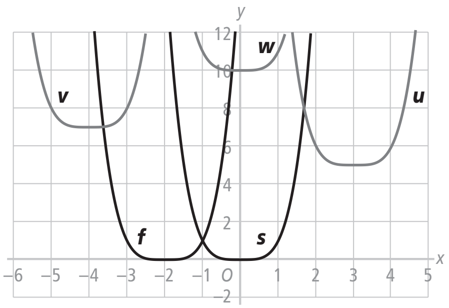
b $\frac{1}{2}(x+4)^2 = \frac{1}{2}(x+4) \cdot (x+4) = \frac{1}{2}(x^2 + 8x + 16) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 8$

c $f(x+4) = \frac{1}{2}(x+4)^2 = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 8 = g(x)$

De grafiek van g ontstaat door de grafiek van f vier eenheden naar links te schuiven.

bladzijde 39

10a



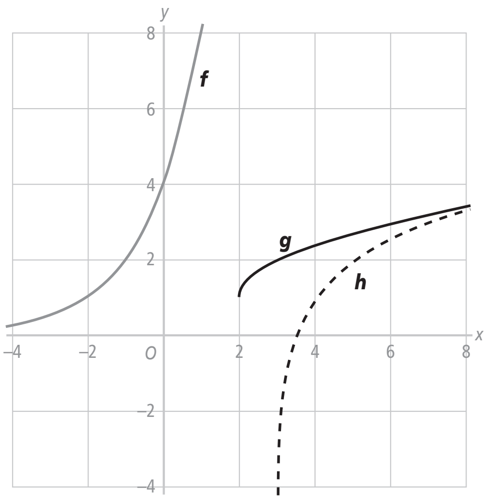
functie	s	t	u	v	w
top grafiek	(0, 0)	(–2, 0)	(3, 5)	(-4, 7)	(0, 10)

b De grafiek van t : twee eenheden naar links.
De grafiek van u : drie eenheden naar rechts en vijf eenheden omhoog.
De grafiek van v : vier eenheden naar links en zeven eenheden omhoog.
De grafiek van w : tien eenheden omhoog.

11a $g(x)=\dfrac{1}{x}$; drie eenheden naar rechts en twee eenheden omlaag.

b $f(x)=\dfrac{1}{x-3}-2$

12a

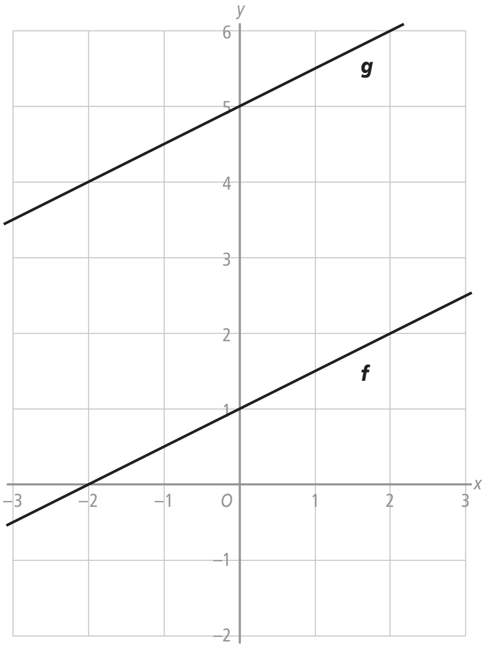


b

	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$
randpunt	geen	(2, 1)	geen
asymptoot	x-as	geen	$x = 3$

c De grafiek van f ontstaat door de grafiek van $p(x)=2^x$ twee eenheden naar links te schuiven.
De grafiek van g ontstaat door de grafiek van $q(x)=\sqrt{x}$ twee eenheden naar rechts en één eenheid omhoog te schuiven.
De grafiek van h ontstaat door de grafiek van $r(x)={}^{2}\log x$ drie eenheden naar rechts en één eenheid omhoog te schuiven.

13a



De grafiek van g ontstaat door de grafiek van f vier eenheden omhoog te schuiven.

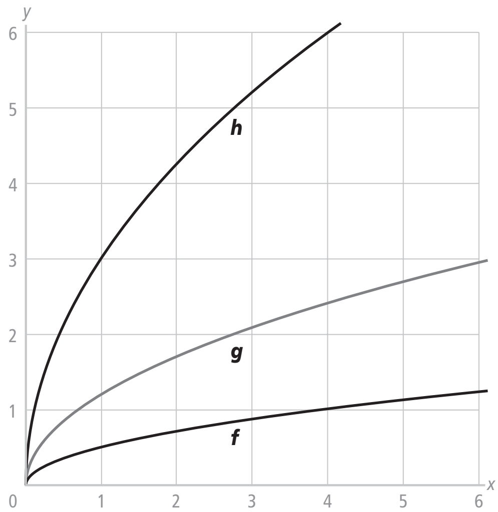
b De grafiek van g ontstaat door de grafiek van f acht eenheden naar links te schuiven.

c $f(x+8)=\frac{1}{2}(x+8)+1=\frac{1}{2}x+4+1=\frac{1}{2}x+5=g(x)$.

2.3 Verticale vermenigvuldiging

bladzijde 40

14a



b De afstand tot de x – as is achtereenvolgens $\frac{1}{2}$, 1,2 en 3 maal zo groot geworden.

c $a=-1$: de grafiek van f is gespiegeld in de x – as.

$a=-2$: de grafiek van f is gespiegeld in de x – as en vervolgens is de afstand van alle punten tot de x – as met factor twee vermenigvuldigd.

15a

	f	g
nulpunten	$x = 0$ en $x = 2$	x =t0 en $x = 2$
toppen	(1, –1)	$(1, -\frac{1}{2})$

b $\frac{1}{2} \cdot f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 2x) = \frac{1}{2}x^2 - x = g(x)$

De afstand van de grafiek van g tot de x – as is half zo groot als de afstand van de grafiek van f tot de x – as.

c

	$a = 3$	$a = -1$	$a = -5$
nulpunten	x = 0 en x = 2	x = 0 en x = 2	x = 0 en x = 2
toppen	(1, –3)	(1, 1)	(1, 5)

De grafiek van h_3 ontstaat uit de grafiek van f door vermenigvuldigen ten opzichte van de x – as met factor 3.

De grafiek van h_{-1} ontstaat door de grafiek van f te spiegelen in de x – as.

De grafiek van h_{-5} ontstaat door de grafiek van f te spiegelen in de x – as en vervolgens te vermenigvuldigen ten opzichte van de x – as met factor 5.

16a $f(x) = \dfrac{1}{x}$; factor 3.

b $f(x) = {}^2\log x$; factor 3.

c $f(x) = 2^x$; factor 40 want $10 \cdot 2^{x+2} = 10 \cdot 2^x \cdot 2^2 = 40 \cdot 2^x$.

d $f(x) = x^2$; factor -3.

17a $a \cdot {}^3\log 3 = 10$, dus $a = 10$.

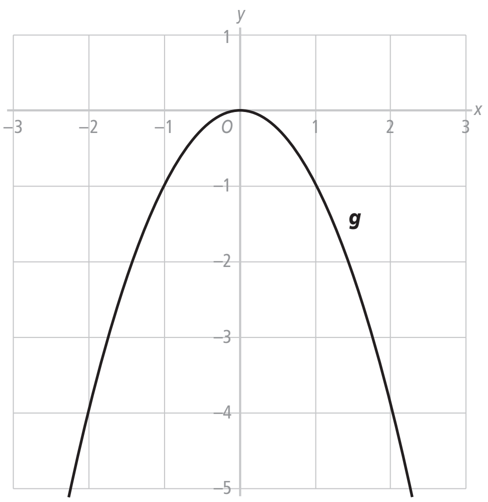
b $a \cdot {}^3\log 27 = -1$, dus $a \cdot 3 = -1$; hieruit volgt $a = -\frac{1}{3}$.

c Nee want $a \cdot {}^3\log 1 = 9$, dus $a \cdot 0 = 9$ en dat kan niet.

d De grafiek gaat door het punt $(3, a)$.

bladzijde 41

18a



De grafiek van g ontstaat door de grafiek van f te spiegelen in de x – as.

