Hoofdstuk 1 - Logaritmische functies

Voorkennis: Machten en exponenten

bladzijde 12

V-1a $a^3 \times a^4 = a^{3+4} = a^7$, $(a^2)^5 = a^{2\cdot 5} = a^{10}$, $a^{-4} \times a^3 = a^{-4+3} = a^{-1}$.

b $a^{-3} = \dfrac{1}{a^3}$; $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

V-2a $2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5 = 2^{3+4+5} = 2^{12}$.

b $8\sqrt{2} \times 16\sqrt{2} = 8 \times 16 \times 2 = 256 = 2^8$.

c $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{36} = \sqrt[3]{6 \times 6^2} = \sqrt[3]{6^3} = 6$.

d $(2^3 \cdot 2^4)^5 = (2^7)^5 = 2^{35}$.

e $(3x^7)^4 = 3^4 x^{28} = 81x^{28}$.

f $(48x^8) : (8x^6) = 6x^{8-6} = 6x^2$.

V-3a $3^{4-x} = 27,\ 3^{4-x} = 3^3,\ 4 - x = 3,\ x = 1$.

b $5^{-2x} = \frac{1}{5}$, $5^{-2x} = 5^{-1}$, $-2x = -1$, $x = \frac{1}{2}$.

c $4 \cdot 3^x = 4$, $3^x = 1$, $x = 0$.

d $(0{,}25)^x = 64$, $(2^{-2})^x = 2^6$, $-2x = 6$, $x = -3$.

e $(0{,}25)^x = 32$, $-2x = 5$, $x = -2\frac{1}{2}$.

f $7^{1-2x} = 49\sqrt{7}$, $7^{1-2x} = 7^2 \cdot 7^{\frac{1}{2}} = 7^{2\frac{1}{2}}$, $1 - 2x = 2\frac{1}{2}$, $-2x = 1\frac{1}{2}$, $x = -\frac{3}{4}$.

g $\sqrt[5]{125} = (\frac{1}{5})^x$, $5^{\frac{3}{5}} = (5^{-1})^x$, $5^{\frac{3}{5}} = 5^{-x}$, $\frac{3}{5} = -x$, $x = -\frac{3}{5}$.

h $(\frac{1}{8})^{1-x} = \sqrt[5]{4^x}$, $(2^{-3})^{1-x} = \sqrt[5]{2^{2x}}$, $2^{-3+3x} = 2^{\frac{2}{5}x}$, $-3 + 3x = \frac{2}{5}x$, $2\frac{3}{5}x = 3$, $x = \frac{15}{13}$.

V-4a

x	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	64	128	256	512	1024	2048

b In de tabel zie je dat de startwaarde gelijk is aan 256 en dat de groeifactor gelijk is aan 2 .
Dus het functievoorschrift is te schrijven als $f(x) = 256 \cdot 2^x$.

c De startwaarde geeft het snijpunt $(0, 256)$ met de y-as.
De groeifactor 2 betekent een stijgende grafiek, als x met 1 toeneemt wordt $f(x)$ tweemaal zo groot.

bladzijde 13

V-5 De grafiek van p is dalend en de grafiek van q is stijgend.

b $p(x) = 3^4 \cdot 3^{-\frac{1}{2}x} = 81 \cdot (\frac{1}{\sqrt{3}})^x$
$q(x) = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2})^{-2x} = 5 \cdot 4^x$

V-6a De groeifactor is een kleiner dan 1, de grafiek daalt dus.

b De groeifactor is gelijk aan $1{,}23^{-2} = \frac{1}{1{,}23^2} < 1$, dus de grafiek daalt.

c De grafiek van 2^x stijgt, de grafiek van -2^x daalt en de grafiek van $f(x) = -2^x + 15$ daalt ook.

d De groeifactor is gelijk aan $(\frac{1}{2})^{-1} = 2$, dus de grafiek stijgt.

e Het functievoorschrift kun je schrijven als $l(x) = (\frac{4}{3})^x$. Omdat de groeifactor groter is dan 1, stijgt de grafiek.

f Het functievoorschrift is te schrijven als $m(x) = (\frac{3}{7})^x$. De groeifactor is dus kleiner dan 1 en de grafiek daalt.

V-7a Er geldt dat $f(x)=6\cdot(\frac{1}{3})^2\cdot(\frac{1}{3})^{-x}=6\cdot\frac{1}{9}\cdot(3^{-1})^{-x}=\frac{2}{3}\cdot 3^x=g(x)$.
b $m(x)=1{,}25\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}8^{-x}=0{,}64\cdot(0{,}8^{-1})^x=0{,}64\cdot 1{,}25^x=n(x)$.

