Hoofdstuk 10 - Hoeken en afstanden

Voorkennis: Verhoudingen

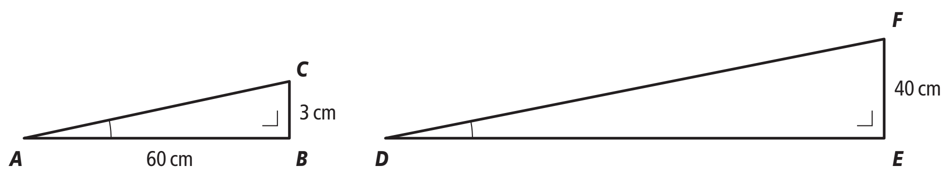
bladzijde 278

V-1a De hoeken blijven gelijk want alleen de lengte van de zijden verandert en allemaal met dezelfde factor.

b Zijde AB met lengte 4 wordt vergroot tot zijde PQ met lengte 7. De vergrotingsfactor is dus $\frac{7}{4}$.

c Ook de andere zijden worden vergroot met factor $\frac{7}{4}$, dus $PR = \frac{7}{4} \cdot AC = \frac{7}{4} \cdot 3 = 5{,}25$ en $RQ = \frac{7}{4} \cdot BC = \frac{7}{4} \cdot 2 = 3{,}5$.

V-2a



b De vergrotingsfactor is $\frac{4000}{3} = 1333\frac{1}{3}$.

c Lijnstuk DE is de afstand tot de toren. Dus $DE = 1333\frac{1}{3} \cdot 60 = 80\,000$ cm = 800 meter.

V-3a Nee, Carlo heeft geen gelijk. De lijnen vormen geen Z-figuur, want AF en BC zijn niet evenwijdig.

b $\angle C_1 = \angle B_3$ want AB en DC zijn evenwijdig en worden gesneden door BC.

c $\angle F_1 = \angle A_1 = 60°$ (Z-Hoeken), $\angle D_2 = \angle B_1 = 50°$ (Z-Hoeken), $\angle A_3 = \angle A_1 = 60°$,
$\angle A_2 = \angle A_4 = \angle F_2 = 180° - 60° = 120°$, $\angle E_3 = \angle E_1 = 180° - 60° - 50° = 70°$,
$\angle E_2 = \angle E_4 = 180° - 70° = 110°$, $\angle D_2 = 180° - 50° = 130°$.
De andere hoeken zijn niet te berekenen omdat de ligging van lijn BC niet bepaald is.

bladzijde 279

V-4a De drie driehoeken zijn gelijkvormig omdat ze overeenkomstige hoeken gelijk hebben.
In volgorde van $\triangle AFG, \triangle ABC, \triangle DEC$ geldt:
$\angle GAF = \angle CAB = \angle CDE$ en $\angle F = \angle B = \angle E = 90°$ en dus geldt ook
$\angle AGF = \angle ACB = \angle DCE$.

b $\triangle ABC \sim \triangle DEC \Rightarrow \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EC|} \Rightarrow \frac{8}{4} = \frac{|DE|}{2} \Rightarrow |DE| = 4$.

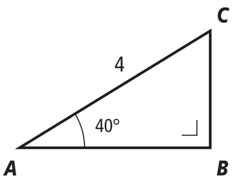
$\triangle ABC \sim \triangle AFG \Rightarrow \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AF|}{|FG|} \Rightarrow \frac{8}{4} = \frac{6}{|FG|} \Rightarrow 8 \cdot |FG| = 24 \Rightarrow |FG| = 3$.

c $|AC| = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} \approx 8{,}94$ en

$|CD| = \sqrt{|EC|^2 + |ED|^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} \approx 4{,}47$.

V-5a $\tan \angle A = \dfrac{|BC|}{|AB|} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \angle A = \tan^{-1}(\tfrac{1}{2}) \approx 27^\circ$.

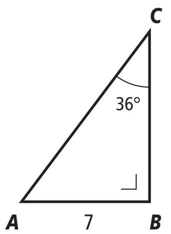
V-6a



$\cos \angle A = \dfrac{|AB|}{|AC|} \Rightarrow \cos 40^\circ = \dfrac{|AB|}{4} \Rightarrow |AB| = 4 \cdot \cos 40^\circ \approx 3{,}06$.

$\sin \angle A = \dfrac{|BC|}{|AC|} \Rightarrow \sin 40^\circ = \dfrac{|BC|}{4} \Rightarrow |BC| = 4 \cdot \sin 40^\circ \approx 2{,}57$.

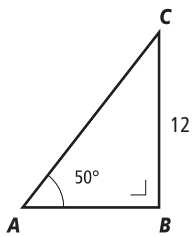
b



$\tan \angle C = \dfrac{|AB|}{|BC|} \Rightarrow \tan 36^\circ = \dfrac{7}{|BC|} \Rightarrow |BC| = \dfrac{7}{\tan 36^\circ} \approx 9{,}63$

$\sin \angle C = \dfrac{|AB|}{|AC|} \Rightarrow \sin 36^\circ = \dfrac{7}{|AC|} \Rightarrow |AC| = \dfrac{7}{\sin 36^\circ} \approx 11{,}91$.

c



$\tan \angle A = \dfrac{|BC|}{|AB|} \Rightarrow \tan 50^\circ = \dfrac{12}{|AB|} \Rightarrow |AB| = \dfrac{12}{\tan 50^\circ} \approx 10{,}07$.

$\sin \angle A = \dfrac{|BC|}{|AC|} \Rightarrow \sin 50^\circ = \dfrac{12}{|AC|} \Rightarrow |AC| = \dfrac{12}{\sin 50^\circ} \approx 15{,}66$.

V-7a $\cos \angle ACB = \dfrac{|BC|}{|AC|} \Rightarrow \cos 38^\circ = \dfrac{|BC|}{6} \Rightarrow |BC| = 6 \cdot \cos 38^\circ \approx 4{,}728$.

$|DC| = \sqrt{|BD|^2 + |BC|^2} = \sqrt{4 + 22{,}355} \approx 5{,}13$.

b $\tan \angle D = \dfrac{|BC|}{|BD|} \approx \dfrac{4{,}728}{2} \approx 2{,}364 \Rightarrow \angle D \approx 67^\circ$.

c $\sin \angle C = \dfrac{|AB|}{|AC|} \Rightarrow \sin 38^\circ = \dfrac{|AB|}{6} \Rightarrow |AB| = 6 \cdot \sin 38^\circ \approx 3{,}69$.

Oppervlakte $\triangle ADC = \tfrac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AD| \approx \tfrac{1}{2} \cdot 4{,}728 \cdot (3{,}694 + 2) \approx 13{,}5$.

10.1 De cosinusregel

bladzijde 280

1a $\sin \angle A = \dfrac{|DC|}{|AC|} \Rightarrow \sin 80^\circ = \dfrac{|DC|}{10} \Rightarrow |DC| = 10 \cdot \sin 80^\circ \approx 9{,}85$.

b $\cos \angle A = \dfrac{|AD|}{|AC|} \Rightarrow \cos 80^\circ = \dfrac{|AD|}{10} \Rightarrow |AD| = 10 \cdot \cos 80^\circ \approx 1{,}74$.

$|BD| = |AB| - |AD| \approx 15 - 1{,}74 \approx 13{,}26$.

c $|BC| = \sqrt{|DC|^2 + |BD|^2} \approx \sqrt{9,85^2 + 13,26^2} \approx 16,5$.

2a $\cos \angle B = \dfrac{|BD|}{|BC|} \Rightarrow \cos 20° = \dfrac{|BD|}{10} \Rightarrow |BD| = 10 \cdot \cos 20° \approx 9,40$.

$|AD| = |BD| - |AB| \approx 9,40 - 5 \approx 4,40$.

$|DC| = \sqrt{|BC|^2 - |DB|^2} = \sqrt{100 - 88,30} \approx 3,4$.

b $|AC| = \sqrt{|DC|^2 + |DA|^2} \approx \sqrt{11,70 + 19,36} \approx 5,6$.

3a $\sin\alpha = \dfrac{|DC|}{b} \Rightarrow |DC| = b \cdot \sin\alpha$.

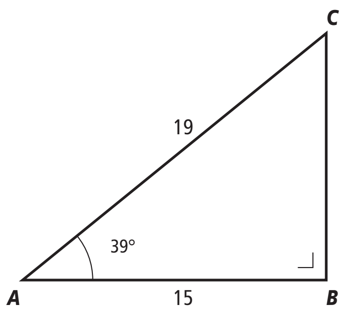
$\cos\alpha = \dfrac{|AD|}{b} \Rightarrow |AD| = b \cdot \cos\alpha$ en $|BD| = |AB| - |AD| = c - b \cdot \cos\alpha$

b $|BC|^2 = |CD|^2 + |BD|^2 \Rightarrow a^2 = (b \cdot \sin\alpha)^2 + (c - b \cdot \cos\alpha)^2 \Rightarrow$
$a^2 = b^2 \cdot \sin^2\alpha + (c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha + b^2 \cdot \cos^2\alpha) \Rightarrow$
$a^2 = b^2 \cdot \sin^2\alpha + b^2 \cdot \cos^2\alpha + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$

c $a^2 = b^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$

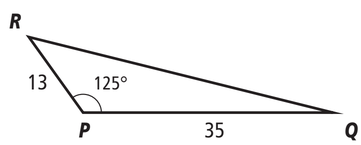
bladzijde 281

4a



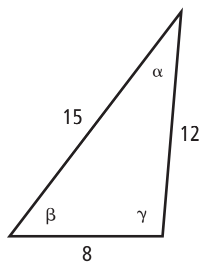
$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \cos \angle A \Rightarrow$
$|BC|^2 = 15^2 + 19^2 - 2 \cdot 15 \cdot 19 \cdot \cos 39 \Rightarrow$
$|BC|^2 \approx 225 + 361 - 442,973 \approx 143,027 \Rightarrow |BC| \approx 12,0$

b



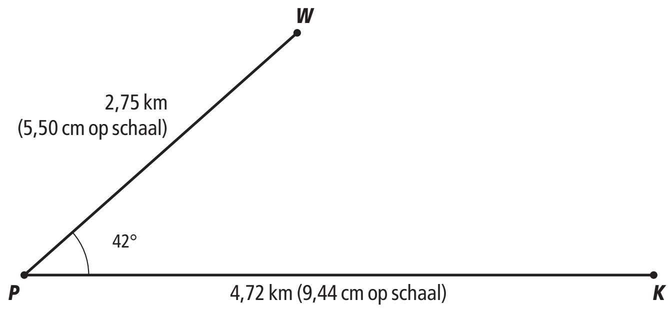
$|QR|^2 = |PQ|^2 + |RQ|^2 - 2 \cdot |PQ| \cdot |RQ| \cdot \cos \angle P \Rightarrow$
$|QR|^2 = 35^2 + 13^2 - 2 \cdot 35 \cdot 13 \cdot \cos 125° \Rightarrow$
$|QR|^2 \approx 1225 + 169 + 521,95 \approx 1915,95 \Rightarrow |QR| \approx 43,8$

c



$12^2 = 8^2 + 15^2 - 2 \cdot 8 \cdot 15 \cdot \cos\beta \Rightarrow 240 \cdot \cos\beta = 64 + 225 - 144 = 145 \Rightarrow$
$\cos\beta = \dfrac{145}{240} \Rightarrow \beta \approx 53°$
$15^2 = 12^2 + 8^2 - 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot \cos\gamma \Rightarrow 192 \cdot \cos\gamma = 144 + 64 - 225 = -17 \Rightarrow$
$\cos\gamma = \dfrac{-17}{192} \Rightarrow \gamma \approx 95°$

5a

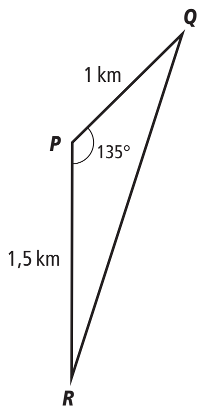


b $|WK|^2 = |PK|^2 + |PW|^2 - 2 \cdot |PK| \cdot |PW| \cdot \cos \angle P \Rightarrow$

$|WK|^2 = 2,75^2 + 4,72^2 - 2 \cdot 2,75 \cdot 4,72 \cdot \cos \angle P \Rightarrow |WK|^2 = 7,56 + 22,28 - 19,29 = 10,55 \Rightarrow$

$|WK| = 3,25$. De afstand van de watertoren tot de kerktoren is dus 3,25 km.

6



Hiernaast staat een tekening van de situatie.
De hoek tussen noord-oost en zuid is $135°$.