b $f(x) = -{}^2\log x$

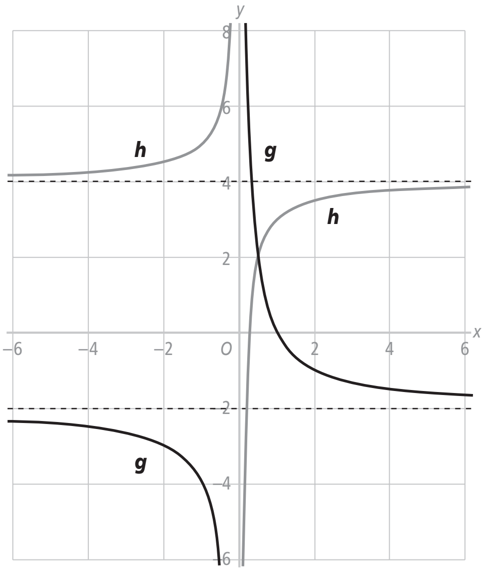
c $n(x) = -m(x)$

19a De grafiek van g ontstaat door de grafiek van f te spiegelen in de x – as en vervolgens drie eenheden naar links te schuiven.
De grafiek van h ontstaat door de grafiek van f met een factor $\frac{1}{2}$ te vermenigvuldigen ten opzichte van de x – as en vervolgens vier eenheden naar rechts en drie eenheden omlaag te schuiven.

b $g(x) = -(x+3)^2$
$h(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-4)^2 - 3$

20a $g(x) = \dfrac{2}{x} - 2$ en $h(x) = -\dfrac{1}{x} + 4$

b



Grafiek van g : $x = 0$ en $y = -2$
Grafiek van h : $x = 0$ en $y = 4$

21a De grafiek van f ontstaat door de grafiek van g twee eenheden naar rechts te schuiven.

b $f(x) = 3^{x-2} = 3^x \cdot 3^{-2} = \frac{1}{9} \cdot 3^x = \frac{1}{9} \cdot g(x)$, dus de grafiek van f kan ontstaan uit de van g door een vermenigvuldiging ten opzichte van de x – as met factor $\frac{1}{9}$.

c $k(x) = g^{x+c} = g^x \cdot g^c = g^c \cdot h(x)$
$k(x) = g^{x+c} = h(x+c)$
De grafiek van f kan ontstaan uit de grafiek van g door een vermenigvuldiging ten opzichte van de x – as met factor g^c en door een verschuiving naar links over $|c|$ eenheden, naar links als $c > 0$ en naar rechts als $c < 0$.

22 $g(x) = -3^{x-5} + 3$

23a $g(x) = -2 \cdot \cos(x-3)$

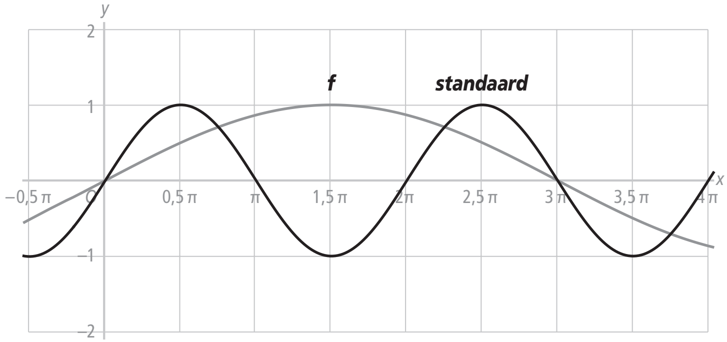
b Ja.

c Eerst verschuiving en dan vermenigvuldiging: $g(x) = -2 \cdot (3 + \cos x) = -6 - 2 \cdot \cos x$.
Eerst vermenigvuldiging en dan verschuiving: $g(x) = 3 - 2 \cdot \cos x$.
De functievoorschriften zijn nu verschillend.

2.4 Horizontale vermenigvuldiging

bladzijde 42

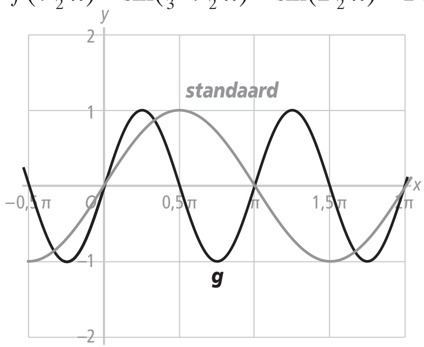
24a



Punten op de grafiek van f hebben een afstand tot de $y-$as die drie keer zo groot is als de afstand tot de $y-$as van de bijbehorende punten van de standaardgrafiek ; de periode wordt drie keer zo groot.

b $f(7\frac{1}{2}\pi)=\sin(\frac{1}{3}\cdot 7\frac{1}{2}\pi)=\sin(2\frac{1}{2}\pi)=1$.

c



De grafiek van g ontstaat door de standaardgrafiek ten opzichte van de $y-$as met factor $\frac{1}{2}$ te vermenigvuldigen ; de periode wordt gehalveerd.

25a $g(24)={}^2\log(\frac{1}{3}\cdot 24)={}^2\log(8)=3$, dus $x=24$.

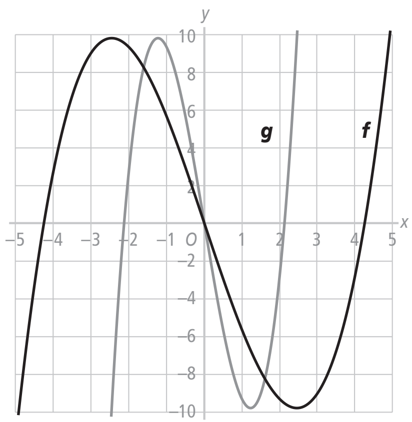
b $f(\frac{1}{3}x)={}^2\log(\frac{1}{3}x)=g(x)$, dus als $(x,\ y)$ een punt op de grafiek van g is, dan is $(\frac{1}{3}x,\ y)$ een punt op de grafiek van f .

c Vermenigvuldiging ten opzichte van de $y-$as met factor drie.

d De grafieken van f en h zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegeling in de $y-$as .

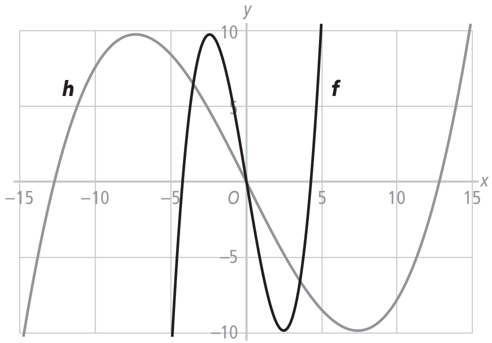
bladzijde 43

26a



De grafiek van g ontstaat door de grafiek van f ten opzichte van de $y-$as met factor $\frac{1}{2}$ te vermenigvuldigen.

b $h(x)=f(\frac{1}{3}x)=\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{3}x)^3-6\cdot(\frac{1}{3}x)=\frac{1}{81}x^3-2x$



De grafiek van h ontstaat door de grafiek van f ten opzichte van de y-as met factor 3 te vermenigvuldigen.

27a $g(x)=f(\frac{1}{2}x)=100(\frac{1}{2}x)^4=100\cdot\frac{1}{16}x^4=6{,}25x^4$

b $h(x)=f(3x)=100(3x)^4=100\cdot 81x^4=8\,100x^4$

28a $f(\frac{1}{3}x)=2\cdot(\frac{1}{3}x)^5+3=\frac{2}{243}x^5+3$

b $g(\frac{1}{3}x)=\dfrac{3}{\frac{1}{3}x}=\dfrac{9}{x}$

c $k(\frac{1}{3}x)={}^2\log\frac{1}{3}x={}^2\log\frac{1}{3}+{}^2\log x$

d $h(\frac{1}{3}x)=1+\sqrt{\frac{1}{3}x}=1+\sqrt{\frac{1}{3}x}=1+\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{x}$

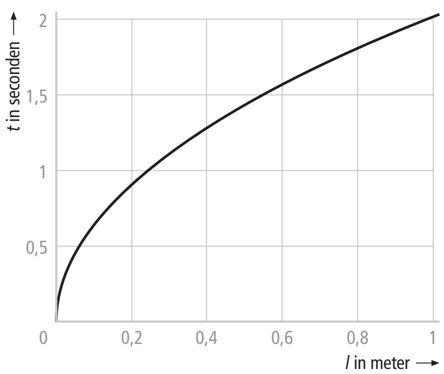
29a Met factor $\frac{1}{16}$.

b $f(x)=\sqrt{16}\cdot\sqrt{x}=4\cdot\sqrt{x}$, dus met factor 4.

c Ja, want voor $a>0$ en $x>0$ geldt $f_a(x)=\sqrt{ax}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{x}$, dus een vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met factor $\frac{1}{a}$ geeft hetzelfde resultaat als een vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met factor $\sqrt{a}$ en voor $a<0$ en $x<0$ geldt $f_a(x)=\sqrt{ax}=\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-x}$, dus een vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met factor $-\frac{1}{a}$ geeft hetzelfde resultaat als een vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met factor $\sqrt{-a}$.