V-8a Door te spiegelen in de x-as, wordt de y-coördinaat van elk punt op de grafiek van f met -1 vermenigvuldigd. Dus $g(x)=-4\cdot 1{,}2^{x-1}$.
b Als je spiegelt in de y-as wordt de x-coördinaat van elk punt met -1 vermenigvuldigd. Er geldt dus dat $h(x)=4\cdot 1{,}2^{-x-1}$.

V-9a De beginhoeveelheid is gelijk aan $M(0)=5{,}625\cdot 2{,}56^2=36{,}864$ en de groeifactor per uur is $2{,}56^{\frac{1}{2}}=1{,}6$.
b De groeifactor per uur is $1{,}6$, dus de groeifactor per half uur is $\sqrt{1{,}6}\approx 1{,}26$.
c Dan geldt $b=36{,}864$ en $g=1{,}6$.

1.1 Logaritmen

bladzijde 14

1a $B(t)=1\cdot 3^t=3^t$
b Als je de grafieken van $y=3^t$ en $y=2$ plot, kun je met de opties van de rekenmachine het snijpunt opzoeken. Je vindt dan $t\approx 0{,}631$.
c Je moet dan de vergelijking $3^t=2$ oplossen.
d Met een tabel vind je de volgende waarden:

t	1	1,26	1,63	2
B	3	4	6	9

e In beide gevallen gaat er 1 maand voorbij, want in die tijd wordt de oppervlakte, die door de waterplanten bedekt wordt, drie keer zo groot.

bladzijde 15

2a $3^t=4$ geeft $t={}^3\log 4$, $3^t=6$ geeft $t={}^3\log 6$ en $3^t=9$ geeft $t={}^3\log 9$.
b $t={}^3\log 5$ is de oplossing van de vergelijking $3^t=5$ en $t={}^5\log 3$ is de oplossing van de vergelijking $5^t=3$.
c ${}^3\log 5$ is de tijd die nodig is om iets 5 keer zo groot te laten worden wanneer de groeifactor 3 is.
${}^5\log 3$ is de tijd die nodig is om iets 3 keer zo groot te laten worden wanneer de groeifactor 5 is.

3 Gehele getallen krijg je als achter het woord log een macht van het grondtal 3 staat. Dus bij ${}^3\log 1$, ${}^3\log 3$, ${}^3\log 9$, ${}^3\log 27$, ${}^3\log 81$, ${}^3\log 243$, ${}^3\log 729$.

4a ${}^3\log 27=3$ omdat $3^3=27$.
b ${}^3\log\frac{1}{9}=-2$ omdat $3^{-2}=\frac{1}{9}$.
c ${}^3\log 3\sqrt{3}=1\frac{1}{2}$ omdat $3^{1\frac{1}{2}}=3^1\cdot 3^{\frac{1}{2}}=3\sqrt{3}$.
d ${}^3\log 1=0$ omdat $3^0=1$.

5a ${}^3\log 12$ ligt tussen 2 en 3, want $3^2<12<3^3$.
b ${}^5\log 1000$ ligt tussen 4 en 5, want $5^4<1000<5^5$.
c ${}^{0,1}\log 5$ ligt tussen -1 en 0, want $1=0{,}1^0<5<0{,}1^{-1}=10$.
d ${}^{\frac{1}{5}}\log 0{,}3$ ligt tussen 0 en 1, want $(\frac{1}{5})^1<0{,}3<(\frac{1}{5})^0$.

6a ${}^{2}\log 18$ kun je opvatten als de tijd die nodig is om een 18 keer zo grote hoeveelheid te krijgen bij groeifactor 2. Als je die tijd aangeeft met t , dan geldt dus $2^t = 18$.

b Het snijpunt van beide grafieken is bij benadering het punt met coördinaten (4,17; 18)

c ${}^{2}\log 18 \approx 4,17$.

7a Je lost de vergelijking $(\frac{1}{2})^t = 0,1$ op. Je vindt $t \approx 3,32$.

b Je lost de vergelijking $10^t = 1100$ op. Je vindt $t \approx 3,04$.

c Je lost de vergelijking $0,3^t = 15$ op. Je vindt $t \approx -2,25$.

d Je lost de vergelijking $4^t = 33$ op. Je vindt $t \approx 2,52$.