$|RQ|^2 = |PR|^2 + |PQ|^2 - 2 \cdot |PR| \cdot |PQ| \cdot \cos \angle P \Rightarrow$

$|RQ|^2 = 1,5^2 + 1^2 - 2 \cdot 1,5 \cdot 1 \cdot \cos 135° \Rightarrow |RQ|^2 = 2,25 + 1 + 2,12 = 5,37 \Rightarrow$

$|RQ| = 2,32$. Dus de afstand tussen R en Q is 2,32 km.

7a $|HP| = 2 \Rightarrow |EP|^2 = 4 + 9 = 13 \Rightarrow |EP| = \sqrt{13}$,

$|DP|^2 = 4 + 16 = 20 \Rightarrow |DP| = \sqrt{20}$,

$|ED|^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow |ED| = 5$.

$|EP|^2 = |ED|^2 + |DP|^2 - 2 \cdot |ED| \cdot |DP| \cdot \cos \angle D \Rightarrow 13 = 25 + 20 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{20} \cdot \cos \angle D \Rightarrow$

$\cos \angle D = \dfrac{25 + 20 - 13}{10\sqrt{20}} \approx 0,7155 \Rightarrow \angle D \approx 44°$.

$|ED|^2 = |EP|^2 + |DP|^2 - 2 \cdot |EP| \cdot |DP| \cdot \cos \angle P \Rightarrow 25 = 13 + 20 - 2 \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{20} \cdot \cos \angle P \Rightarrow$

$\cos \angle P = \dfrac{13 + 20 - 25}{2 \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{20}} \approx 0,2481 \Rightarrow \angle P \approx 76°$.

En dus $\angle E = 180° - 44° - 76° = 60°$

b Bij een gelijkbenige driehoek zijn twee zijden van de driehoek even lang. Bij driehoek DEP ligt zijde DE vast op 5. Punt P kun je alleen verplaatsen over ribbe GH. $|EP| = |DP|$ kan niet omdat de driehoeken waarin deze zijden voorkomen zijde HP gemeenschappelijk hebben en de andere zijden ongelijk zijn.
Dus $\triangle DEP$ is gelijkbenig als $|DE| = |DP| = 5$ of als $|DE| = |EP| = 5$.

1e geval:
$|DE| = |DP| = 5$. Voor HP moet dan volgens de stelling van Pythagoras gelden:
$|HP|^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow |HP| = 3$.

2e geval:
$|DE| = |EP| = 5$. Voor HP moet dan volgens de stelling van Pythagoras gelden:
$|HP|^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow |HP| = 4$.

c Bij een gelijkzijdige driehoek zijn alle drie zijden even lang. Voor $\triangle DEP$ moet dus gelden dat alle zijden 5 zijn want DE heeft een vaste lengte van 5. Bij opdracht b heb je berekend in welke gevallen $\triangle DEP$ gelijkbenig is. Alleen in deze gevallen zou de driehoek dus ook nog gelijkzijdig kunnen zijn. Maar de lengte van HP is verschillend om elk van de zijden 5 te laten zijn. Het kan dus niet.

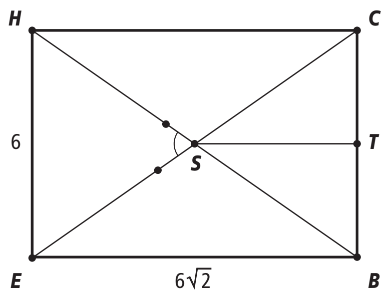
10.2 De hoek tussen twee lijnen

bladzijde282

8a De lijnen AE en EB liggen in het voorvlak $ABFE$.
$\angle (EB,AE) = \angle AEB = 45°$want diagonaal EB deelt in het vierkant $ABFE$ de hoek E middendoor.

b EB en EG liggen in vlak BGE. Omdat in $\triangle EBG$ de zijden diagonalen zijn van even grote vierkanten zijn de zijden ook even groot. $\triangle BEG$ is dus gelijkzijdig.
Dan is de hoek tussen EB en EG dus $60°$.

c



d Noem S het snijpunt van EC en HB. De scherpe hoek die EC maakt met HB is gelijk aan $\angle BSC$. Teken de loodlijn ST.
De scherpe hoek waaronder EC en HB elkaar snijden is gelijk aan $\angle BSC$.

$\angle BSC = 2 \cdot \angle BST$. $\tan \angle BST = \dfrac{|BT|}{|TS|} = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \angle BST \approx 35{,}2° \Rightarrow \angle(EC, BH) \approx 71°$

e Je kunt de hoek van kruisende lijnen berekenen door één van de lijnen evenwijdig te verschuiven tot deze de andere lijn snijdt. Omdat CH evenwijdig is aan EB, geldt dus dat $\angle(AB, CH) = \angle(AB, BE)$.

f $\angle(AB, CH) = \angle(AB, BE) = \angle ABE = 45°$.

9a $\angle(AM, BC) = \angle(AM, AD) = \angle MAD$. $\tan \angle MAD = \dfrac{4}{2} \Rightarrow \angle MAD \approx 63°$

b $\angle(AM, CD) = \angle(AM, AB) = \angle MAB = 90°$.

c $\angle(AN, BC) = \angle(AN, AD) = \angle NAD$. $|DN| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$

$\tan \angle NAD = \dfrac{|ND|}{|AD|} = \dfrac{\sqrt{20}}{4} \Rightarrow \angle NAD \approx 48°$

d $\angle(AN, BD) = \angle(AN, FH) = \angle(AN, SN)$
Punt S is het midden van FG.
Bereken de zijden van driehoek ANS.

$ES = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \Rightarrow AS = \sqrt{16+20} = 6$; $NS = \frac{1}{2} HF = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$;

$AN = \sqrt{20+16} = 6$. Cosinusregel in ΔASN :

$AS^2 = AN^2 + NS^2 - 2 \cdot NS \cdot AN \cdot \cos \angle ANS$

$36 = 36 + 8 - 2 \cdot 6 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \cos \angle ANS \Rightarrow \cos \angle ANS = \dfrac{36+8-36}{24\sqrt{2}} \Rightarrow \angle ANS \approx 76°$.

bladzijde 283

10a EG en KE liggen in vlak $ACGE$. Dit vlak snijdt DF op hoogte 2. Dan liggen K en L ook op hoogte 2, dus K ligt in het midden van AE en L in het midden van BF.

b De paren KD en LF en DLen KF zijn evenwijdig dus is vierhoek $KDLF$ een parallellogram. Omdat $KF = FL = LD = DK = 20$ is, is $KDLF$ zelfs een ruit.

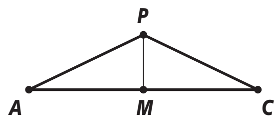
c Omdat KL het beeld is van EG na een evenwijdige verplaatsing aan zichzelf, is de hoek tussen de lijnen EG en DF gelijk aan de hoek tussen de lijnen KL en DF. De lijnen KL en DF zijn de diagonalen in de ruit $KDLF$ en snijden elkaar dus loodrecht.

Dus $\angle(EG, DF) = \angle(KL, DF) = 90°$.

11a CF en CD liggen in het vlak en vierkant $ACFD$ waarin de diagonaal CD de hoek ACF middendoor deelt. Dus $\angle(CF, CD) = 45°$.

b $\angle B = 90°$ dus $CP = AP = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

In $\triangle APC$ geldt: $\sin \angle APM = \dfrac{|AM|}{|AP|} = \dfrac{2}{\sqrt{20}} \Rightarrow \angle APM \approx 26{,}6°$



Dus $\angle(AP, CP) = 2 \cdot \angle APM \approx 53°$.

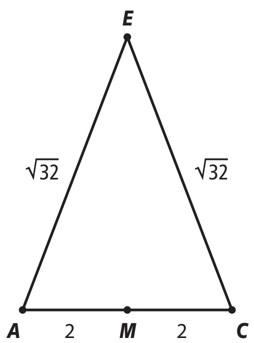
c $AE = EC = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$ en

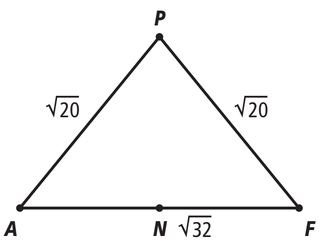
$EM = \sqrt{32-4} = \sqrt{28}$

$\sin \angle AEM = \dfrac{2}{\sqrt{32}} \Rightarrow \angle AEM \approx 20{,}7°$

$\angle AEC = 2 \cdot \angle AEM \approx 41°$

$AP = PF = \sqrt{20}$ en $AF = AE = \sqrt{32}$





$\sin \angle APN = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{32}}{\sqrt{20}} \Rightarrow \angle APN \approx 39{,}2° \quad \Rightarrow \angle APF = 2 \cdot \angle APN \approx 78°$.

d K is het midden van AD en M is het midden van AC. Dan geldt: $DC \mathbin{//} KM$ en $AP \mathbin{//} KE$.

Dus $\angle(AP, DC) = \angle(KE, KM) = \angle MKE$.

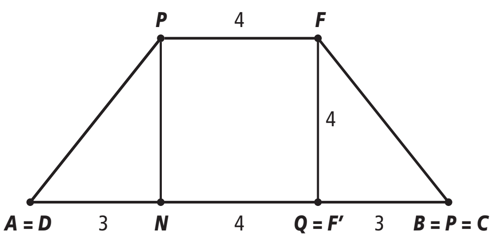
$KE = AP = \sqrt{20}$; $KM = \frac{1}{2} \cdot DC = \frac{1}{2}\sqrt{32}$; $EM = \sqrt{28}$.

In ΔKEM geldt: $|EM|^2 = |KE|^2 + |KM|^2 - 2 \cdot |KE| \cdot |KM| \cdot \cos \angle MKE \Rightarrow$

$28 = 20 + 8 - 2 \cdot \sqrt{20} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{32} \cdot \cos \angle MKE \Rightarrow \cos \angle MKE = \dfrac{0}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{32}} = 0 \Rightarrow \angle MKE = 90°$.

Dus $\angle(AP, DC) = 90°$.

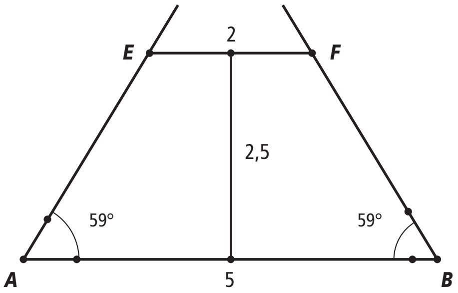
12a



F' is de projectie van F op het grondvlak. Dan geldt: $FP = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ meter.

b Bekijk $\triangle BPF$. Er geldt: $BF=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}\approx 5{,}83$ meter.
Bekijk $\triangle BQF$. Er geldt $FQ=\sqrt{34-9}=\sqrt{25}=5$ meter.

c



d Bekijk $\triangle DEA$. $AD=6, AE=DE=\sqrt{34}$. M is het midden van AD

$\sin\angle AEM=\dfrac{3}{\sqrt{34}}\Rightarrow\angle AEM\approx 31°\ \Rightarrow\angle(AE,DE)\approx 62°$.

e Omdat $EF\,//\,AB$ geldt $\angle(AE,EF)=\angle(AE,AB)$.

13a Lijnen die TA loodrecht kruisen zijn zijn alle lijnen in vlak $ABCD$ die niet door A gaan, dus bijvoorbeeld BD en DC.

b $\angle(TB,DC)=\angle(TB,AB)=\angle TBA$.
$\tan\angle TBA=\frac{3}{5}\Rightarrow\angle TBA\approx 31°$. Dus $\angle(TB,DC)\approx 31°$.

c $\angle(TC,AD)=\angle(TC,BC)=\angle TCB$. Driehoek TBC is rechthoekig bij hoek B en $TB=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$.

Dus $\tan\angle TCB=\dfrac{\sqrt{34}}{5}\Rightarrow\angle TCB\approx 49°$. $\angle(TC,\ AD)\approx 49°$.