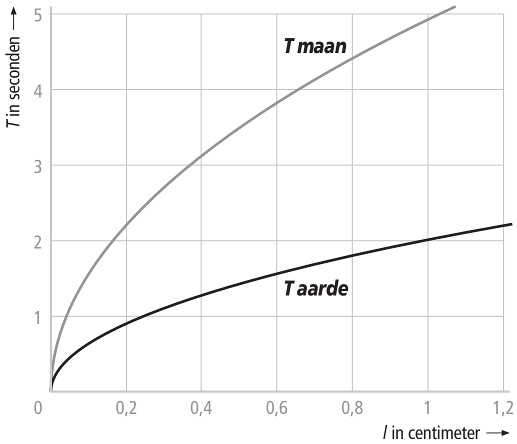
30a Als l vier keer zo klein wordt, dan wordt de slingertijd $\sqrt{4}=2$ maal zo klein.

b



c $T=2\cdot\sqrt{\dfrac{\frac{1}{100}l}{g}}=2\cdot\frac{1}{10}\cdot\sqrt{\dfrac{l}{g}}=0{,}2\cdot\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

d $T=2\cdot\sqrt{\dfrac{l}{\frac{1}{6}g}}=2\cdot\sqrt{\dfrac{6l}{g}}=2\sqrt{6}\cdot\sqrt{\dfrac{l}{g}}$



e De grafiek van T_{maan} ontstaat door de grafiek van T_{aarde} ten opzichte van de $y-$as met factor $\frac{1}{6}$ te vermenigvuldigen.
De grafiek van T_{maan} ontstaat ook door de grafiek van T_{aarde} ten opzichte van de $x-$as met factor $\sqrt{6}$ te vermenigvuldigen.

2.5 Transformaties na elkaar

bladzijde 44

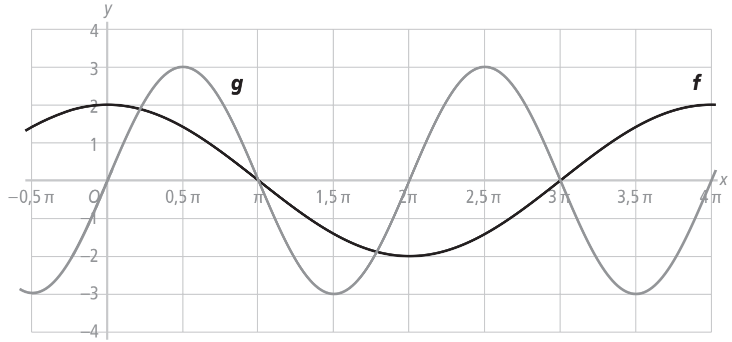
31a Nee , want $f(x-1)=-1+(2(x-1)-1)^2=-1+(2x-3)^2=(2x)^2-12x+8\neq g(x)$.
b $-1+(2x-1)^2=-1+(2(x-\frac{1}{2}))^2=-1+2^2\cdot(x-\frac{1}{2}))^2=-1+4\cdot(x-\frac{1}{2}))^2$.
c Vermenigvuldiging met factor 4 ten opzichte van de $x-$as gevolgd door een verschuiving over $\frac{1}{2}$ eenheid naar rechts en één eenheid omlaag.

bladzijde 45

32 Punt $(0,-1)$ ligt op de parabool met top $(3,-2)$: $f(x)=a\cdot(x-3)^2-2$, dus $f(0)=a\cdot(0-3)^2-2=-1$; hieruit volgt $a=\frac{1}{9}$ en dus $f(x)=\frac{1}{9}\cdot(x-3)^2-2$.
Vermenigvuldiging van de standaardgrafiek met -2 gevolgd door vermenigvuldiging ten opzichte van de $y-$as met factor $\frac{1}{\pi}$: $g(x)=-2\cdot\sin(\pi x)$.
Vermenigvuldiging van de standaardgrafiek met factor a gevolgd door een verschuiving over twee eenheden naar rechts en twee eenheden omhoog geeft $h(x)=\dfrac{a}{x-2}+2$; het punt $(0,1)$ ligt op de grafiek: $h(0)=\dfrac{a}{0-2}+2=-\dfrac{a}{2}+2=1$, dus $a=2$ en $h(x)=\dfrac{2}{x-2}+2$.

33a De grafiek van f ontstaat door de grafiek van $g(x)={}^2\log x$ zes eenheden naar rechts en acht eenheden omhoog te schuiven.
b De grafiek van h ontstaat door de grafiek van $g(x)=2^x$ te vermenigvuldigen met factor drie ten opzichte van de $x-$as en met factor twee ten opzichte van de $y-$as.
c De grafiek van $k(x)=(3(x-2))^2$ ontstaat door de grafiek van $g(x)=x^2$ te vermenigvuldigen met factor drie ten opzichte van de $x-$as en vervolgens twee eenheden naar rechts te schuiven.

34a



b Vermenigvuldigen met factor $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de $x-$as en vermenigvuldigen met factor $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de $y-$as.

c Vermenigvuldigen met factor $\frac{1}{3}$ ten opzichte van de $x-$as en over $\frac{1}{2}\pi$ eenheden naar links schuiven.

d Vermenigvuldigen met factor $1\frac{1}{2}$ ten opzichte van de $x-$as, vermenigvuldigen met factor $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de $y-$as en over $\frac{1}{2}\pi$ eenheden naar rechts schuiven.

35a Volgorde heeft geen invloed op het resultaat. Bijvoorbeeld $f(x)=\sqrt{x-3}+2$.

b Volgorde heeft wel invloed op het resultaat. Bijvoorbeeld $f(x)=3\cdot\sqrt{x}+2$ is niet hetzelfde als $g(x)=3\cdot(\sqrt{x}+2)$.

c Volgorde heeft geen invloed op het resultaat. Bijvoorbeeld $f(x)=3\sqrt{x+1}$.

d Volgorde heeft wel invloed op het resultaat. Bijvoorbeeld $f(x)=\sqrt{2(x-3)}$ is niet hetzelfde als $g(x)=\sqrt{2x-3}$.

e Volgorde heeft geen invloed op het resultaat. Bijvoorbeeld $f(x)=\sqrt{2x}+1$.

2.6 Gemengde opdrachten

bladzijde 46

36a Twee eenheden omhoog schuiven.

b Een vermenigvuldiging met factor $\frac{1}{4}$ ten opzichte van de $y-$as want $f(x)=2+{}^2\log x={}^2\log 2^2+{}^2\log x={}^2\log 4x$.

c $g(x)=-2+{}^2\log x$.

d Een vermenigvuldiging met factor 4 ten opzichte van de $y-$as want $g(x)=-2+{}^2\log x={}^2\log 2^{-2}+{}^2\log x={}^2\log \frac{1}{4}x$.

e Een vermenigvuldiging met factor $\frac{1}{3}$ ten opzichte van de $x-$as want

$${}^8\log x=\frac{{}^2\log x}{{}^2\log 8}=\frac{{}^2\log x}{3}=\tfrac{1}{3}\cdot{}^2\log x.$$

37a $g(x)=-x+4\cdot\sqrt{x}$

b Ze hebben dezelfde vorm; het spiegelbeeld van de grafiek van f bij spiegeling in de lijn $y=3$, de grafiek van k, ontstaat ook door de grafiek van g over 6 eenheden naar boven te schuiven.

c $h(x)=6+g(x)=6-x+\sqrt{x}$

d Spiegelen in de $y-$as gevolgd door een verschuiving over tien eenheden naar rechts geeft hetzelfde resultaat als spiegelen in de lijn $x=5$: als $p(x)=f(-x)=(-x)-4\cdot\sqrt{(-x)}=-x-4\cdot\sqrt{-x}$ dan is $k(x)=p(x-10)=-(x-10)-4\cdot\sqrt{-(x-10)}=-x+10-4\cdot\sqrt{-x+10}$.