8a Je lost op $100 \cdot 2^t = 150$. Je vindt $t \approx 0,58$. Dus na ruim 17 dagen.

b Het duurt 1,32 maanden voordat het aantal muizen 250 is. Dus duurt het $1,32 - 0,58 = 0,74$ maanden om het aantal muizen te laten groeien van 150 naar 250. Dat is ongeveer 22 dagen.

c De beginhoeveelheid is 100 muizen, dus het duurt 1,32 maanden om het aantal te laten groeien tot 250. Dat is ongeveer 40 dagen.

1.2 rekenregels voor logaritmen

bladzijde 16

9a Je moet dan oplossen $2^t = 3$. Je vindt met de rekenmachine dat $t \approx 1,58$.

b Bij groeifactor 4 duurt het 2 maanden want $2^2 = 4$ en als de groeifactor gelijk is aan 12 duurt het ongeveer 3,58 maanden.

c Als het aantal muizen 12 keer zo groot wordt, dan tel je de tijd die nodig is om het aantal muizen vier keer zo groot te maken op bij de tijd die nodig is om daar op volgend het aantal muizen drie keer zo groot te maken. De totale tijd die nodig is, is dus $1,58 + 2 = 3,58$ maanden.

d Als bij groeifactor 2 de tijd die nodig is om het aantal muizen drie keer zo groot te maken opgeteld wordt bij de tijd die nodig is om het aantal muizen vijf keer zo groot te maken, krijg je de tijd die nodig is om het aantal muizen 15 keer zo groot te maken.

e Als het aantal muizen a keer zo groot wordt zijn daarvoor ${}^{2}\log a$ maanden nodig en als het aantal muizen b keer zo groot wordt, zijn daarvoor ${}^{2}\log b$ maanden tijd nodig. Als je deze tijden optelt, krijg je de tijd die nodig is om het aantal muizen $a \cdot b$ keer zo groot te maken.

10a De groeitijd die nodig is om bij groeifactor 2 de beginhoeveelheid 7 keer zo groot te maken is gelijk aan ${}^{2}\log 7$. Als je deze groeitijd verdubbelt, wordt de beginhoeveelheid $7 \times 7 = 7^2$ keer zo groot.
Dit betekent dat $2 \cdot {}^{2}\log 7 = {}^{2}\log 7^2$.

b Als je de groeitijd 5 keer zo groot maakt, dan wordt de beginhoeveelheid $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^5$ keer zo groot en de groeitijd die daarvoor nodig is kun je aangeven met $5 \cdot {}^{2}\log 7$ maar ook met ${}^{2}\log 7^5$.

c Als je de groeitijd k keer zo groot maakt, dan wordt de beginhoeveelheid k keer met a vermenigvuldigd en dus a^k keer zo groot. Er geldt dus ${}^{2}\log a^k = k \cdot {}^{2}\log a$.

d Als de beginhoeveelheid gelijk is aan 1en je maakt die a keer zo klein, dan is de bijbehorende groeitijd gelijk aan $-\log a$, want je gaat vanaf het begintijdstip terug in de tijd.

11a ${}^2\log 5 + {}^2\log 7 = {}^2\log 5 \cdot 7 = {}^2\log 35$ dus ${}^2\log 35 - {}^2\log 5 = {}^2\log 7$

b ${}^g\log a + {}^g\log \dfrac{b}{a} = {}^g\log(a \cdot \dfrac{b}{a}) = {}^g\log b$

c Als je van zowel het linkerlid als het rechterlid van de vergelijking van opdracht 11b ${}^g\log a$ aftrekt, krijg je ${}^g\log \dfrac{b}{a} = {}^g\log b - {}^g\log a$.

bladzijde 17

12a ${}^5\log 12 + {}^5\log 3 = {}^5\log 36$

b ${}^3\log 5 + 2 \cdot {}^3\log 4 = {}^3\log 5 + {}^3\log 4^2 = {}^3\log(5 \cdot 4^2) = {}^3\log 80$

c $2 \cdot {}^2\log 36 - 4 \cdot {}^2\log 3 = {}^2\log 36^2 - {}^2\log 3^4 = {}^2\log \dfrac{36^2}{3^4} = {}^2\log 16 = 4$

d ${}^7\log 50 - {}^7\log 6 + {}^7\log 30 = {}^7\log(\frac{50}{6} \cdot 30) = {}^7\log 250$

13a $1 = {}^2\log 2$

b Het linkerlid kun je schrijven als ${}^2\log 2 + {}^2\log x = {}^2\log 2x$. De vergelijking wordt dan ${}^2\log 2x = {}^2\log(x+7)$.

c Uit $2x = x + 7$ volgt $x = 7$.

d Invullen geeft $1 + {}^2\log 7 = {}^2\log 14$.