14a Elke piramide heeft een hoogte die gelijk is aan de hoogte van driehoek ADP.
Voor deze hoogte h geldt: $h=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$ meter.
De diagonalen van $ABCD$ snijden elkaar in punt M. $AM=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{2}$ meter.
Dus geldt: $AQ^2=AM^2+QM^2\Rightarrow AQ=\sqrt{2+3}=\sqrt{5}\approx 2{,}24$ meter.

b Het midden van AB is K. Dan geldt: $\angle(AP,DQ)=\angle(QK,DQ)=\angle DQK$.
Verder is $DK=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$, $QK=PA=2$ en $DQ=AQ=\sqrt{5}$.
De cosinusregel in driehoek DKQ geeft:
$|DK|^2=|KQ|^2+|DQ|^2-2\cdot|KQ|\cdot|DQ|\cdot\cos\angle DQK\Rightarrow 5=4+5-2\cdot 2\cdot\sqrt{5}\cdot\cos\angle DQK\Rightarrow$

$\cos\angle DQK=\dfrac{9-5}{4\sqrt{5}}\Rightarrow\angle DQK\approx 63°$.

c $\angle(AP,QC)=\angle(QK,QC)=\angle CQK$.
$\triangle QCK\cong\triangle QDK$, dus geldt $\angle DQK=\angle CQK=\angle(CQ,AP)=63°$.

10.3 De hoek tussen lijn en vlak

bladzijde 284

15a -

b $\angle(AB,BG)=90°$, want $ABGH$ is een rechthoek.

c $\angle(AB,FC)=\angle(EF,FC)=90°$, want ook $EFCD$ is een rechthoek.
$\angle(AB,BC)=90°$, $\angle(AB,BF)=90°$, want $ABCD$ en $ABFE$ zijn vierkanten.

d Voor elke lijn in vlak $BCGF$ geldt dat de hoek met AB $90°$ is.

16a We tonen aan dat CG loodrecht staat op twee snijdende lijnen in vlak BCG.

$$\left.\begin{matrix} CD \perp BC \\ CD \perp CG \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \perp BCG$$

b AC staat loodrecht op vlak BDF want: $BF \perp ABCD \Rightarrow BF \perp AC$, dus:

$$\left.\begin{matrix} AC \perp DB \\ AC \perp BF \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC \perp BDF \; .$$

c $AC \perp BDF \Rightarrow AC \perp BFHD \Rightarrow AC \perp BH$.

d Wanneer $GF \perp EFC$ zou staan, dan zou GF loodrecht op elke lijn staan in EFC, maar dat is niet zo want bijvoorbeeld $\angle(GF, FC) = 45°$. Dus staat GF niet loodrecht op vlak EFC.

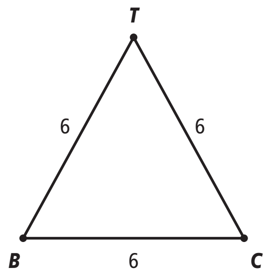
e CF en DE staan loodrecht op vlak $BGHA$, dus staan CF en DE loodrecht op BH.
AF en DG staan loodrecht op vlak BCHE, dus staan AF en DG loodrecht op BH.
EG en AC staan loodrecht op vlak $BFHD$, dus staan EG en AC loodrecht op BH.

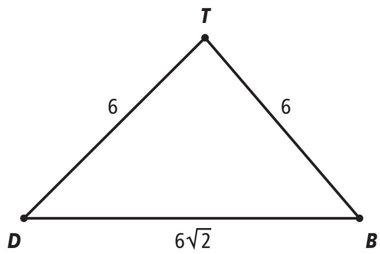
f Vlakken gevormd door de zijvlaksdiagonalen uit opdracht e staan loodrecht op BH.

$$\left.\begin{matrix} BH \perp CF \\ BH \perp AF \end{matrix}\right\} \Rightarrow BH \perp AFC$$

Dus BH staat ook loodrecht op EDG.

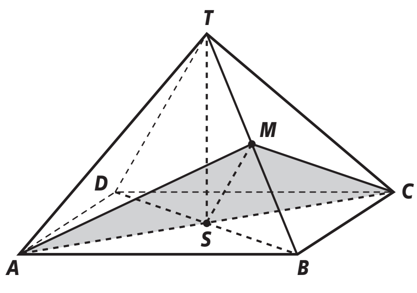
17a Driehoek BCT is een gelijkzijdige driehoek met zijde 6. Driehoek BDT is en gelijkbenige driehoek met zijden 6 en $6\sqrt{2}$.





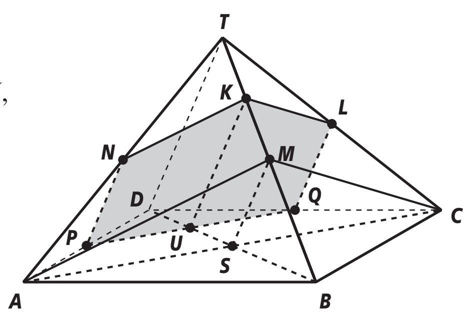
b Noem het midden van BT punt M. Dan is vlak ACM het loodvlak van BT dat door A gaat want:

$$\left.\begin{matrix} BT \perp AM \\ BT \perp CM \end{matrix}\right\} \Rightarrow BT \perp ACM \; .$$



c Zie de tekening hierboven. De lijn door S die BT loodrecht snijdt is SM.

d Teken door U de lijn PQ //AC en de lijn UK //SM.
Teken vervolgens de lijnen KN // AM en KL//MC.
Vlak $PQLKN$ gaat door U en is evenwijdig aan ACM, dus staat loodrecht op BT.



18a Driehoek ABC is rechthoekig dus geldt $\tan\angle BAC = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{4}{3} \Rightarrow \angle BAC \approx 53°$

b Omdat de paal nu scheef staat is $|C'B'| < |CB|$ en $|AC'| > |AC|$, dus $\frac{|C'B'|}{|AC'|} < \frac{|CB|}{|AC|} \Rightarrow \tan\angle B'AC' < \tan\angle BAC \Rightarrow \angle B'AC' < \angle BAC$.

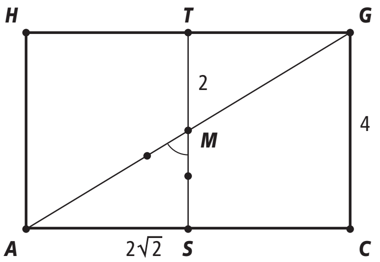
bladzijde 285

19a De projectie van AG op vlak $ABCD$ is AC, op vlak $EFGH$ is EG, op vlak $BCGF$ is BG, op vlak $ADHE$ is AH, op vlak $ABFE$ is AF en op vlak $DCGH$ is DG.

b De grootte van een hoek hangt niet af van de afmetingen van de benen van die hoek, maar van de verhoudingen en die blijven bij een kubus steeds hetzelfde.

c We nemen de ribbe van de kubus a, dan geldt:
$\angle(AG, ABFE) = \angle(AG, AF) = \angle FAG$. $\angle FAG$ ligt in vlak $AFGD$.
$\tan\angle FAG = \frac{|GF|}{|AF|} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \angle FAG \approx 35°$.
De hoeken van AG met de andere zijvlakken zijn ook $35°$, want steeds worden dezelfde driehoeken gevormd.

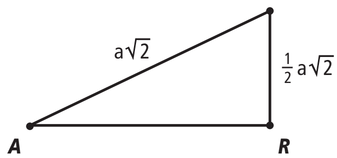
d $\angle(AG, BDHF) = \angle(AG, TS) = \angle AMS$



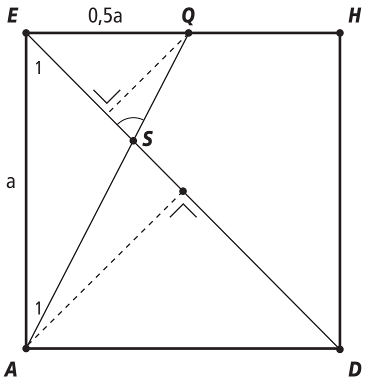
$\tan\angle AMS = \frac{|AS|}{|MS|} = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}{\frac{1}{2}a} = \sqrt{2} \Rightarrow \angle AMS \approx 55°$. Dus $\angle(AG, BDHF) = 55°$.

20a De loodrechte projectie van AC op vlak $BCGF$ is BC.
$\angle(AC, BCG) = \angle(AC, BC) = 45°$

b De projectie van F op $BGHA$ is punt R, het snijpunt van FC en BG.
Dus $\angle(AF, ABG) = \angle(AF, AR) = \angle FAR$.
$\sin\angle FAR = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle FAR = 30°$



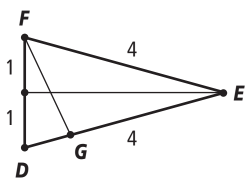
c De projectie van A op vlak $EFCD$ is het snijpunt van de diagonalen AH en ED. De projectie van Q op vlak $EFCD$ komt ook op ED terecht, dus $\angle(AQ, EFC) = \angle(AQ, ED) = \angle ESQ$



Bekijk driehoek EAQ. $\angle E_1 = 45°$ en $\tan \angle A_1 = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle A_1 \approx 27°$.

Dus is $\angle ASE \approx 180° - 45° - 27° \approx 108° \Rightarrow \angle ESQ = \angle(AQ, EFC) \approx 180° - 108° \approx 72°$

21 Om de projectie van F op $ABED$ te vinden moet je vanuit F loodrecht naar DE. Wanneer FG de hoogtelijn in driehoek DEF is, dan is de projectie van AF dus AG. $\angle(AF, ABED) = \angle(AF, AG) = \angle FAG$.

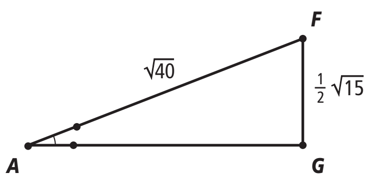


Hoogtelijn vanuit E. ES heeft lengte $\sqrt{4^2 - 1} = \sqrt{15}$.

Oppervlakte van $\Delta DEF = \frac{1}{2}|FG| \cdot |DG| = \frac{1}{2}|ES| \cdot |DF| \Rightarrow |FG| \cdot |DG| = |ES| \cdot |DF| \Rightarrow$

$|FG| \cdot 4 = \sqrt{15} \cdot 2 \Rightarrow |FG| = \frac{1}{2}\sqrt{15}$.

Nu $\angle(AF, ABED) = \angle FAG$ berekenen:



$\sin \angle FAG = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{15}}{\sqrt{40}} \Rightarrow \angle FAG \approx 18°$.

10.4 De hoek tussen twee vlakken

bladzijde 286

22a Zet de hoekpunten erbij. Je 'ziet' dat bijvoorbeeld de lijn BC niet evenwijdig loopt met vlak $AEFD$ en dat EB geen rechte hoek maakt met vlak $AEFD$.

b Leg bijvoorbeeld je geodriehoek loodrecht op vlak $AEFD$ langs de lijn AE en met het nulpunt in hoek AEB . De hoek AEB is meer dan $90°$.

c Leg je geodriehoek met een rechthoekszijde loodrecht op vlak $AEFD$. Het is mogelijk om de andere rechthoekszijde dan precies langs vlak $EFCB$ te leggen.
De hoek die de beide vlakdelen met elkaar maken is dus de rechte hoek van je geodriehoek, dus $90°$.

d Als je kijkt in de richting EF of FE dus in het verlengde van of langs de vouwlijn.

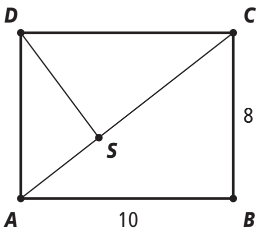
23a -

b Je 'hangt' de 'zwaaihaak' loodrecht met de benen over de snijlijn van beide vlakken heen. Het ene been van de zwaaihaak ligt in het ene vlak en het andere been in het andere vlak. Beide benen staan loodrecht op de snijlijn van de twee vlakken en vormen zo een standhoek. (een standhoek is getekend in de figuur bij deze som in je boek) .

bladzijde 287

24a De snijlijn van beide vlakken is de lijn BC. $TD \perp ABCD \Rightarrow TD \perp BC$ en $DC \perp BC$.
Dus een standvlak is vlak TDC.
$\angle(TBC, ABCD) = \angle(TC, DC) = \angle TDC$.
$\tan \angle TDC = \frac{4}{10} \Rightarrow \angle TDC \approx 22°$. Dus $\angle(TBC, ABCD) \approx 22°$.

b De snijlijn is de lijn $AC. TD \perp ABCD \Rightarrow TD \perp AC$. Een standvlak zou dus door TD kunnen gaan.
Teken nu door D een lijn loodrecht op AC. Deze snijdt AC in S. $AS \perp AC$. Dus TDS is en standvlak en $\angle(ACT, ABCD) = \angle(TS, DS) = \angle TSD$.



$|AC| = \sqrt{100+64} = \sqrt{164}$. Verder geldt:

$|DS| \cdot |AC| = |DA| \cdot |DC| \Rightarrow |DS| \cdot \sqrt{164} = 8 \cdot 10 \Rightarrow |DS| = \dfrac{80}{\sqrt{164}}$.