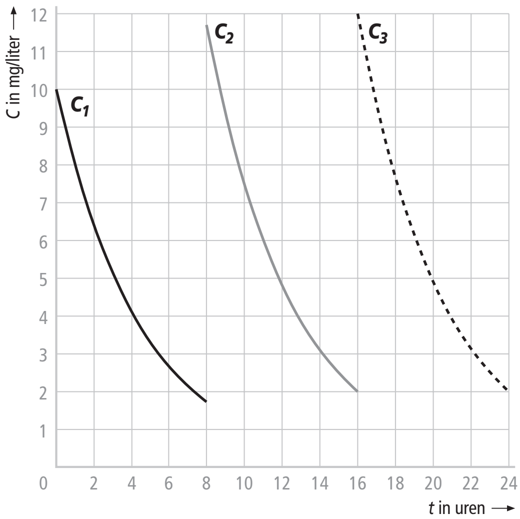
38a $C_1(0) = 10 \cdot 0{,}8^0 = 10$ mg/liter.
$C_1(8) = 10 \cdot 0{,}8^8 \approx 1{,}7$ mg/liter.

b Ongeveer $10 + 1{,}7 = 11{,}7$ mg/liter.

c De afname van de concentratie van het geneesmiddel in de tweede injectie verloopt gelijk aan de afname van de concentratie van het geneesmiddel in de eerste injectie, maar met een vertraging van 8 uur, dus $C_2(t) = C_1(t) + C_1(t-8) = 10 \cdot 0{,}8^t + 10 \cdot 0{,}8^{t-8}$.

d $C_3(t) = 10 \cdot 0{,}8^t + 10 \cdot 0{,}8^{t-8} + 10 \cdot 0{,}8^{t-16}$

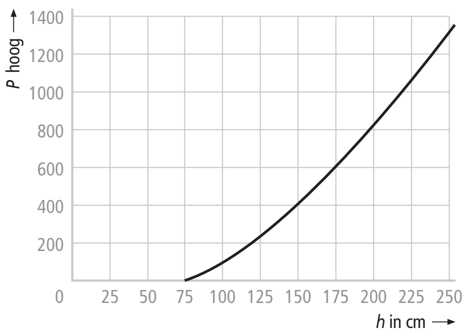
e



Het bezwaar van het injectieschema is, dat de concentratie van het medicijn direct na elke nieuwe injectie hoger is en dat de afname steeds sneller gaat.

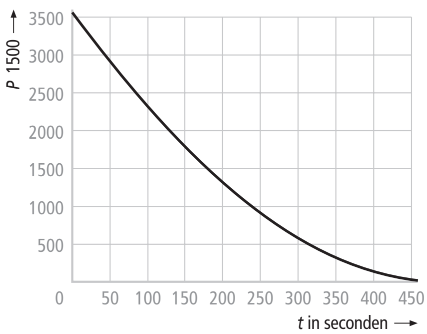
bladzijde 47

39a



Er worden pas punten toegekend bij een sprong hoger dan 75 cm ; voor waarden kleiner dan 75 heeft de formule geen betekenis.

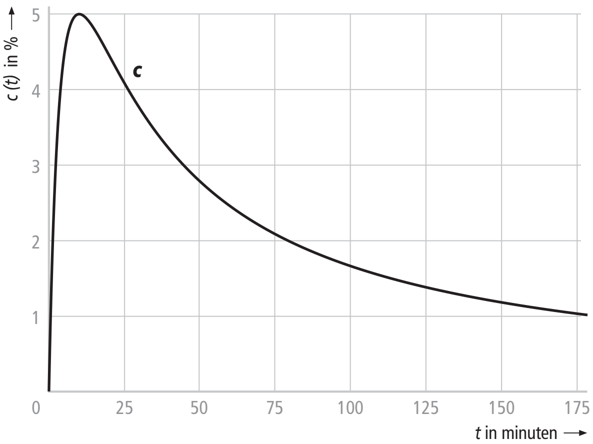
b



Er worden pas punten toegekend bij een tijd sneller dan 480 seconden; voor waarden groter dan 480 heeft de formule geen betekenis.

c De gescoorde punten bij een tijd 4,5 minuten: $P_{1500} \approx 745$ en een sprong van 2,05 m: $P_{hoog} \approx 850$ zijn van vergelijkbare grootte dankzij het feit, dat de vermenigvuldigingsfactoren in de beide formules zo verschillend van grootte zijn.

40a Als de injectie wordt toegediend neemt de concentratie van het verdovingsmiddel eerst snel toe tot een maximale waarde en neemt daarna langzaam af waarbij de afname steeds trager verloopt.



b De maximale concentratie is 5% na 10 minuten.

c De concentratie zal op den duur afnemen tot 0% ; de grafiek nadert op den duur tot de t-as ; voor grote waarden van t geldt $c(t) \approx \dfrac{200t}{t^2} = \dfrac{200}{t}$ en dit nadert naar 0.

d Na ongeveer $60 \cdot 0{,}557 \approx 33$ seconden verliest de patiënt het bewustzijn en na ongeveer 179 minuten komt de patiënt weer bij kennis.

e Voor de tweede injectie geldt: $c(t) = \dfrac{100 \cdot (t-60)}{((t-60)+10)^2} = \dfrac{100 \cdot (t-60)}{(t-50)^2}$; voor de totale concentratie geldt dus: $c(t) = \dfrac{200 \cdot t}{(t+10)^2} + \dfrac{100 \cdot (t-60)}{(t-50)^2}$.

f $t \geq 60$

g Plot de grafieken van $Y_1 = \dfrac{200 \cdot x}{(x+10)^2} + \dfrac{100 \cdot (x-60)}{(x-50)^2}$ en $Y_2 = 1$ en bereken de coördinaten van het snijpunt van beide grafieken: (302,1).
De operatie mag maximaal 302 minuten duren.

ICT Standaard grafieken verschuiven

bladzijde 48

I-1

	x^3	$\frac{1}{x}$	2^x	${}^3\log x$	x^4	$\sin x$	$\sqrt{x}$
Domein	$\mathbb{R}$	$\langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$	$\mathbb{R}$	$\langle 0, \rightarrow\rangle$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$[0, \rightarrow\rangle$
Bereik	$\mathbb{R}$	$\langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$	$\langle 0, \rightarrow\rangle$	$\mathbb{R}$	$\langle 0, \rightarrow\rangle$	$[-1, 1]$	$[0, \rightarrow\rangle$
Snijpunt x-as	(0, 0)	-	-	(1, 0)	(0, 0)	$(0 (\text{mod } \pi), 0)$	(0, 0)
Snijpunt y-as	(0, 0)	-	(0, 1)	-	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
Randpunt	-	-	-	-	-	-	(0, 0)
Asymptoten	-	$x = 0$ en $y = 0$	$y = 0$	$x = 0$	-	-	-
Periode	-	-	-	-	-	2	-
Stijgen	$\mathbb{R}$	-	$\mathbb{R}$	$\langle 0, \rightarrow\rangle$	$\langle 0, \rightarrow\rangle$	$\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle (\text{mod } \pi)$	$[0, \rightarrow\rangle$
Dalen	-	$\langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$	-	-	$\langle \leftarrow, 0\rangle$	$\langle \frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi\rangle (\text{mod } \pi)$	-

I-2a De grafiek van $y = -f(x)$ ontstaat uit de standaardgrafiek door te spiegelen in de x-as. De grafiek van $y = f(-x)$ ontstaat uit de standaardgrafiek door te spiegelen in de y-as.

b Als de grafieken symmetrisch zijn ten opzichte van de x-as of y-as zie je soms geen verschil.

I-3a $y = x^2 + 2$

b $y = x^2 - 3$

c Het aantal eenheden dat je naar boven of beneden schuift, tel je op of trek je af van $y = x^2$.

d $y = x^2 + 2 - 3 = x^2 - 1$

I-4a $y = (x-2)^2 = (x-2)(x-2) = x^2 - 2x - 2x + 4 = x^2 - 4x + 4$

b $(0, 0)$ en $(2, 0)$

c $y = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

Toppen $(0, 0)$ en $(-3, 0)$.

d Waarschijnlijk de notatie met de haakjes, omdat je daar makkelijk de top uit af kunt leiden.