14a ${}^3\log x + {}^3\log 5 = 2 \cdot {}^3\log 10 \Rightarrow {}^3\log 5x = {}^3\log 10^2 \Rightarrow 5x = 100 \Rightarrow x = 20$.

b ${}^4\log x = 2 + {}^4\log 15 \Rightarrow {}^4\log x = {}^4\log 16 + {}^4\log 15 \Rightarrow {}^4\log x = {}^4\log(16 \cdot 15) \Rightarrow x = 240$.

c ${}^6\log 54 - {}^6\log 4x = {}^6\log 9 \Rightarrow {}^6\log 54 = {}^6\log 4x + {}^6\log 9 \Rightarrow {}^6\log 54 = {}^6\log 36x \Rightarrow$
$36x = 54 \Rightarrow x = 1\frac{1}{2}$.

d $3 + {}^2\log x = {}^2\log 7 \Rightarrow {}^2\log 8 + {}^2\log x = {}^2\log 7 \Rightarrow {}^2\log 8x = {}^2\log 7 \Rightarrow 8x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{8}$.

15 ${}^2\log 2 + {}^2\log 3 + {}^2\log 4 + \ldots\ldots\ldots + {}^2\log 100 = {}^2\log(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 100) = {}^2\log 100!$
De vergelijking die opgelost moet worden is dus te schrijven als ${}^2\log x = {}^2\log 100!$.
De oplossing is $x = 100!$

1.3 Logaritmen berekenen

bladzijde 18

16a $\log 2 \approx 0,3010$; $\log 5 \approx 0,6990$; $\log 10 = 1$; $\log 25 \approx 1,3980$ en $\log 100 = 2$.

b Dan is $x = 100\,000$.

c Het grondtal 10 hoort bij de log-toets.

d $\log 1\,000\,000 = 6$ want $10^6 = 1\,000\,000$ en $\log 0,0001 = -4$ want $10^{-4} = 0,0001$.

17a $\log 3 \approx 0,4771$; $\log 30 \approx 1,4771$; $\log 300 \approx 2,4771$ en $\log 10 = 1$.

b $\log 30\,000 = \log 10\,000 + \log 3 = 4 + \log 3$.

c $\log 0,003 = \log \frac{3}{1000} = \log 3 - \log 1000 = \log 3 - 3 = -3 + \log 3$, dus $a = -3$.

18a Een van de rekenregels zegt dat $k \cdot {}^{g}\log a = {}^{g}\log a^{k}$. Als je die regel toepast op het linkerlid van de vergelijking, dan krijg je ${}^{10}\log 2^{x} = x \cdot {}^{10}\log 2$.

b Als je linker- en rechterlid van de vergelijking van opdracht 18a deelt door ${}^{10}\log 2$ krijg je $x = \dfrac{{}^{10}\log 5}{{}^{10}\log 2}$.

De oorspronkelijke vergelijking $2^{x} = 5$ heeft als oplossing $x = {}^{2}\log 5$.

Daaruit volgt dat ${}^{2}\log 5 = \dfrac{{}^{10}\log 5}{{}^{10}\log 2}$.

c Met de rekenmachine vind je ${}^{2}\log 5 = \dfrac{\log 5}{\log 2} \approx 2{,}32$. Invullen in de vergelijking geeft $2^{2{,}32} \approx 4{,}9933 \approx 5$.

19 De vergelijking $7^{x} = 4$ heeft als oplossing $x = {}^{7}\log 4$. Je kunt de vergelijking $7^{x} = 4$ ook schrijven als ${}^{10}\log 7^{x} = {}^{10}\log 4$ en daaruit volgt $x \cdot {}^{10}\log 7 = {}^{10}\log 4$ dus $x = \dfrac{{}^{10}\log 7}{{}^{10}\log 4}$.