$\tan \angle TSD = \dfrac{|TD|}{|DS|} = \dfrac{4}{\frac{80}{\sqrt{164}}} \approx 0,6403 \Rightarrow \angle TSD \approx 33°$. Dus $\angle(ACT, ABCD) \approx 33°$

c De snijlijn van beide vlakken is TD. Omdat $TD \perp ABCD$ is dit dus en standvlak en geldt: $\angle(BDT, ADT) = \angle(AD, BD) = \angle ADB$.

$\tan \angle ADB = \dfrac{|AB|}{|AD|} = \dfrac{10}{8} \Rightarrow \angle ADB \approx 51°$. Dus $\angle(BDT, ADT) \approx 51°$.

25a De snijlijn van die twee gezochte vlakken is TB.
AS en SC zijn beide hoogtelijnen in de gelijkzijdige driehoeken ABT en BCT .
AS en SC staan dus loodrecht op de snijlijn TB en dus is vlak ASC een standvlak van de vlakken ABT en BCT .

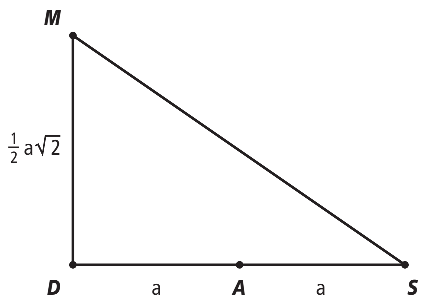
b Noem het snijpunt van AC en BDM. Dan geldt: $\angle(BCT, ABT) = \angle ASC = 2 \cdot \angle ASM$.

$AS = \sqrt{64-16} = \sqrt{48}$. $AC = \sqrt{64+64} = \sqrt{128} \Rightarrow AM = \frac{1}{2}\sqrt{28}$.

$\sin \angle ASM = \dfrac{|AM|}{|AS|} = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{128}}{\sqrt{48}} \Rightarrow \angle ASM \approx 54{,}7° \Rightarrow \angle ASC \approx 109°$.

Omdat de hoek van twee vlakken altijd de scherpe hoek van die vlakken is geldt dus: $\angle(BCT, ABT) \approx 71°$.

26a Om deze hoek te berekenen moet je AD projecteren op vlak $PQHC$. M is het snijpunt van de diagonalen HC en DG. De projectie van A is het snijpunt N van AF met PQ, want $AF \perp BE$ en $BE // PQ \Rightarrow AF \perp PQ$. MN snijdt AD in S, net $AS = AD$.
Dus $\angle(AD, PQHC) = \angle(AD, MN) = \angle DSM$.

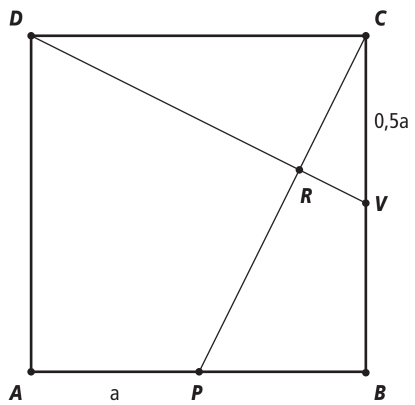


Wanneer de lengte van de ribbe a genoemd wordt geldt:

$\tan \angle DSM = \dfrac{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}{2a} = \frac{1}{4}\sqrt{2} \Rightarrow \angle DSM \approx 19°$.

Dus $\angle(AD, PQHC) \approx 19°$.

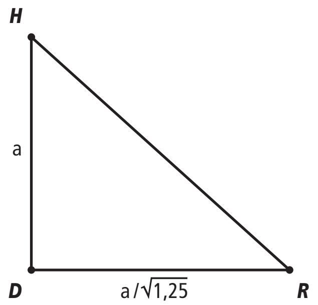
b De snijlijn van beide vlakken is de lijn PC. Trek de lijn door D loodrecht op PC. Het snijpunt is R.
Er geldt: $HD \perp ABCD \Rightarrow HD \perp PC$ en $DR \perp PC \Rightarrow HDR$ is het standvlak en dus is $\angle(ABCD, PQHC) = \angle(HR, DR) = \angle HRD$.



$\cos \angle CDR = \dfrac{|DR|}{|DC|} = \dfrac{|DR|}{a}$. Maar ook geldt:

$\cos \angle CDR = \dfrac{|DC|}{|DV|} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + (\frac{1}{2}a)^2}} = \dfrac{a}{a\sqrt{\frac{5}{4}}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

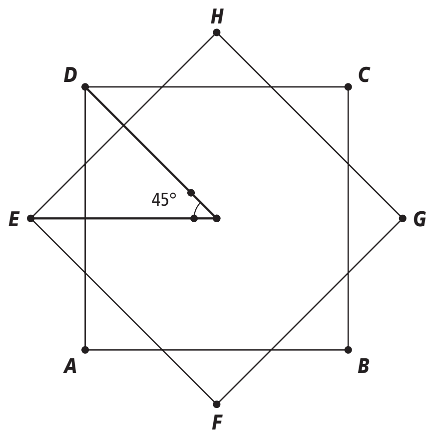
Dus $\dfrac{|DR|}{a} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow |DR| = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.



$$\tan \angle HRD = \frac{|DH|}{|DR|} = \frac{a}{\frac{2a}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \angle HRD \approx 48°$$

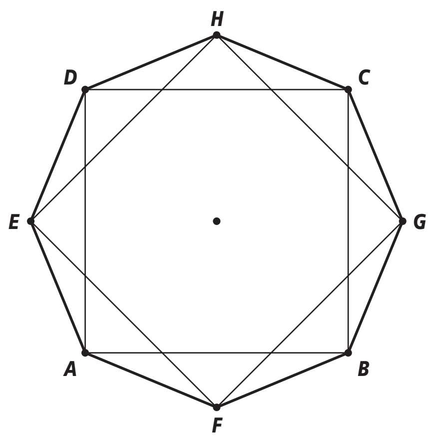
Dus $\angle(ABCD, PQHC) \approx 48°$

27a

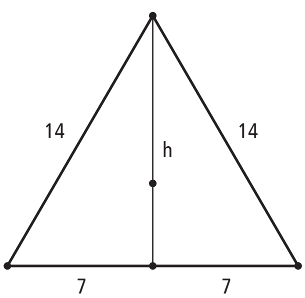


Als je de zijden van het bovenvlak $EFGH$ projecteert op het grondvlak, krijg je de getekende figuur. Je ziet dat de draaihoek van bijvoorbeeld punt D naar E 45° is.

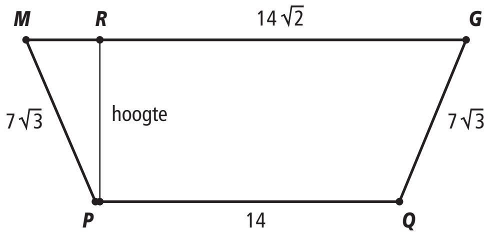
b



c



$h = \sqrt{14^2 - 7^2} = \sqrt{147} \approx 12{,}1$ cm.

d 

De punten P en Q zijn volgens de tekening bij vraag b de middens van AD en BC.

e De hoogte van de doos is de lengte van PR uit de vorige vraag.

$ER = \frac{1}{2}(14\sqrt{2} - 14) = 7\sqrt{2} - 7 \approx 2,9$. Dus geldt in ΔPER:

$PR = \sqrt{(7\sqrt{3})^2 - (7\sqrt{2} - 7)^2} \approx 11,8$

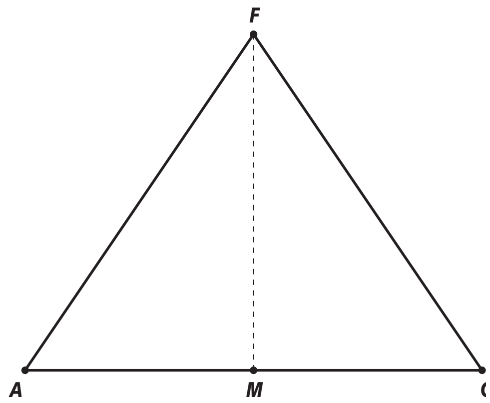
f De hoek van een zijvlak met het grondvlak kun je zien in de verticale doorsnede bij opdracht d.
$\angle(\text{zijvlak, grondvlak}) = \angle EPQ$, maar omdat de hoek scherp moet zijn wordt het $\angle REP$.

Er geldt: $\tan \angle REP = \dfrac{11,8}{2,9} \approx 4,07 \Rightarrow \angle REP \approx 76°$.

10.5 De afstand tot een lijn

bladzijde 288

28a $AC = CF = AF = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} \approx 5,7$



b M is het midden van AC. Driehoek ACF is een gelijkzijdige driehoek en dan is de zwaartelijn (naar het midden van een zijde) ook hoogtelijn (loodrecht op die zijde).

c $d(F, AC) = FM = \sqrt{(\sqrt{32})^2 - (\frac{1}{2}\sqrt{32})^2} = \sqrt{32 - 8} = \sqrt{24} \approx 4,9$

29a Het lijnstuk AB, want $AB \perp BF$.

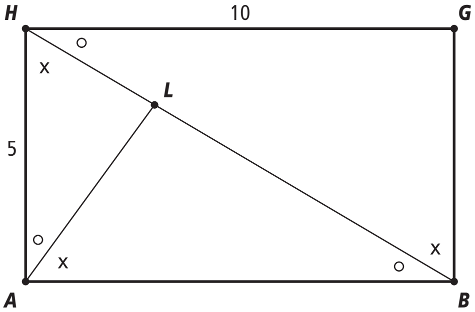
b Het lijn stuk AH, want $HG \perp DH$ en $HG \perp AD$, dus $HG \perp ADHE \Rightarrow AH \perp HG$.

c $d(A, HG) = AH = \sqrt{9 + 16} = 5$

d $GC \perp ABCD \Rightarrow AC \perp CG \Rightarrow d(A, CG) = AC = \sqrt{100 + 16} = \sqrt{116} \approx 10,8$

30a A en HB liggen in vlak $ABGH$.

b



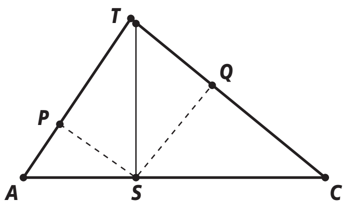
c Dat is AL.

d $\left.\begin{array}{l}\angle LAB = \angle AHB \\ \angle L = \angle A = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta LAB \sim \Delta AHB \Rightarrow$

$$\frac{|LA|}{|AB|} = \frac{|AH|}{|HB|} \Rightarrow \frac{|LA|}{10} = \frac{5}{\sqrt{125}} \Rightarrow |LA| = \frac{50}{\sqrt{125}} \approx 4{,}5$$

bladzijde 289

31a Laat in driehoek AST een loodlijn vanuit S neer op AT. $\mathrm{d}(S, AT) = SP$.



$TA = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$

$\left.\begin{array}{l}\angle PAS = \angle SAT \\ \angle P = \angle S = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle PAS \sim \triangle SAT \Rightarrow$

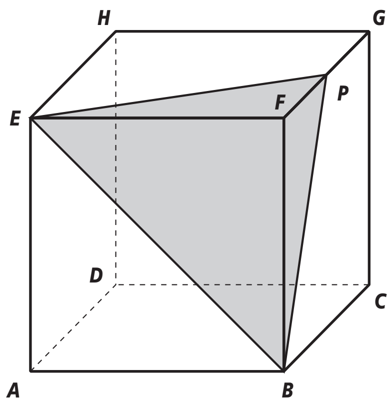
$$\frac{|PS|}{|AS|} = \frac{|ST|}{|AT|} \Rightarrow \frac{|PS|}{4} = \frac{6}{\sqrt{52}} \Rightarrow |PS| = \frac{24}{\sqrt{52}} \approx 3{,}3\,.$$

b $\mathrm{d}(S, CT) = SQ$.

$\left.\begin{array}{l}\angle QCS = \angle SCT \\ \angle Q = \angle S = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle QCS \sim \triangle SCT \Rightarrow$

$$\frac{|QS|}{|CS|} = \frac{|ST|}{|CT|} \Rightarrow \frac{|QS|}{\sqrt{128}-4} = \frac{6}{\sqrt{6^2 + (\sqrt{128}-4)^2}} \Rightarrow |QS| = \frac{6 \cdot \sqrt{128} - 4}{\sqrt{6^2 + (\sqrt{128}-4)^2}} \approx 4{,}6$$

32a $EB = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} \approx 11{,}3$;
$BP = EP = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} \approx 8{,}9$.