I-5 $y = (x-3)^2 + 2$

bladzijde 49

I-6a d zorgt voor een verticale verschuiving en c zorgt voor een horizontale verschuiving.

b $g(x) = (x-2)^3$

c $h(x) = 3^x - 2$

d $k(x) = \sin(x+2) + 1$

I-7 $y = x^3 + 3$ | $y = (x-2)^4$
$y = \sqrt{x-2}$ | $y = 3^x - 2$
$y = (x+2)^2 + 1$ | $y = {}^2\log x + 2$
$y = \sin(x-1) - 2$ | $y = \sqrt{x} + 3$
$y = 2^{x+3}$ | $y = x + 4$

I-8a $\sqrt{x}$, 1 naar rechts schuiven
b $\sqrt{x}$, 1 naar beneden schuiven
c x^3, 2 naar links schuiven
d ${}^2\log x$, 3 naar boven schuiven

I-9 $y = \dfrac{1}{x-2} - 3$, de volgorde is niet van belang.

ICT Standaardgrafieken vervormen

bladzijde 50

I-10a $y = 2x^2$ **b** $y = -3x^2$

I-11a Als $a > 1$ wordt de amplitude a keer zo groot.
b Als $a < 0$ worden alle uitkomsten tegengesteld en a keer zo groot. $a = -1$ betekent spiegelen in de x-as.
c De afstand tot de x-as wordt a keer zo groot.

I-12a $\sin x$; -3
b $\dfrac{1}{x}$; 3
c ${}^2\log x$; 3
d x^3 ; 1,7
e 2^x ; 40 want $10 \cdot 2^2 \cdot 2^x = 40 \cdot 2^x$
f x^2 ; -3

I-13 $y = 2x^3$ | $y = 1\tfrac{1}{2} \cdot 2^x$
$y = 3\sqrt{x}$ | $y = -x^4$
$y = \tfrac{1}{2}\sin x$ | $y = 4x$

bladzijde 51

I-14a Als $b > 1$ wordt de periode kleiner, de afstand tot de y-as wordt b keer zo klein.
b Als $b > 1$ krimpt de grafiek in.
c De afstand tot de y-as wordt b keer zo klein.

I-15a $f(\tfrac{1}{3}x) = 2(\tfrac{1}{3}x)^5 + 3 = \tfrac{2}{243}x^5 + 3$
b $g(\tfrac{1}{3}x) = \dfrac{3}{\tfrac{1}{3}x} = \dfrac{9}{x}$
c $m(\tfrac{1}{3}x) = 1 + \sqrt{\tfrac{1}{3}x}$
d $n(\tfrac{1}{3}x) = 3^{\frac{1}{3}x} - 4$

I-16 $y = (2x)^3$ | $y = {}^2\log(\tfrac{1}{3}x)$
$y = \sqrt{(\tfrac{1}{2}x)}$ | $y = (\tfrac{1}{2}x)^4$
$y = \sin(3x)$ | $y = 4x$

I-17a Vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met factor $\frac{1}{16}$.

b $f(x)=\sqrt{16x}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{x}=4\sqrt{x}$, dus ook een verticale vermenigvuldiging met factor 4 is mogelijk.

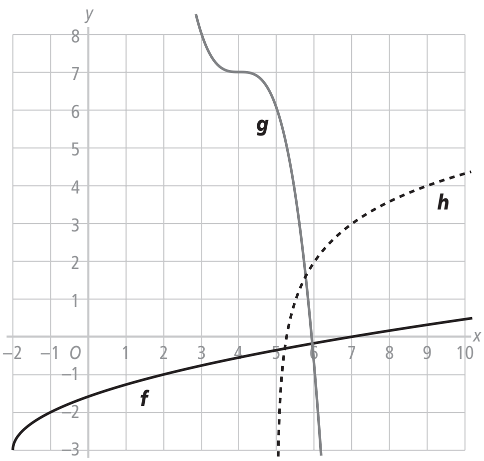
c $\sqrt{ax}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{x}$ (mits $a>0$), dus horizontaal met factor $\frac{1}{a}$ en verticaal met factor $\sqrt{a}$.

Test jezelf

bladzijde 54

T-1 Links: grafiek ontstaat door de standaardgrafiek $y=x^2$ twee eenheden naar rechts en drie eenheden omlaag te schuiven.
Midden: grafiek ontstaat door de standaardgrafiek $y=\dfrac{1}{x}$ twee eenheden naar rechts en één eenheid omlaag te schuiven.
Rechts: midden: grafiek ontstaat door de standaardgrafiek $y=x^3$ één eenheid naar links en twee eenheden omlaag te schuiven.

T-2a



Grafiek van f : randpunt $(-2,-3)$.
Grafiek van g : top in $(4, 7)$.
Grafiek van h: verticale asymptoot $x=5$.

b De grafiek van f ontstaat door de standaardgrafiek twee eenheden naar links en drie eenheden omlaag te schuiven.
De grafiek van g ontstaat door de standaardgrafiek vier eenheden naar rechts en zeven eenheden omhoog te schuiven.
De grafiek van h ontstaat door de standaardgrafiek vijf eenheden naar rechts en twee eenheden omhoog te schuiven.

T-3a Vermenigvuldigen met factor 3 ten opzichte van de $x-$as.

b Vermenigvuldigen met factor $0{,}4$ ten opzichte van de $x-$as.

c Vermenigvuldigen met factor 7 ten opzichte van de $x-$as.

d Vermenigvuldigen met factor -1 ten opzichte van de $x-$as.

T-4a Vermenigvuldigen met factor $-\frac{1}{2}$ ten opzichte van de $y-$as.

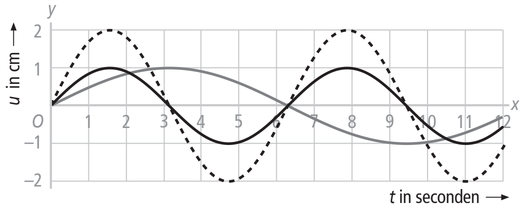
b Vermenigvuldigen met factor $\frac{1}{8}$ ten opzichte van de $y-$as.

c Vermenigvuldigen met factor $\frac{2}{3}$ ten opzichte van de $y-$as want $\dfrac{2}{3x}=\dfrac{1}{\frac{3}{2}x}$.

T-5a $u = 2 \cdot \sin t$

b $u = \sin(\frac{1}{2}t)$

c



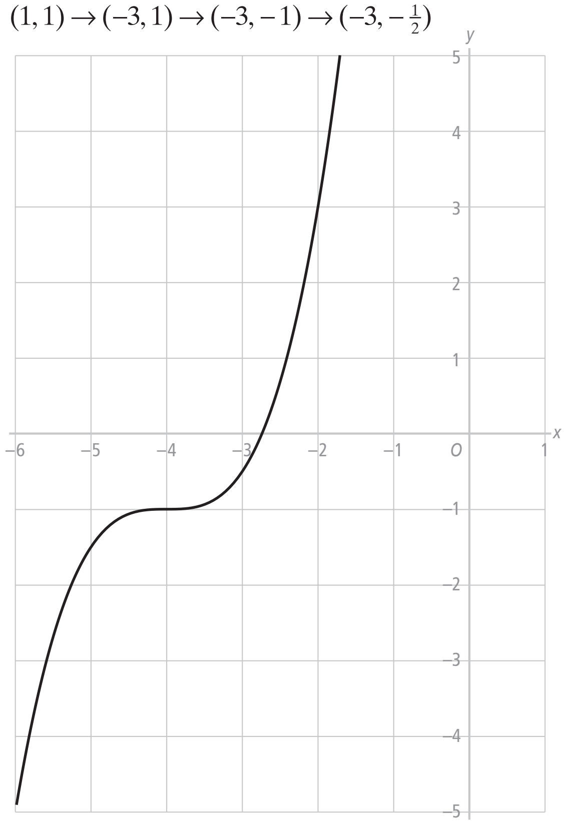
T-6a Links: vermenigvuldigen met factor 3 ten opzichte van de x – as, vermenigvuldigen met factor $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de y – as en één eenheid naar rechts schuiven.
Rechts: vermenigvuldigen met factor 2 ten opzichte van de x – as en twee eenheden naar rechts schuiven.

b Links: $f(x) = 3 \cdot \sin 2(x-1)$.
Rechts: $g(x) = 2 \cdot {}^{2}\log(x-2)$.