bladzijde 19

20a ${}^{2}\log 7 = \dfrac{\log 7}{\log 2} \approx 2{,}807$

b ${}^{\frac{1}{2}}\log 128 = \dfrac{\log 128}{\log \frac{1}{2}} = -7$

c ${}^{25}\log 0{,}5 = \dfrac{\log 0{,}5}{\log 25} \approx -0{,}215$

d ${}^{\sqrt{2}}\log 64 = \dfrac{\log 64}{\log \sqrt{2}} = 12$

21a ${}^{2}\log 128 = 7$, ${}^{3}\log 128 = \dfrac{\log 128}{\log 3} \approx 4{,}417$ en ${}^{4}\log 128 = 3\frac{1}{2}$

b Dat komt omdat 128 niet te schrijven is als een macht met het grondtal 3, maar wel als een macht met grondtal 2, want $128 = 2^{7}$.

c $4^{3\frac{1}{2}} = 4^{3} \cdot 4^{\frac{1}{2}} = 64 \cdot \sqrt{4} = 64 \cdot 2 = 128$

22a Dan moet je de vergelijking $7^{t} = 2$ oplossen.

b De oplossing is ${}^{7}\log 2 \approx 0{,}3562$. De verdubbelingstijd is dus ongeveer $0{,}3562 \times 365 \approx 130$ dagen.

c Die tijd is driemaal zo lang als de verdubbelingstijd. De hoeveelheid wordt dus acht keer zo groot in $3 \times 130 = 390$ dagen.

d Als je drie keer verdubbelt wordt de hoeveelheid die er was $2 \times 2 \times 2 = 8$ keer zo groot.

23a De beginhoeveelheid is 100% en de groeifactor is 96% = 0,96 dus de formule is $P = 100 \cdot 0{,}96^{t}$.

b Dan moet gelden $0{,}96^{t} = 0{,}5$. De oplossing is $t = {}^{0{,}96}\log 0{,}5 = \dfrac{\log 0{,}5}{\log 0{,}96} \approx 17$ uren.

c Je lost op $100 \cdot 0{,}96^{t} = 20$. Daaruit volgt $0{,}96^{t} = 0{,}2$. Je vindt $t \approx 39$ uren. Als het aantal uren nog groter wordt, daalt het percentage onder de 20%, dus de batterij is ongeveer 39 uren te gebruiken.

d Uit $P = 100 \cdot 0{,}96^{t}$ volgt dat $0{,}96^{t} = \dfrac{P}{100}$. Dus $t = {}^{0{,}96}\log\left(\dfrac{P}{100}\right)$.

e Je vult voor P eerst 50 en dan 20 in en je vindt achtereenvolgens ongeveer 17 en ongeveer 39 uren.

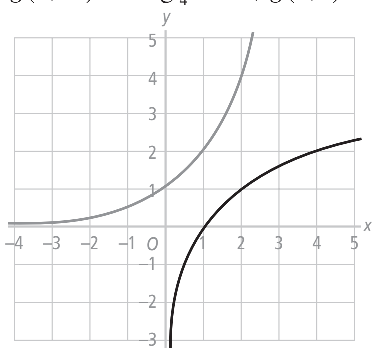
1.4 Logaritmische functies

bladzijde 20

24a $f(-2)=2^{-2}=\frac{1}{4}$, $f(-1)=2^{-1}=\frac{1}{2}$, $f(0)=2^0=1$, $f(1)=2, f(2)=4$ en $f(3)=8$.

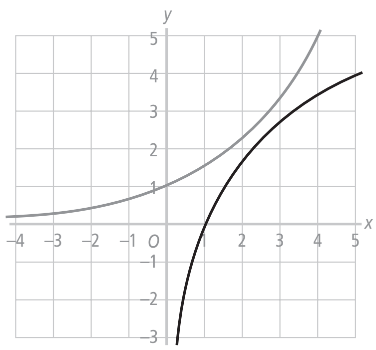
b $g(0,25)={}^2\log\frac{1}{4}=-2$, $g(0,5)={}^2\log\frac{1}{2}=-1$, $g(1)=0$, $g(2)=1$, $g(4)=2$ en $g(8)=3$.

c



d De grafiek van f heeft de x-as als asymptoot en de grafiek van g heeft de y-as als asymptoot.