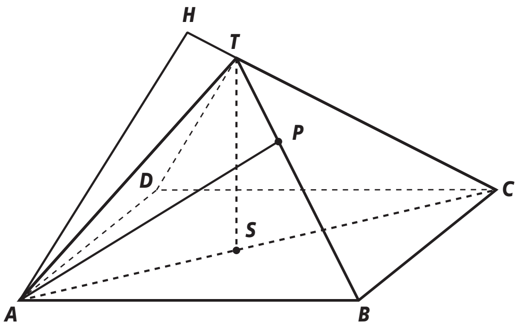
b Driehoek BEP is gelijkbenig, dus als M het midden is van EB dan staat PM loodrecht op EB.
Er geldt dan : $PM = \sqrt{(\sqrt{80})^2 - (\frac{1}{2}\sqrt{128})^2} = \sqrt{80-32} = \sqrt{48} \approx 6{,}9$

c Oppervlakte $\triangle BEP = \frac{1}{2} \cdot PM \cdot EB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{48} \cdot \sqrt{128} \approx 39{,}2$

d De oppervlakte van een driehoek is: *de helft van de hoogte maal de basis.*
Wanneer je EB als basis neemt is PM de hoogte, maar wanneer je BP als basis neemt is de afstand van E tot BP, dus d, de hoogte. Er geldt dus : oppervlakte $= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{48} \cdot \sqrt{128} \approx 39{,}2$

e Oppervlakte $\triangle BEP = \frac{1}{2} \cdot d \cdot BP = \frac{1}{2} \cdot d \cdot \sqrt{80} \approx 39{,}2 \Rightarrow d \approx \dfrac{39{,}2}{\frac{1}{2}\sqrt{80}} \approx 8{,}8$.

33a



$AC = \sqrt{36^2 + 36^2} = \sqrt{2592} \approx 50{,}91$ meter.

$AT = \sqrt{(\tfrac{1}{2}\sqrt{2592})^2 + 22^2} = \sqrt{1132} \approx 33{,}65$ meter.

De lengte van de opstaande zijden is dus 33,65 meter.

b De afstand van A tot TC is AH (omdat driehoek ACT stomphoekig is valt H buiten de driehoek).

Oppervlakte $\triangle ACT = \tfrac{1}{2} \cdot TS \cdot AC = \tfrac{1}{2} \cdot AH \cdot TC \Rightarrow 22 \cdot \sqrt{2592} = AH \cdot \sqrt{1132} \Rightarrow$

$AH = \dfrac{22 \cdot \sqrt{2592}}{\sqrt{1132}} \approx 33{,}29$ meter.

c De afstand van A tot BT is de hoogtelijn vanuit A, dus AP.

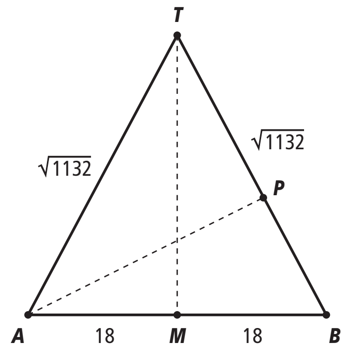
Noem het midden van AB punt M.

Dan geldt: $TM = \sqrt{1132 - 18^2} = \sqrt{808} \approx 28{,}4$.

Oppervlakte $\triangle ABT = \tfrac{1}{2} \cdot TM \cdot AB = \tfrac{1}{2} \cdot AP \cdot BT \Rightarrow$

$\sqrt{808} \cdot 36 = AP \cdot \sqrt{1132} \Rightarrow AP = \dfrac{36 \cdot \sqrt{808}}{\sqrt{1132}} \approx 30{,}41$ meter.

De afstand van A tot BT is dus ongeveer 30,4 meter.



d $\angle(ABT, ABCD) = \angle TMS$. Want TM en SM beide loodrecht op de snijlijn AB.

$\tan \angle TMS = \dfrac{TS}{SM} = \dfrac{22}{18} \Rightarrow \angle TMS \approx 51^\circ$.

e De lengte van het spoor is de helft van TM, dus is ongeveer 14,2 meter.

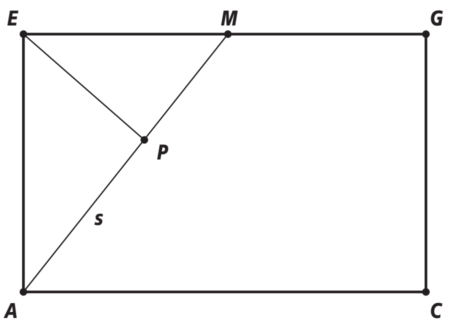
10.6 De afstand tot een vlak

bladzijde 290

34a $HF \perp EG$ en $HF \perp AE$. Dus $HF \perp ACGE \Rightarrow$ vlak $V \perp ACGE$.

b s is de lijn AM.

c



d $\mathrm{d}(E, s) = EP$. $EM = 2\sqrt{2}$, $AM = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 4^2} = \sqrt{24}$, $EA = 4$.

$|EP| \cdot |AM| = |EM| \cdot |EA| \Rightarrow |EP| \cdot \sqrt{24} = 2\sqrt{2} \cdot 4 \Rightarrow |EP| = \dfrac{8\sqrt{2}}{\sqrt{24}} \approx 2{,}3$

35a Vlak ABJ snijdt $ABHE$ volgens de lijn AI. Omdat $IJ \perp ADHE$, staan de vlakken $ABJI$ en $ADHE$ dus loodrecht op elkaar. $\text{d}(E, ABJI) = \text{d}(E, AI) = |EP|$. Er geldt $|AE| = 4$, $|EI| = 2$, $|AI| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$.
Uit de formule voor de oppervlakte van driehoek AEI
volgt: $\frac{1}{2} \cdot |AE| \cdot |EI| = \frac{1}{2}|EP| \cdot |AI| \Rightarrow |AE| \cdot |EI| = |EP| \cdot |AI| \Rightarrow$
$4 \cdot 2 = |EP| \cdot \sqrt{20} \Rightarrow |EP| = \dfrac{8}{\sqrt{20}} \approx 1{,}8$

36a Het vlak ACT staat loodrecht op vlak $ABCD$ (want TS staat loodrecht op $ABCD$).
De snijlijn van TAC en $ABCD$ is de lijn AC. We moeten dus de afstand van B tot AC berekenen.
Dit is de helft van diagonaal $AC = \frac{1}{2}\sqrt{128} \approx 5{,}7$.

b Werk in vlak $ABCD$. Laat uit S een loodlijn SP neer op AD. Gevraagd is nu de lengte SP. De driehoeken ASP en ACD zijn gelijkvormig. Dus:
$\triangle ASP \simeq \triangle ACD \Rightarrow \dfrac{|AS|}{|AC|} = \dfrac{|SP|}{|CD|} \Rightarrow \dfrac{4}{8\sqrt{2}} = \dfrac{|SP|}{8} \Rightarrow |SP| = \dfrac{32}{8\sqrt{2}} \approx 2{,}8$.

c Vlak TSB staat loodrecht op $ABCD$, de snijlijn is SB.
Dus de afstand van C tot vlak BST is de afstand van C tot BS.
De lijn door C loodrecht BS snijdt BS in punt R. De lijn SP snijdt BC in U. Er geldt:
$|SU| = 8 - 2\sqrt{2} \approx 5{,}17$, $|BS| = \sqrt{|BU|^2 + |SU|^2} = \sqrt{8 + 5{,}17^2} \approx 5{,}89$
Bekijk driehoek CSB. Er geldt:
$|CR| \cdot |BS| = |SU| \cdot |BC| \Rightarrow |CR| \cdot 5{,}89 = 5{,}17 \cdot 8 \Rightarrow |CR| \approx \dfrac{5{,}17 \cdot 8}{5{,}89} \approx 7{,}0$

d Het vlak SPT staat loodrecht op vlak ADT. De snijlijn is de lijn TP.
$|AP| = |PS|$ en $|AS| = 4$ met pythagoras volgt $|PS| = \sqrt{8}$.
Dus dan is $|TP| = \sqrt{8+36} = \sqrt{44}$. De lijn door S loodrecht op ADT snijdt TP in Q.
$\text{d}(S, ADT) = SQ$. Bekijk driehoek PST. Er geldt:
$|SQ| \cdot |PT| = |TS| \cdot |PS| \Rightarrow |SQ| \cdot \sqrt{44} = 6 \cdot \sqrt{8} \Rightarrow |SQ| = \dfrac{6\sqrt{8}}{\sqrt{44}} \approx 2{,}56$.

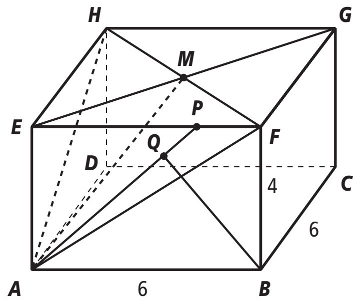
bladzijde 291

37a Inhoud $ABDE = \frac{1}{3} \cdot AE \cdot \text{oppervlakte} \, \Delta ABD = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 36$.

b Inhoud $BDEG$ = Inhoud kubus – 4 · inhoud $ABDE = 216 - 4 \cdot 36 = 72$.

c $\triangle BDE$ is gelijkzijdig met zijden $\sqrt{72}$. De hoogte van de driehoek is dan $\sqrt{72 - 18} = 54$.
Dus oppervlakte $\triangle BDE = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{54} \cdot \sqrt{72} \approx 31{,}2$.

d Net als bij oppervlakten, kun je ook de inhoud op verschillende manieren berekenen al naar gelang de hoogte en het grondvlak dat je kiest.
Inhoud $BDEG = \frac{1}{3} \cdot \text{d}(G, BDE) \cdot \text{oppervlakte} \triangle BDE = 72$.
$\text{d}(G, BDE) \approx \dfrac{72}{\frac{1}{3} \cdot 31{,}2} \approx 6{,}9$.



38a Bekijk piramide $E.AFH$ en bereken de inhoud op twee manieren.
$EG = 6\sqrt{2} \Rightarrow EM = 3\sqrt{2}$
$AM = \sqrt{16+18} = \sqrt{34}$
Inhoud $E.AFH = \frac{1}{3} \cdot \text{d}(E, AFH) \cdot$ oppervlakte $AFH = \frac{1}{3} \cdot HE \cdot$ oppervlakte $AEF \Rightarrow$

$\frac{1}{3} \cdot \text{d}(E, AFH) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{34} \cdot 6\sqrt{2} = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \Rightarrow$

$\text{d}(E, AFH) = \dfrac{6 \cdot 6 \cdot 4}{\sqrt{34} \cdot 6\sqrt{2}} \approx 2{,}9$.

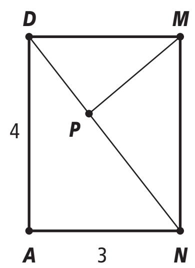
b $\angle(AFH, ABCD) = \angle(AFH, EFGH) = \angle EMA$.
$\tan \angle EMA = \dfrac{|EA|}{|EM|} = \dfrac{4}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \angle EMA = 43°$
Dus $\angle(AFH, ABCD) = 33°$.

c S is het snijpunt van BD en AC.
$\angle(AFH, CFH) = \angle AMC = 2 \cdot \angle AMS$.
$\tan \angle AMS = \dfrac{3\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \angle AMS \approx 46{,}7° \Rightarrow \angle AMC \approx 93°$. Dus de scherpe hoek van de vlakken is $87°$.

d De snijlijn van de vlakken is AD. Omdat
$AD \perp ABFE \Rightarrow AD \perp AP \Rightarrow \angle(ADHE, ADP) = \angle EAP = 45° \Rightarrow \angle EPA = 45°$.
$\text{d}(B, ADP) = BQ$. Omdat $\angle EAP = 45° \Rightarrow \angle PAB = 45° \Rightarrow BQ = AQ$.
Omdat $AB = 6$ volgt $BQ = \dfrac{6}{\sqrt{2}} \approx 4{,}2$.

39a Een vlak door l dat loodrecht op V staat heeft s als snijlijn met V.
De afstand van l tot V is gelijk aan de afstand van een willekeurig punt P op l tot s.
Omdat de afstand van l tot V steeds gelijk is (l loopt evenwijdig met V) heeft elk punt P op l dezelfde afstand tot V.

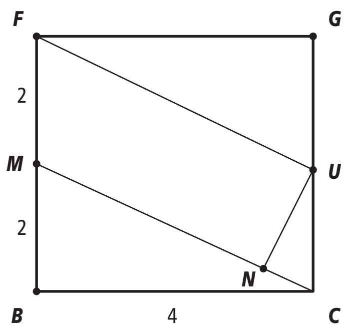
b l snijdt het vlak in S. De afstand is dan 0. De kortste afstand is 0.