T-7a $(0,0) \to (-4,0) \to (-4,-2) \to (-4,-1)$

b $(1,1) \to (-3,1) \to (-3,-1) \to (-3,-\frac{1}{2})$

c



d $g(x) = \frac{1}{2} \cdot ((x+4)^3 - 2) = \frac{1}{2} \cdot (x+4)^3 - 1$

T-8a $f(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{2}x - 1} = \dfrac{2}{x-2}$

b $f(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{2}(x-1)} = \dfrac{2}{x-1}$

c $f(x) = 2 \cdot (\dfrac{1}{x} + 4) = \dfrac{2}{x} + 8$

d $f(x) = \dfrac{2}{x} + 4$

T-9 De grafiek van f ontstaat door de standaardgrafiek drie eenheden naar rechts en twee eenheden omhoog te schuiven want $f(x) = \dfrac{2x-5}{x-3} = \dfrac{2x-6}{x-3} + \dfrac{1}{x-3} = 2 + \dfrac{1}{x-3}$.

Blok 1 - Vaardigheden

bladzijde 58

1a $\frac{x+2}{x^2}+\frac{2}{x-1}=\frac{(x+2)(x-1)}{x^2(x-1)}+\frac{2\cdot x^2}{x^2(x-1)}=\frac{x^2+x-2+2x^2}{x^2(x-1)}=\frac{3x^2+x-2}{x^2(x-1)}$

b $\frac{x-1}{x+4}-\frac{x+4}{x-1}=\frac{(x-1)(x-1)}{(x+4)(x-1)}-\frac{(x+4)(x+4)}{(x+4)(x-1)}=\frac{(x^2-2x+1)-(x^2+8x+16)}{(x+4)(x-1)}=$

$\frac{-10x-15}{(x+4)(x-1)}$

c $\frac{4}{2-x}-\frac{4+x}{2+x}=\frac{4(2+x)}{(2-x)(2+x)}-\frac{(4+x)(2-x)}{(2-x)(2+x)}=\frac{(8+4x)-(8-2x-x^2)}{(2-x)(2+x)}=\frac{x^2+6x}{(2-x)(2+x)}$

d $\frac{x}{2}-\frac{2x^2+1}{4x}=\frac{x\cdot 4x}{2\cdot 4x}-\frac{(2x^2+1)\cdot 2}{2\cdot 4x}=\frac{4x^2-(4x^2+2)}{8x}=\frac{-2}{8x}=-\frac{1}{4x}$

e $\frac{1}{2x-1}+\frac{2x+1}{x+1}=\frac{1\cdot(x+1)}{(2x-1)(x+1)}+\frac{(2x+1)(2x-1)}{(2x-1)(x+1)}=\frac{(x+1)+(4x^2-1)}{(2x-1)(x+1)}=\frac{4x^2+x}{(2x-1)(x+1)}$

f $\frac{-x^3}{2x-1}+\frac{2x^2+1}{4}=\frac{-4x^3}{4\cdot(2x-1)}+\frac{(2x^2+1)(2x-1)}{4\cdot(2x-1)}=\frac{-4x^3+4x^3-2x^2+2x-1}{4\cdot(2x-1)}=$

$\frac{-2x^2+2x-1}{4\cdot(2x-1)}$

2a $\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}-\frac{4}{x^4}=\frac{2x^2}{x^4}+\frac{3x}{x^4}-\frac{4}{x^4}=\frac{2x^2+3x-4}{x^4}$

b $\frac{-x}{x-2}+3=\frac{-x}{x-2}+\frac{3(x-2)}{x-2}=\frac{-x+3x-6}{x-2}=\frac{2x-6}{x-2}$

c $\frac{x}{x+1}-x=\frac{x}{x+1}-\frac{x(x+1)}{x+1}=\frac{x-(x^2+x)}{x+1}=\frac{-x^2}{x+1}$

d $x+2-\frac{3}{x-1}=\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}-\frac{3}{x-1}=\frac{(x^2+x-2)-3}{x-1}=\frac{x^2+x-5}{x-1}$

bladzijde 59

3a $\frac{-2x^2}{5}\cdot\frac{10}{3x}=\frac{-20x^2}{15x}=\frac{-4x}{3}=-1\tfrac{1}{3}x$

b $\frac{-x}{4}\cdot\frac{-8}{x^3}=\frac{8x}{4x^3}=\frac{2}{x^2}$

c $3x\cdot\frac{-2}{x}\cdot-\frac{3}{4}=\frac{3x}{1}\cdot\frac{-2}{x}\cdot\frac{-3}{4}=\frac{18x}{4x}=4\tfrac{1}{2}$

d $-x^2\cdot\frac{-1}{x^3}=\frac{x^2}{x^3}=\frac{1}{x}$

e $\frac{5}{3x}\cdot-\frac{1}{3}x=\frac{5}{3x}\cdot\frac{-x}{3}=\frac{-5x}{9x}=-\tfrac{5}{9}$

f $\frac{-5}{3x^2}\cdot-1\tfrac{1}{2}x=\frac{-5}{3x^2}\cdot\frac{-3x}{2}=\frac{15x}{6x^2}=\frac{5}{2x}$

4a $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^2=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 4x^2-4+\frac{1}{x^2}$

b $-2x^3\cdot\left(\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x}-1\right)=\frac{-8x^3}{x^2}-\frac{6x^3}{x}+2x^3 = -8x-6x^2+2x^3$

c $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2-\left(\frac{1}{x}\right)^2 = x^2-\frac{1}{x^2}$

d $\frac{-3}{x^2}(x^2+3x+2)=\frac{-3x^2}{x^2}+\frac{-9x}{x^2}+\frac{-6}{x^2}=\frac{-3x^2-9x-6}{x^2} = -\frac{3x^2+9x+6}{x^2}$

bladzijde 60

5a $\frac{2x}{x+1}=\frac{1}{6x}\Rightarrow 2x\cdot 6x=1\cdot(x+1)\Rightarrow 12x^2=x+1\Rightarrow 12x^2-x-1=0\Rightarrow$

$x_1=\frac{1+\sqrt{(-1)^2-4\cdot 12\cdot(-1)}}{24}=\frac{1+\sqrt{49}}{24}=\frac{1+7}{24}=\frac{1}{3}$ of

$x_2=\frac{1-\sqrt{(-1)^2-4\cdot 12\cdot(-1)}}{24}=\frac{1-\sqrt{49}}{24}=\frac{1-7}{24}=-\frac{1}{4}$ (beide oplossingen voldoen)

b $\frac{x^2+1}{x^2-1}=5\Rightarrow x^2+1=5\cdot(x^2-1)\Rightarrow x^2+1=5x^2-5\Rightarrow 4x^2=6\Rightarrow$

$x^2=1\frac{1}{2}\Rightarrow\ x=\sqrt{1\frac{1}{2}}$ of $x=-\sqrt{1\frac{1}{2}}$ (beide oplossingen voldoen)

c $\frac{2}{x-1}=\frac{4x}{x+3}\Rightarrow 2\cdot(x+3)=4x\cdot(x-1)\Rightarrow 2x+6=4x^2-4x\Rightarrow$

$4x^2-6x-6=0\Rightarrow 2x^2-3x-3=0\Rightarrow$

$x_1=\frac{3+\sqrt{(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-3)}}{4}=\frac{3+\sqrt{33}}{4}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{33}$ of

$x_2=\frac{3-\sqrt{(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-3)}}{4}=\frac{3-\sqrt{33}}{4}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{33}$ (beide oplossingen voldoen)

d $-2\cdot\frac{1}{x}+2\cdot\frac{1}{4x}=3\Rightarrow\frac{-2}{x}+\frac{2}{4x}=3\Rightarrow\frac{-4}{2x}+\frac{1}{2x}=3\Rightarrow\ \frac{-3}{2x}=3\Rightarrow 2x=-1\Rightarrow\ x=-\frac{1}{2}$

6a $\frac{\frac{p}{p-1}}{3}=\frac{\frac{p}{p-1}\cdot(p-1)}{3\cdot(p-1)}=\frac{p}{3(p-1)}$

b $\frac{\frac{x-1}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\frac{\frac{x-1}{x^2}\cdot x^2}{\frac{1}{x}\cdot x^2}=\frac{x-1}{x}$

7a $f(x)=2x-5+\frac{3}{x+1}$ Het domein wordt beperkt door de $x+1$ in de noemer, die mag geen 0 zijn.
Dus $D_f=\langle\leftarrow,-1\rangle\cup\langle -1,\rightarrow\rangle$.

b $f(x) = 2x - 5 + \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{(2x-5)(x+1)}{x+1} + \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{2x^2 + 2x - 5x - 5 + 3}{x+1} = \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x+1}$

c $f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x+1} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow$

$x_1 = \dfrac{3 + \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{4} = \dfrac{3 + \sqrt{25}}{4} = \dfrac{3+5}{4} = 2$ of

$x_2 = \dfrac{3 - \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{4} = \dfrac{3 - \sqrt{25}}{4} = \dfrac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$

De oplossing is dus $x = 2$ of $x = -\frac{1}{2}$.

8a $f(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x-4}$ het domein is dan: $D_f = \langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, 4 \rangle \cup \langle 4, \rightarrow \rangle$.

b $f(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x-4} = \dfrac{3(x-4)}{x(x-4)} + \dfrac{2x}{x(x-4)} = \dfrac{3x - 12 + 2x}{x(x-4)} = \dfrac{5x-12}{x(x-4)}$

bladzijde 61

9a $\dfrac{1}{3}p\left(\dfrac{1}{p^2} - \dfrac{2}{p}\right) = \dfrac{p}{3} \cdot \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{p}{3} \cdot \dfrac{2}{p} = \dfrac{p}{3p^2} - \dfrac{2p}{3p} = \dfrac{1}{3p} - \dfrac{2}{3}$

b $-\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2}{3p} + 6\right) = \dfrac{-4}{9p} - \dfrac{12}{3} = -\dfrac{4}{9p} - 4$

c $\dfrac{(p-1)^2 - (p+1)^2}{p^2} = \dfrac{(p^2 - 2p + 1) - (p^2 + 2p + 1)}{p^2} = \dfrac{-4p}{p^2} = -\dfrac{4}{p}$

d $\dfrac{-2}{p^2}(p^3 - 4p^2 + 3p + 2) = \dfrac{-2p^3 + 8p^2 - 6p - 4}{p^2}$

10a Een snijpunt met de x-as vind je door op te lossen $f(x) = 0$.

Dus $1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{x^2} + \dfrac{x}{x^2} + \dfrac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0$

Voor deze laatste kwadratische vergelijking geldt: Discriminant =
$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$

De vergelijking heeft dus geen oplossing. Er zijn dus geen snijpunten met de x-as.

b Eén eenheid naar rechts schuiven betekent dat je x moet vervangen door $x - 1$.

Je krijgt dan: $g(x) = f(x-1) = \dfrac{(x-1)^2 + (x-1) + 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x + 1 + x - 1 + 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2}$

c Eén eenheid naar beneden schuiven betekent dat de functiewaarden 1 kleiner worden.
Je krijgt dan

$$h(x) = g(x) - 1 = \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2} - 1 = \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2} - \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2} - \frac{x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2} = \frac{x}{(x-1)^2}$$

11a De tweede vergelijking: $3x-2y=4 \Rightarrow -2y=-3x+4 \Rightarrow y=1\tfrac{1}{2}x-2$

b De eerste vergelijking: $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=-4 \Rightarrow$ (tweede vergelijking invullen)

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{1\tfrac{1}{2}x-2}=-4 \Rightarrow \frac{2}{x}+\frac{6}{3x-4}=-4$$

c $$\frac{2}{x}+\frac{6}{3x-4}=-4 \Rightarrow \frac{2(3x-4)}{x(3x-4)}+\frac{6x}{x(3x-4)}=-4 \Rightarrow \frac{6x-8+6x}{x(3x-4)}=-4 \Rightarrow$$

$$\frac{12x-8}{x(3x-4)}=\frac{-4}{1} \Rightarrow 12x-8=-4x(3x-4) \Rightarrow 12x-8=-12x^2+16x \Rightarrow$$

$$12x^2-4x-8=0 \Rightarrow 3x^2-x-2=0 \Rightarrow (3x+2)(x-1)=0 \Rightarrow$$

$3x+2=0 \Rightarrow x=-\tfrac{2}{3}$ of $x-1=0 \Rightarrow x=1$

d $x=-\tfrac{2}{3} \Rightarrow y=1\tfrac{1}{2}\cdot -\tfrac{2}{3}-2=-1-2=-3$

$x=1 \Rightarrow y=1\tfrac{1}{2}\cdot 1-2=-\tfrac{1}{2}$

De oplossingen zijn dus $x=-\tfrac{2}{3}$ en $y=-3$ of $x=1$ en $y=-\tfrac{1}{2}$.

12 $\begin{cases} y-2x=-2 \Rightarrow y=2x-2 \\ \dfrac{y}{x}+1=x \end{cases}$ De eerste vergelijking invullen in de tweede geeft

$$\frac{2x-2}{x}+1=x \Rightarrow \frac{2x-2}{x}+\frac{x}{x}=x \Rightarrow \frac{3x-2}{x}=\frac{x}{1} \Rightarrow 3x-2=x^2 \Rightarrow$$

$x^2-3x+2=0 \Rightarrow (x-2)(x-1)=0 \Rightarrow x=2$ of $x=1$

$x=2 \Rightarrow y=2\cdot 2-2=2$ en $x=1 \Rightarrow y=2\cdot 1-2=0$

De oplossingen zijn dus: $x=2$ en $y=2$ of $x=1$ en $y=0$.

ICT - Logaritmische schalen

bladzijde 62

1a Het voordeel van deze grafiek is dat je voor kleine waarden van t de oppervlakte goed kunt aflezen. Het nadeel is dat dit voor waarden van t die groter dan 5 zijn niet meer lukt.

b Zet bij assen instellen de verticale waarde op 21000. Je kunt dan voor waarden groter dan 5 redelijk goed de oppervlakte aflezen, maar nu lukt het voor waarden kleiner dan 5 weer niet.

2a De verdeling op de verticale as neemt bij elke stap met een factor 10 toe, dus 1, 10, 100 enz. met gelijke tussenafstand, maar ook 5, 50 500 enz. Er wordt dus steeds met 10 vermenigvuldigd.

b De oppervlakte op $t = 3{,}5$ is ongeveer 8 cm^2.

c Met Trace vind je dat na 5,31 dagen de oppervlakte 100 cm^2 is. Dit is dus na 127,44 uur.

3a Kies verticaal de schaal tot en met 10.000. De uitkomsten dicht bij 0 zijn nu niet meer af te lezen.

b -

c Voor $t = 1{,}5$ is $A = 0{,}30$ cm^2 en voor $t = 2{,}5$ is $A = 0{,}53$ cm^2.

d $A = 5$ geldt voor $t \approx 6{,}5$ en $A = 1000$ geldt voor $t \approx 16$.

e Bij een exponentiële functie wordt er bij elke stap vermenigvuldigd met een bepaal getal, de groeifactor. Wanneer op de verticale as ook bij elke stap met een getal vermenigvuldigd wordt, dan wordt de grafiek dus een rechte lijn.

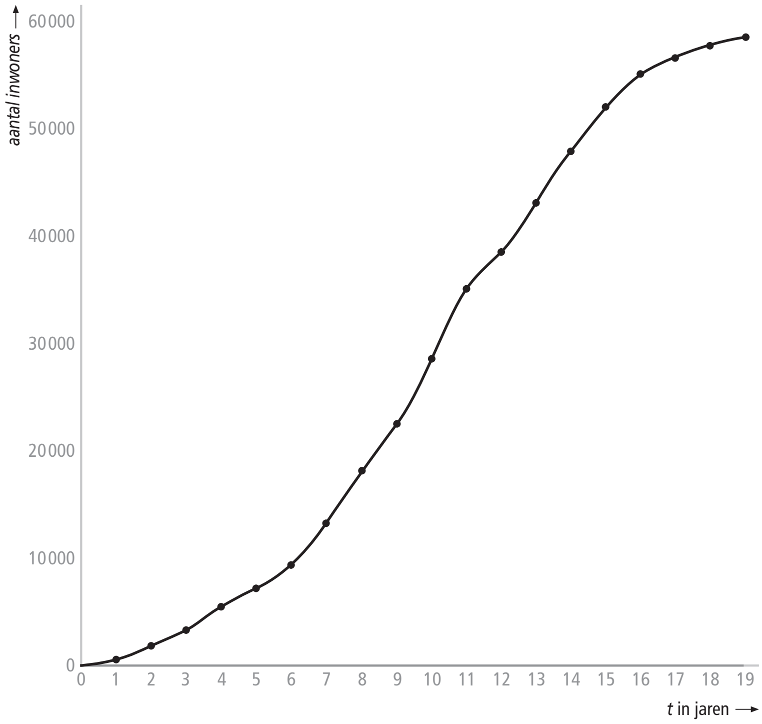
4a De grafiek is een rechte lijn bij een logaritmische verdeelde verticale as, dat gebeurt alleen bij een exponentiële functie.

b De beginwaarde is de waarde voor $t = 0$, die is hier 400.
De groeifactor vindt je door de waarde voor bijvoorbeeld $t = 12$ lees je 50 000 af.