40a $\text{d}(BE, ACF) = \text{d}(E, ACF) =$ hoogtelijn uit $B = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} = 3$.

b Kies het midden M van EF.

c N is het midden van BC. Bekijk vlak $ANMD$. $\text{d}(EF, BCD) = \text{d}(M, BCD) = MP$.
$DN = 5$. Er geldt: $MP \cdot DN = DM \cdot MN \Rightarrow MP \cdot 5 = 3 \cdot 4 \Rightarrow MP = 2{,}4$.
Dus $\text{d}(EF, BCD) = 4$.



41a $\text{d}(P, ADRS) = \text{d}(E, ADRS) =$ hoogtelijn op AS vauit $E =$ EN.
Er geldt in $\triangle ASE$: $ES \cdot AE = EN \cdot AS \Rightarrow 3 \cdot 4 = EN \cdot 5 \Rightarrow EN = 2{,}4$.
Dus $\text{d}(P, ADRS) = 2{,}4$

b Om dezelfde reden geldt ook $\text{d}(S, PQGF) = 2{,}4$.

c FP / /vlak $ADRS \Rightarrow \text{d}(T, ADRS) = \text{d}(P, ADRS) = 2{,}4$.

d Die afstanden zijn steeds gelijk omdat beide vlakken evenwijdig zijn.

e Beide vlakken staan loodrecht op vlak $BCGF$.
De afstand tussen beide vlakken is dus de afstand tussen FU en MC en die afstand is NU.

$\triangle UNC \sim \triangle CBM \Rightarrow \dfrac{|UN|}{|UC|} = \dfrac{|CB|}{|CM|} \Rightarrow \dfrac{|UN|}{2} = \dfrac{4}{\sqrt{20}} \Rightarrow$

$|UN| = \dfrac{8}{\sqrt{20}} \approx 1{,}8$

10.7 Gemengde opdrachten

bladzijde 292

42a Voor elke zijde van de piramide heb je 2 meter dus 2 buizen nodig. Er zijn 8 ribben, dus betekent dat $8 \times 2 = 16$ buizen.
Voor de middenstukken heb je nog eens 3 meter dus 3 buizen nodig.
Er zijn 4 vlakken waarin je dat aantal nodig hebt, dus $3 \times 4 = 12$ buizen.
In totaal heb je dus $16 + 12 = 28$ meter buis nodig.

b In driehoek ABT is PE evenwijdig aan BT omdat P en E de middens van de zijden van AB en AT zijn.
Om dezelfde redenen is in driehoek BCT het lijnstuk QG evenwijdig aan BT.
Dan is PE ook evenwijdig aan QG.
De buizen QG en PE zijn dus evenwijdig.

c In driehoek ABT is PF evenwijdig aan AT.
In driehoek ADT is SH evenwijdig aan AT.
De buizen SH, AE en ET zijn dus evenwijdig aan PF.

d $\angle(PF, FQ) = \angle PFQ$

$$\left.\begin{array}{l} PB = PF = 1 \\ BQ = QF = 1 \\ PQ = PQ \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle PBQ \cong \triangle PFQ\,(ZZZ) \Rightarrow \angle PBQ = \angle PFQ = 90^\circ$$

$\angle(PF, FG) = \angle(AT, EH) = \angle TEH = 60^\circ$ omdat $\triangle EHT$ gelijkzijdig is.

e Noem M het snijpunt van AC en BD.
Wanneer je vanaf P recht omhoog klimt, klim je langs de lijn PT.
De hoek die PT maakt met het grondvlak is $\angle TPM$.
In driehoek TPM is $AT = 2, AM = \sqrt{2}$ dus $TM = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}$.
Er geldt: $\tan \angle TPM = \dfrac{|TM|}{|PM|} = \dfrac{\sqrt{2}}{1} \Rightarrow \angle TPM \approx 54{,}7^\circ$.
Wanneer je langs B recht omhoog klimt, klim je langs de lijn BT.
De hoek die BT maakt met het grondvlak is $\angle TBM$.
Er geldt: $\tan \angle TBM = \dfrac{|TM|}{|BM|} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \angle TPM = 45^\circ$.
Het scheelt dus $9{,}7^\circ \approx 10^\circ$.

43 Vlak $ABED$ staat loodrecht op vlak ABC. Dus de projectie van AK op het grondvlak is AB.
Daaruit volgt $\angle(AK, ABC) = \angle(AK, AB) = \angle KAB$.

$\tan \angle KAB = \dfrac{4}{3} \Rightarrow \angle KAB = 53^\circ$.

De andere opstaande ribben maken dezelfde hoek met het grondvlak.

b KL verbindt de middens van DE en EF. Dus $KL // DF$. Omdat $DF // AC$ volgt $\angle(KL, AB) = \angle(AC, AB) = 60^\circ$.
$\angle(KL, AC) = 0^\circ$ omdat deze twee evenwijdig zijn. Uit symmetrie overwegingen geldt dus dat de hoek van een ribbe van het bovenvlak met een ribbe van het ondervlak 0° of 60° is.

c Noem het midden van ML punt T en het midden van AB punt S. Dan geldt: $\angle(CLM, ABCD) = \angle TCS$.

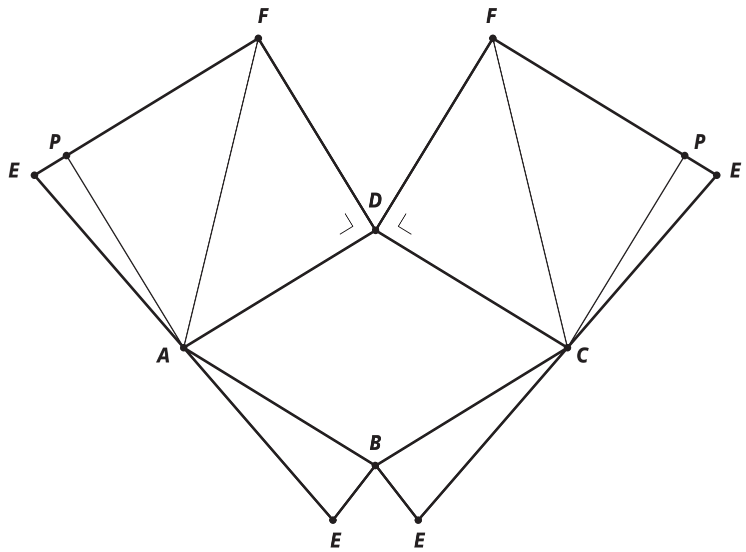
De afstand van T tot $ABCD$ is 4. Verder geldt $CM = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ en daaruit volgt weer dat $TQ = \sqrt{5^2 - (1\frac{1}{2})^2} = \sqrt{22,75}$.

$\sin \angle TCS = \dfrac{4}{\sqrt{22,75}} \Rightarrow \angle TCS \approx 57°$.

bladzijde 293

44a $AE = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45}$. $EF = \sqrt{6^2 + (6-3)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45}$ cm. Dus $AE = EF$.

b



c $EF = AE = \sqrt{45}$ cm, $AF = \sqrt{72}$ cm . $\triangle AEF$ is dus gelijkbenig.

$\cos \angle EAF = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{72}}{\sqrt{45}} \Rightarrow \angle EAF \approx 50,7°$ en dus is ook $\angle AFE \approx 50,7°$ en

$AEF \approx 180° - 2 \cdot 50,7 \approx 78,6°$

d De minimale lengte van het lint krijg je als AP loodrecht op EF staat. Vanwege symmetrie staat CP dan ook loodrecht op EF.

$\sin \angle AEF = \dfrac{|AP|}{|AE|} \Rightarrow \sin 78,6° = \dfrac{|AP|}{\sqrt{45}} \Rightarrow |AP| = \sqrt{45} \cdot \sin 78,6° \approx 6,6$.

Het hele lint wordt dus $2.6,58 = 13,2$ cm.

e Het lichaam Is op te vatten als twee dezelfde piramides met toppen A en C en grondvlak $BEFD$.

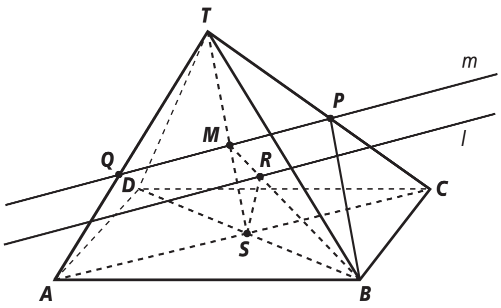
Oppervlakte $BEFD = 3 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 18 + 9 = 27$ cm^2 .

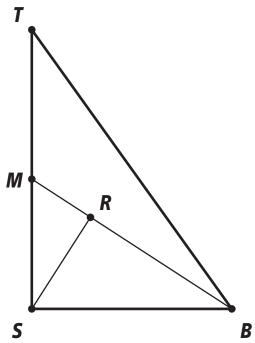
Inhoud $ABCDEF = 2 \cdot$ inhoud $A.BEFD = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{27} \cdot 27 = 18\sqrt{27} \approx 93,53$ cm^3

f Omdat de vlakken ADF en CBE evenwijdig zijn, is de afstand tussen AF en CE gelijk aan de afstand van E tot ADF. Noem N het midden van AF, dan staat EN loodrecht op AF (omdat $AE = EF$) en EN staat loodrecht op DF (want DF staat loodrecht op vlak $ABCD$ en EN is evenwijdig aan vlak $ABCD$). De gezochte afstand is dus EN. $EN = \sqrt{45 - (\frac{1}{2}\sqrt{72})^2} = \sqrt{27} \approx 5,2$.

De afstand van de lijnen AF en CE is dus 5,2 cm.

45a





Het midden van AT is Q. Het vlak QPB is evenwijdig met AC en PQ ligt erin.
Het vlak BDT staat loodrecht op AC. BDT snijdt QPB langs de lijn BM, waarbij
M het midden van TS is. $MS = 2, SB = \frac{1}{2}\sqrt{16+16} = \sqrt{8}$, $MB = \sqrt{8+4} = \sqrt{12}$
In $\triangle BMS$ geldt: $SR \cdot MB = MS \cdot SB \Rightarrow SR = \dfrac{2\sqrt{8}}{\sqrt{12}} \approx 1,63$

b De lijn l ligt in vlak BPQ en gaat door R.

c Elke lijn in vlak BPQ die evenwijdig is aan l voldoet hieraan. Bijvoorbeeld de lijn PQ.

ICT De hoek tussen twee lijnen

bladzijde 294

I-1a Alle hoeken in de vlakken $ABCD$ en $EFGH$ zie je op ware grootte.

b Bijvoorbeeld $\angle ADC$ en $\angle EFG$.
De hoeken zie je op ware grootte als je bijvoorbeeld het bovenvlak evenwijdig neemt aan het vlak van tekening: je kijkt er dan “van boven op”.

I-2a Omdat HA, AF en FG zijvlaksdiagonalen zijn geldt $HA = AF = FH$ en is de driehoek HAF gelijkzijdig met hoek $\angle HAF = 60°$.
De hoek tussen HA en AF is $\angle HAF = 60°$.

b Draai de kubus in de kijkrichting EM met M op AC zo, dat EM loodrecht op het vlak HAF staat.

c –

I-3a Het lijkt erop dat $\angle AJI > 90°$ dus stomp is.

b -

c $AJ = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$; $JI = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$; $EI = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$; $AI = \sqrt{16+20} = \sqrt{36} = 6$.

d $|AI|^2 = |AJ|^2 + |IJ|^2 - 2 \cdot |AJ| \cdot |IJ| \cdot \cos\angle AJI \Rightarrow$
$36 = 20 + 8 - 2 \cdot 20 \cdot 8 \cdot \cos\angle AJI \Rightarrow \cos\angle AJI = \dfrac{28-36}{320} \Rightarrow \angle AJI \approx 91,4°$.

e Punt H ligt niet in het vlak ABC en AB en CH zijn niet evenwijdig, dus kruisen deze lijnen.

f De hoek tussen twee kruisende lijnen verandert niet wanneer je de lijnen evenwijdig verschuift, en $CH \,//\, BE$

g $\angle(AB, CH) = \angle(AB, BE) = \angle ABE = 45°$.

bladzijde 295

I-4a $\angle(AM, BC) = \angle(AM, AD) = \angle MAD$. $\tan\angle MAD = \frac{4}{2} \Rightarrow \angle MAD \approx 63°$

$\angle(AM, CD) = \angle(AM, AB) = \angle MAB = 90°$.

$\angle(AN, BC) = \angle(AN, AD) = \angle NAD$. $|DN| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$

$\tan\angle NAD = \frac{|ND|}{|AD|} = \frac{\sqrt{20}}{4} \Rightarrow \angle NAD \approx 48°$

$\angle(AN, BD) = \angle(AN, FH) = \angle(AN, SN)$

Punt S is het midden van FG.

Bereken de zijden van driehoek ANS.

$ES = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \Rightarrow AS = \sqrt{16+20} = 6$; $NS = \frac{1}{2}HF = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$;

$AN = \sqrt{20+16} = 6$. Cosinusregel in ΔASN :

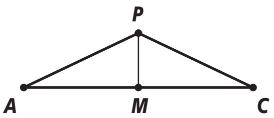
$AS^2 = AN^2 + NS^2 - 2\cdot NS\cdot AN\cdot\cos\angle ANS$

$36 = 36 + 8 - 2\cdot 6\cdot 2\sqrt{2}\cdot\cos\angle ANS \Rightarrow \cos\angle ANS = \frac{36+8-36}{24\sqrt{2}} \Rightarrow \angle ANS \approx 76°$

I-5a CF en CD liggen in het vlak en vierkant $ACFD$ waarin de diagonaal CD de hoek ACF middendoor deelt. Dus $\angle(CF, CD) = 45°$.

b $\angle B = 90°$ dus $CP = AP = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

In $\triangle APC$ geldt: $\sin\angle APM = \frac{|AM|}{|AP|} = \frac{2}{\sqrt{20}} \Rightarrow \angle APM \approx 26{,}6°$



Dus $\angle(AP, CP) = 2\cdot\angle APM \approx 53°$

c $AE = EC = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$ en

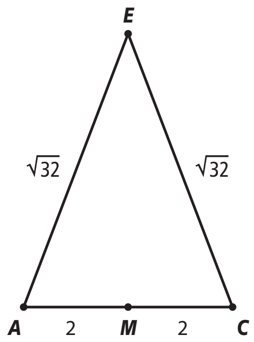
$EM = \sqrt{32-4} = \sqrt{28}$

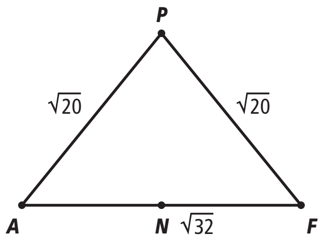
$\sin\angle AEM = \frac{2}{\sqrt{32}} \Rightarrow \angle AEM \approx 20{,}7°$

$\angle AEC = 2\cdot\angle AEM \approx 41°$

$AP = PF = \sqrt{20}$ en $AF = AE = \sqrt{32}$

$\sin\angle APN = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{32}}{\sqrt{20}} \Rightarrow \angle APN \approx 39{,}2° \Rightarrow \angle APF = 2\cdot\angle APN \approx 78°$





d K is het midden van AD en M is het midden van AC. Dan geldt: $DC \,//\, KM$ en $AP \,//\, KE$.

Dus $\angle(AP, DC) = \angle(KE, KM) = \angle MKE$.

$KE = AP = \sqrt{20}$; $KM = \frac{1}{2}\cdot DC = \frac{1}{2}\sqrt{32}$; $EM = \sqrt{28}$.

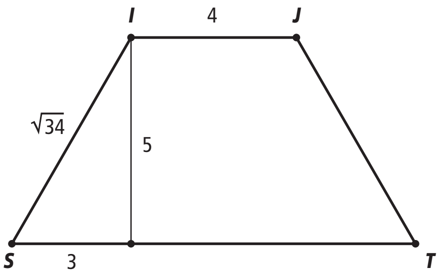
In $\triangle KEM$ geldt: $|EM|^2 = |KE|^2 + |KM|^2 - 2\cdot|KE|\cdot|KM|\cdot\cos\angle MKE \Rightarrow$

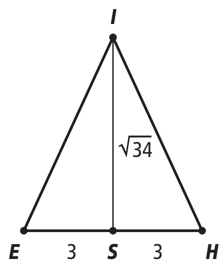
$28 = 20 + 8 - 2\cdot\sqrt{20}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{32}\cdot\cos\angle MKE \Rightarrow \cos\angle MKE = \frac{0}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{32}} = 0 \Rightarrow \angle MKE = 90°.$

Dus $\angle(AP, DC) = 90°$.

I-6a -

b

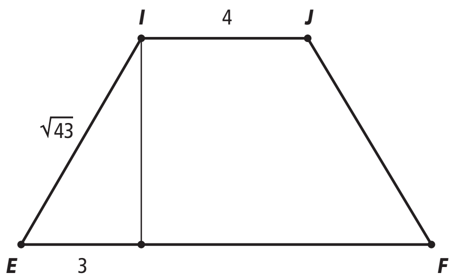




Noem S het midden van EH en T het midden van FG, en bekijk vierhoek $IJTS$.
Er geldt: $SI = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$.
In driehoek EHI geldt: $\angle(EI, HI) = \angle EIH = 2 \cdot \angle EIS$.

$\tan \angle EIS = \dfrac{3}{\sqrt{34}} \Rightarrow \angle EIS \approx 27{,}2° \Rightarrow \angle(EI, HI) \approx 54°$

c



$EI = \sqrt{|ES|^2 + |IS|^2} = \sqrt{9 + 34} = \sqrt{43}$; $\angle(EI, EF) = \angle IEF$.

$\cos \angle IEF = \dfrac{3}{\sqrt{43}} \Rightarrow \angle IEF \approx 63°$. Dus $\angle(EI, EF) \approx 63°$.

d Omdat IJ en EF evenwijdig lopen, valt het beeld van EF na een evenwijdige verplaatsing aan zichzelf met IJ samen en is de hoeken tussen EI en EF even groot als de hoek tussen EI en IJ.

e EF en IJ zijn evenwijdig, dus liggen EI en FJ in vlak $EFJI$.
EI en FJ zijn niet evenwijdig, dus snijden EI en FJ elkaar.
EI en FJ snijden elkaar in punt T. Dan is driehoek EFT gelijkbenig, dus
$\angle TEF = \angle TFE \approx 63°$.
$\angle(EI, FJ) = \angle ETF \approx 180° - 2 \cdot 63° \approx 54°$

Test jezelf

bladzijde 298

T-1a Cosinusregel in ΔACD geeft: $|AC|^2 = |AD|^2 + |CD|^2 - 2 \cdot |AD| \cdot |CD| \cdot \cos \angle CDA \Rightarrow$

$|AC|^2 = 25 + 100 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \cos 120° \Rightarrow |AC|^2 = 175 \Rightarrow |AC| = \sqrt{175} \approx 13{,}2$.

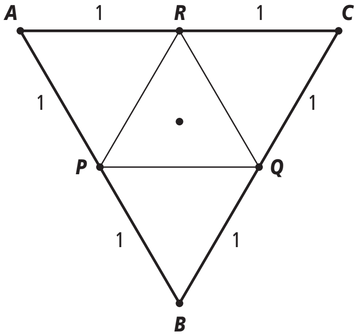
b $|AT|^2 = |AM|^2 + |MT|^2 \Rightarrow |AT|^2 = 2 \cdot (\tfrac{1}{2}\sqrt{175})^2 = 87{,}5 \Rightarrow |AT| = \sqrt{87{,}5} \approx 9{,}4$.

c $|DC|^2 = |AD|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AD| \cdot |AC| \cdot \cos \angle CAD \Rightarrow$

$100 = 25 + 175 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{175} \cdot \cos \angle CAD \Rightarrow$

$\cos \angle CAD = \dfrac{25 + 175 - 100}{10\sqrt{175}} = \dfrac{10}{\sqrt{175}} \Rightarrow \angle CAD \approx 41°.$

T-2a

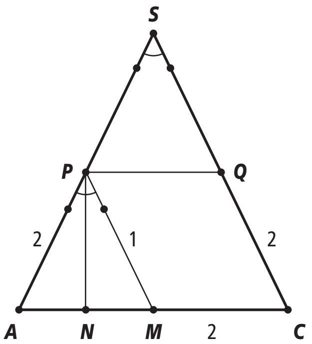


b Omdat $PQ = \frac{1}{2}BC$, zijn de buizen alle drie 1 meter lang.

c Bijvoorbeeld de paren PQ en AB; PQ en BC; PB en CQ en PB en AR.
Om de paren te vinden, kun je uitgaan van drie punten in een vlak gelegen.
Trek door twee van de drie punten een lijn en verbind het overgebleven punt met een punt niet liggend in het gekozen vlak. Controleer nog even of de lijnen niet evenwijdig lopen, want die mogelijkheid heb je dan nog wel.

d Omdat vlak PQR evenwijdig loopt met vlak ABC, kun je die hoek in het bovenaanzicht vinden.
$\angle(PQ, AB) = 60°$

e

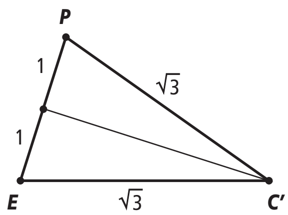


Noem S het snijpunt van AP en CQ, M het midden van AC , P het midden van AS en N het midden van AM.
De hoek tussen AP en CQ is gelijk aan de hoek tussen AP en PM.

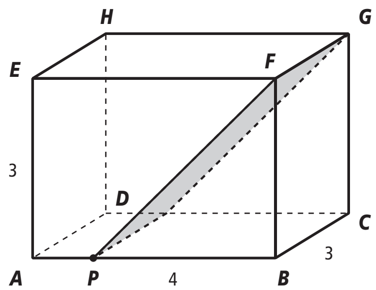
$$\sin\angle APN = \frac{0{,}5}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \angle APN \approx 14{,}48 \Rightarrow \angle APM = 2 \cdot \angle APN \approx 29° \ .$$

De hoek tussen AP en CQ is ongeveer 29°.

f RP en BC lopen evenwijdig. Je kunt RC dus evenwijdig aan zichzelf verplaatsen totdat het beeld van R samenvalt met P. Het beeld C' van C zal dan halverwege CB komen.
$AC' = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.
$\angle(AP, CR) = \angle(AP, C'P) = \angle C'PA$.
$\cos\angle C'PA = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \angle C'PA \approx 55°$.

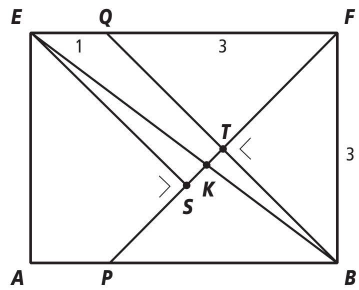


T-3a



b Omdat $BF\,//\,DH$ geldt dat $\angle(DH,V)=\angle(BF,V)$. De loodrechte projectie van B op V ligt op de lijn PF. Dus $\angle(BF,V)=\angle BFP=45^\circ$ want $BP=BF=3$ en $\angle PBF=90^\circ$.

c $\angle(HC,V)=\angle(EB,V)$. Dus EB projecteren op V, dus op FP.
Q ligt op EF, zodat $EQ=1$. Dan is $PBFQ$ een vierkant en dus $BQ\perp FP$.
De projectie van B op V is dan punt T. De projectie van E op V is punt S.
Er geldt: $\angle(BE,V)=\angle(BE,TS)=\angle BKT$.

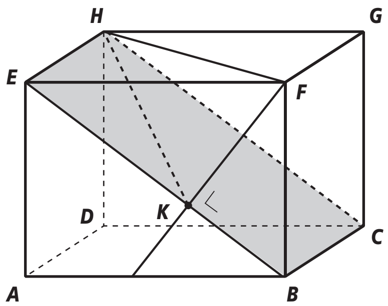


$\angle FBQ=45^\circ$ en $\tan\angle FBE=\frac{4}{3}\Rightarrow\angle FBE\approx 53^\circ$.

Dus is $\angle TBK\approx 53^\circ-45^\circ\approx 8^\circ\Rightarrow\angle BKT\approx 90^\circ-8^\circ\approx 82^\circ$.

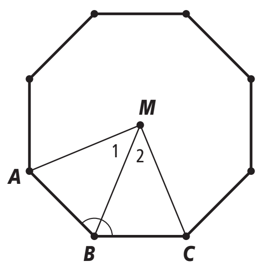
De hoek tussen HC en V is ongeveer 82°.

d

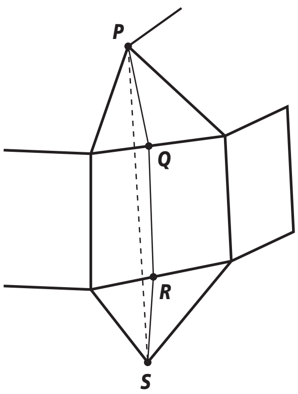


e $\angle(HF,EBCH)=\angle(HF,HK)=\angle FHK$.
Gebruik makend van de oppervlakte van driehoek BFE geeft dit:
$|FK|\cdot|EB|=|EF|\cdot|BF|\Rightarrow|FK|\cdot 5=4\cdot 3\Rightarrow|FK|=2{,}4$
$\sin\angle KHF=\frac{|KF|}{|HF|}=\frac{2{,}4}{5}\Rightarrow\angle KHF\approx 29^\circ$. Dus $\angle(HF,EBCH)\approx 29^\circ$.