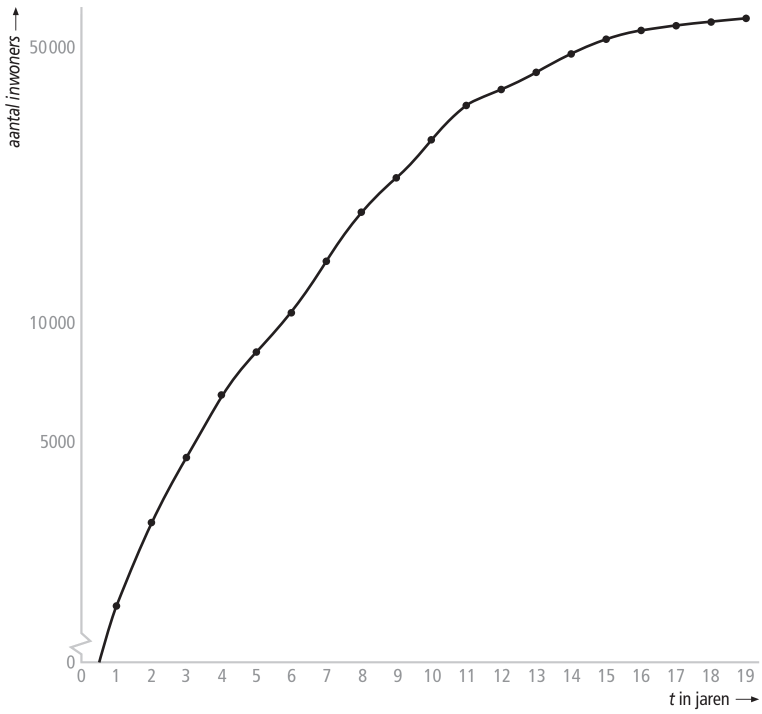
Voor de groeifactor g geldt dus $g^{12} = \dfrac{50\,000}{400} \Rightarrow g = \left(\dfrac{50\,000}{400}\right)^{\frac{1}{12}} \approx 1{,}495$.

c Uit opdracht b volgt nu dat het functievoorschrift wordt $y = 400 \cdot 1{,}495^t$.

5a Met een gewone lineaire schaalverdeling krijg je onderstaande grafiek.



Wanneer je verticaal een logaritmische schaalverdeling neemt krijg je onderstaande grafiek.



b In de tweede grafiek van opdracht a kun je zien dat de grafiek tussen $t = 4$ en $t = 11$ bij benadering recht is. Dat betekent dus dat er in die periode sprake was van exponentiële groei.
Dus van 1972 tot 1979.

c De groeifactor g voor deze periode geldt dan: $g^7 \approx \frac{35520}{6620} \Rightarrow g \approx \left(\frac{35520}{6620}\right)^{\frac{1}{7}} \approx 1{,}27$.
De bevolkingstoename per jaar was dus ongeveer 27%.

6a De overeenkomsten van de drie grafieken zijn: ze zijn alle drie exponentieel, alle drie stijgend en hebben alle drie als horizontale asymptoot de x-as.
De verschillen van de drie grafieken zijn: g en h zijn steiler en de drie grafieken hebben verschillende beginwaarden.

b Wanneer je de y-as logaritmisch kiest ontstaan er drie evenwijdige lijnen. Rechte lijnen want de functies zijn exponentieel. Evenwijdig omdat de functies dezelfde groeifactor hebben.

c Met behulp van de beginwaarden kun je de vier grafieken onderscheiden.
Grafiek 1 hoort bij functie l, grafiek 2 bij functie p, grafiek 3 bij functie m en grafiek 4 bij functie k. Ook kun je zien dat grafiek 1 en 3 evenwijdig lopen, dus die functies hebben dezelfde groeifactor. Hoe groter de groeifactor, hoe steiler de lijn.

7a De grafieken van de functies f en g worden nu rechte lijnen. De grafieken van de andere twee niet.

b Wanneer ook de x-as logaritmisch wordt dan zijn de grafieken van de functies h en k rechte lijnen en de twee exponentiële functies zijn niet recht meer.

c Wanneer beide assen een logaritmische schaalverdeling hebben dan worden de grafieken van machtsfuncties zoals $m(x) = 30x^4$ rechte lijnen.

8a Alleen de verticale as is logaritmisch en de grafiek is dan een rechte lijn. De functie die bij deze grafiek hoort is dus exponentieel.

b $k(0) = 50$ en $k(4) = 4000$. De groeifactor g is dus $g = \left(\frac{4000}{50}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 2{,}99 \approx 3$.

c $k(x) = 50 \cdot 3^x$.

d De groeifactor voor de functie m is dus $g = \left(\frac{1}{256}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$.

$m(1) = 256 \Rightarrow m(0) = \dfrac{256}{\frac{1}{4}} = 1024$. De beginwaarde is dus 1024.

$m(x) = 1024 \cdot \frac{1}{4}^x$

9a -

b Wanneer beide assen een logaritmische schaalverdeling hebben worden alle drie de grafieken rechte lijnen, want het zijn alle drie machtsfuncties. (zie opdracht c).

c $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$;

$g(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$;

$h(x) = \dfrac{10}{x^2\sqrt{x}} = \dfrac{10}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{10}{x^{2\frac{1}{2}}} = 10 \cdot x^{-2\frac{1}{2}}$

10a Beide assen, zowel de horizontale als de verticale, hebben een logaritmische schaalverdeling. De grafiek is dan een rechte lijn dus moet het een machtsfunctie zijn. De vorm is dan $g(x) = a \cdot x^n$.

b $g(1) = 5 \Rightarrow a \cdot 1^5 = 5 \Rightarrow a = 5$

c Dus $g(x) = 5 \cdot x^n$. De grafiek gaat door het punt $(81, 15)$
$\Rightarrow g(81) = 15 \Rightarrow 5 \cdot 81^n = 15 \Rightarrow 81^n = 3 \Rightarrow (3^4)^n = 3 \Rightarrow$
$3^{4n} = 3 \Rightarrow 4n = 1 \Rightarrow n = \frac{1}{4}$. De functie is dan $g(x) = 5 \cdot x^{\frac{1}{4}} = 5 \cdot \sqrt[4]{x}$.

11a Wanneer het verband exponentieel zou zijn dan zou een verticale as met een logaritmische schaalverdeling een ongeveer rechte lijn moeten geven. Dat gebeurt niet. Dus is er geen exponentieel verband tussen de omlooptijd en de afstand tot de zon.

b Wanneer beide assen logaritmisch zijn dan komt er wel een rechte lijn, dat betekent dat het verband tussen de omlooptijd en de afstand tot de zon een machtsverband is.

c Wat proberen met de schuifparameter levert op dat voor $p = 0{,}14$ en $q = 1{,}55$ De lijn redelijk goed benaderd wordt. Een formule is dan: $omlooptijd = 0{,}14 \cdot afstand^{1{,}55}$.

d Omlooptijd van Venus is 224,7 dagen $\Rightarrow 224{,}7 = 0{,}14 \cdot afst^{1{,}55} \Rightarrow$

$afst^{1{,}55} = \dfrac{224{,}7}{0{,}14} \approx 1605 \Rightarrow afst = 1605^{\frac{1}{1{,}55}} \approx 117$ de afstand van Venus tot de zon is dus ongeveer 117 miljoen km.