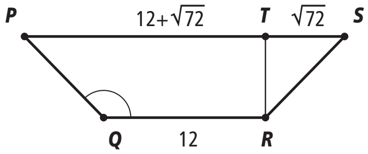
T4a Uit het bovenaanzicht volgt dat de hoek tussen twee aangrenzende vierkanten, de hoek van een regelmatige achthoek is. $\angle ABC=\frac{8\cdot 180^\circ-360^\circ}{8}=135^\circ$.
De hoek van twee aangrenzende vierkanten is dus 135°.



b Hieronder staat een stukje van de rhombikuboctaëder getekend.
De hoek tussen een vierkant en een aangrenzende driehoek is $\angle PQR$.



Licht $PQRS$ eruit.



$PQRS$ is een gelijkbenig trapezium met QR = 12 , $PQ = RS = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108}$ en

$PS = 12 + 2\sqrt{72}$.

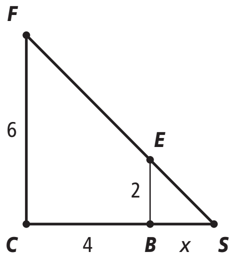
$\cos\angle TSR = \dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{108}} \Rightarrow \angle TSR \approx 35° \Rightarrow \angle SRQ = \angle PQR \approx 180° - 35° \approx 145°$.

De hoek tussen een vierkant en aangrenzende driehoek is dus $145°$.

bladzijde 299

T-5a $|AB| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} \approx 5{,}66$; $|DE| = \sqrt{1+32} = \sqrt{33} \approx 5{,}74$;
$|EF| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} \approx 5{,}66$;
$|DF| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$.

b



$\triangle CSF \sim \triangle BSE \Rightarrow \dfrac{CF}{BE} = \dfrac{CS}{BS} \Rightarrow \dfrac{6}{2} = \dfrac{4+x}{x} \Rightarrow$

$6x = 8 + 2x \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$.

Dus $|BS| = 2 \Rightarrow |CS| = 6 \Rightarrow |FS| = 6\sqrt{2}$.

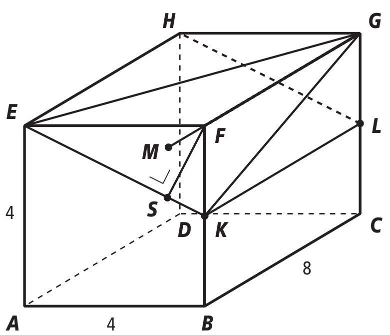
c $\triangle ABF$ is gelijkbenig want $|AF| = |BF| = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$; $|AB| = 4\sqrt{2}$

Noem het midden van AB punt S. $d(F, AB) = FS = \sqrt{(\sqrt{52})^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{52-8} = \sqrt{44} \approx 6{,}63$

d De hoogtelijn uit A op zijde BF is AN. In $\triangle ABF$ geldt dan:

$|FS| \cdot |AB| = |AN| \cdot |BF| \Rightarrow \sqrt{44} \cdot \sqrt{32} = |AN| \cdot \sqrt{52} \Rightarrow |AN| = \dfrac{\sqrt{44} \cdot \sqrt{32}}{\sqrt{52}} \approx 5{,}2$.

T-6a



b Laat uit F in driehoek EKF een hoogtelijn neer op EK. Omdat KL loodrecht staat op vlak $ABFE$, is FS de afstand van F tot vlak EKL, want FS loodrecht EK en FS loodrecht KL.
In driehoek EKF geldt: $|EK| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$.

Ook geldt: $|FS| \cdot |EK| = |EF| \cdot |FK| \Rightarrow |FS| \cdot \sqrt{20} = 4 \cdot 2 \Rightarrow |FS| = \dfrac{8}{\sqrt{20}} \approx 1{,}8$

Dus de afstand van F tot vlak EKL is ongeveer 1,8.

c Laat uit F een loodlijn neer op vlak EKG. Deze snijdt het vlak in M. De afstand van F tot vlak EKG is dan MF.
Om MF te berekenen kun je de inhoud van de piramide $G.EKF$ op twee manieren berekenen.
Eerst bereken je de oppervlakte van driehoek EKG.
In $\triangle EKG$ geldt: $|GK|^2 = |EK|^2 + |EG|^2 - 2 \cdot |EK| \cdot |EG| \cdot \cos\angle GEK \Rightarrow$

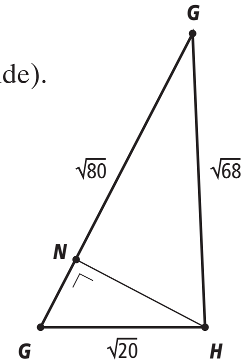
$68 = 20 + 80 - 2 \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{80} \cdot \cos\angle GEK \Rightarrow \cos\angle GEK = \dfrac{80+20-68}{2 \cdot \sqrt{80} \cdot \sqrt{20}} \Rightarrow \angle GEK \approx 66{,}42°$.

$\sin\angle GEK = \dfrac{|NK|}{|EK|} \Rightarrow |NK| = \sqrt{20} \cdot \sin 66{,}42° \approx 4{,}1$.

Dus oppervlakte $EKG = \frac{1}{2} \cdot 4{,}1 \cdot \sqrt{80} \approx 18{,}33$.
Inhoud piramide $G.EFK$ = Inhoud piramide $F.EKG$ (zelfde piramide).

Dus: $\frac{1}{3} \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = \frac{1}{3} \cdot |FM| \cdot 18{,}33 \Rightarrow |FM| \approx \dfrac{32}{18{,}33} \approx 1{,}75$.

De afstand van F tot vlak EKG is 1,75.



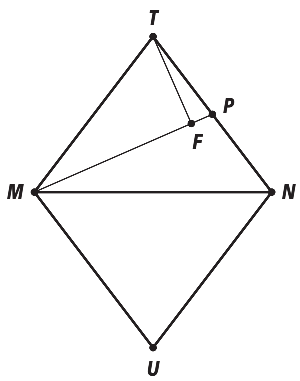
T-7a $TBUD$ is een vierkant met zijden 6. De diagonaal is $TU = \sqrt{36+36} = \sqrt{72} \approx 8{,}5$

b Kijk naar de doorsnede met vlak ATC. Dan zie je dat de gevraagde afstand gelijk is aan: $d(S, TBD) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot |AC| = \frac{1}{4}\sqrt{72} \approx 2{,}1$ (je moet twee maal door 2 delen: ten eerste omdat S op halve hoogte ligt tussen C en T en ten tweede omdat het vlak TBD halverwege A en C ligt).

c Neem M het midden van AB en N het midden van CD.
Vlak TMN staat loodrecht op vlak ABS.
Vlak ABS snijdt TN in P, P is het midden van TN.
$MN = 6$; $MT = TN = \sqrt{27}$; $TP = NP = \frac{1}{2}\sqrt{27}$.
Bekijk $\triangle MNT$, er geldt:
$|TM|^2 = |MN|^2 + |TN|^2 - 2 \cdot |MN| \cdot |TN| \cdot \cos\angle TNM \Rightarrow$
$27 = 36 + 27 - 2 \cdot 6 \cdot \sqrt{27} \cdot \cos\angle TMN \Rightarrow$

$\cos\angle TMN = \dfrac{36}{12\sqrt{27}} = \dfrac{3}{\sqrt{27}}$.

$\angle TMN = \angle TNM \Rightarrow \cos\angle TNM = \dfrac{3}{\sqrt{27}}$



Bekijk driehoek PMN;

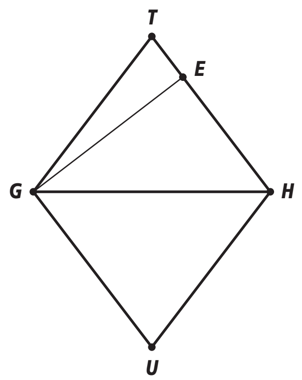
$|MP|^2 = |MN|^2 + |NP|^2 - 2 \cdot |MN| \cdot |NP| \cdot \cos\angle TNM \Rightarrow$

$|MP|^2 = 36 + \dfrac{27}{4} - 2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{27} \cdot \dfrac{3}{\sqrt{27}} = 24{,}75 \Rightarrow |MP| = \sqrt{24\tfrac{3}{4}} \approx 4{,}97$.

Oppervlakte $\Delta MPT = \frac{1}{2}$ oppervlakte $\Delta MTN \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot |TF| \cdot \sqrt{24\tfrac{3}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2}\sqrt{72}) \cdot 6 \Rightarrow$

$|TF| = \dfrac{1\frac{1}{2}\sqrt{72}}{\sqrt{24\frac{3}{4}}} \approx 2{,}6$. De afstand van T tot vlak ABS is dus ongeveer 2,6.

d Neem G het midden van AD en H het midden van BC.
Vlak TGH staat loodrecht op AD.
De oppervlakte van driehoek TGH wordt berekend als in onderdeel c: $\frac{3}{2}\sqrt{72}$.
Deze oppervlakte is tevens gelijk aan $\frac{1}{2}\cdot|TH|\cdot|GE|$ zodat de gezochte afstand gelijk is aan: $|GE| = \dfrac{3\sqrt{72}}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{72} \approx 4{,}24$



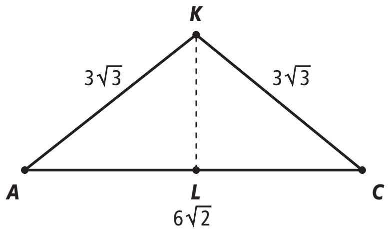
e $\angle(ADU, ADT) = \angle TGU$. Net als in onderdeel c geldt

$\cos\angle TGH = \dfrac{3}{\sqrt{27}} \Rightarrow \angle TGH \approx 54{,}7^\circ$.

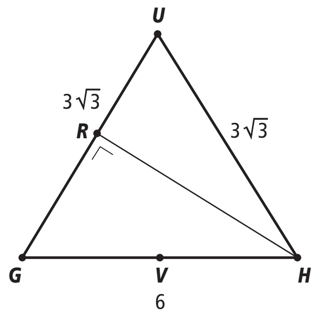
$\angle TGU = 2\cdot\angle TGH \approx 2\cdot 54{,}7 \approx 109^\circ$.

f De snijlijn van de vlakken ABT en BCT is de lijn BT. Noem het midden van BT punt K. Omdat ABT en BCT beide gelijkzijdige driehoeken zijn staan AK en CK dus loodrecht op BT. Dus staat vlak AKC loodrecht op BT. Vlak ACK is het standvlak.
$\angle(ABT, CBT) = \angle AKC$. Hieronder staat vlak AKC.

$\angle AKC = 2\cdot\angle AKL$. $\sin\angle AKL = \dfrac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \angle AKL \approx 54{,}7^\circ \Rightarrow \angle AKC = \angle(ABT, CBT) \approx 109^\circ$



g H is het midden van BC, G is het midden van AD.
$\text{d}(AUD, BCT) = \text{d}(H, AUD) = \text{d}(H, UG) = HR$.
Er geldt:
$|HR|\cdot|GU| = |UV|\cdot|GH| \Rightarrow |HR|\cdot 3\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{72}\cdot 6 \Rightarrow$
$|HR| = \dfrac{3\sqrt{72}}{3\sqrt{3}} \approx 4{,}9$.
Dus $\text{d}(AUD, BCT) \approx 4{,}9$.



T-8a Alle horizontale vlakken zijn evenwijdig is waar.

b Alle verticale vlakken zijn evenwijdig is niet waar; twee aanliggende verticale vlakken van een kubus snijden elkaar en zijn dan niet evenwijdig.

c Alle verticale lijnen zijn evenwijdigis waar (behalve als ze samenvallen)

d Alle horizontale lijnen zijn evenwijdig is niet waar In een kus $ABCD.EFGH$ zijn AB en EH horizontaal, maar niet evenwijdig.

e Waar.

f Waar, dat geldt voor alle vlakken, het horizontaal en verticaal zijn is hierbij niet van belang, wanneer er maar twee evenwijdig zijn .

g Waar, zie f.