25a



b Het domein van f is $\mathbb{R}$ en het bereik is het interval $\langle 0, \rightarrow\rangle$.
Het domein van k is het interval $\langle 0, \rightarrow\rangle$ en het bereik is $\mathbb{R}$.

c De horizontale asymptoot van de grafiek van f heeft de vergelijking $y=0$.
De verticale asymptoot van de grafiek van k heeft de vergelijking $x=0$.

d De grafiek van f snijdt de y-as in het punt $(0,1)$ en de grafiek van k snijdt de x-as in het punt $(1,0)$.

e De vergelijking $1,5^x=3$ heeft als oplossing $x={}^{1,5}\log 3\approx 2,71$. Dus $f(x)<3$ als $x<2,71$.
De vergelijking ${}^{1,5}\log x=3$ heeft als oplossing $x=1,5^3=3,375$. Dus $k(x)<3$ als $0<x<3,375$

26a

	stijgen/dalen	domein	bereik	asymptoot	snijpunt x-as
f	stijgen	$\langle 0,\rightarrow\rangle$	$\mathbb{R}$	y-as	(1, 0)
g	stijgen	$\langle 0,\rightarrow\rangle$	$\mathbb{R}$	y-as	(1, 0)
h	stijgen	$\langle 0,\rightarrow\rangle$	$\mathbb{R}$	y-as	(1, 0)

b Als het grondtal groter is dan 1, zal de grafiek steeds minder sterk stijgen.
Als het grondtal steeds een getal tussen 0 en 1 blijft, zal de grafiek steeds sterker dalen.

c Dan zal de grafiek steeds sterker stijgen.

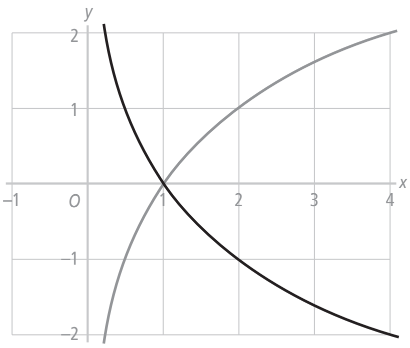
d Het verschil is dat de grafieken van m en n dalen terwijl het domein , het bereik, de asymptoot en het snijpunt met de x-as overeenkomen met die zelfde eigenschappen van de functies van opdracht a.

e Als $0 < g < 1$ dan is de grafiek dalend, maar als $g > 1$ dan is de grafiek stijgend.

bladzijde 21

27a $f(x) = 0$, ${}^{2}\log x = 0$, $x = 2^{0} = 1$.
$g(x) = 0$, ${}^{\frac{1}{2}}\log x = 0$, $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$.

b

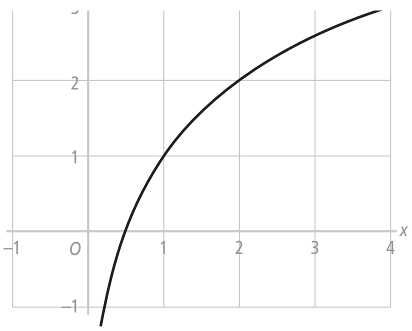


c De grafieken zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegeling in de x-as.

d Tussen de grafieken van k en m bestaat hetzelfde verband.

e ${}^{\frac{1}{g}}\log x = \dfrac{\log x}{\log \frac{1}{g}} = \dfrac{\log x}{\log g^{-1}} = \dfrac{\log x}{-\log g} = -\dfrac{\log x}{\log g} = -{}^{g}\log x$.

28a



b Je lost op $1 + {}^{2}\log x = 0$, ${}^{2}\log x = -1$, $x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.
Dus het snijpunt heeft de coördinaten $(\frac{1}{2}, 0)$.

c Dan moet de grafiek van h één eenheid naar boven worden verschoven.

d $g(x) = 0$, ${}^{2}\log 2x = 0$, $2x = 2^{0} = 1$, $x = \frac{1}{2}$.
$g(x) = 4$, ${}^{2}\log 2x = 4$, $2x = 2^{4} = 16$, $x = 8$.

e Je lost eerst op $f(x) = 4$, $1 + {}^{2}\log x = 4$, ${}^{2}\log x = 3$, $x = 2^{3} = 8$. De oplossingen van de ongelijkheid $f(x) > 4$ zijn de getallen uit het interval $\langle 8, \rightarrow \rangle$.

Uit $f(x) = 6\frac{1}{2}$ volgt dat $1 + {}^{2}\log x = 6\frac{1}{2}$, ${}^{2}\log x = 5\frac{1}{2}$, $x = 2^{5\frac{1}{2}} = 2^{5} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 32\sqrt{2}$.

De oplossingen van de ongelijkheid $f(x) < 6\frac{1}{2}$ zijn de getallen uit het interval $\langle 0, 32\sqrt{2} \rangle \approx \langle 0; 45{,}25 \rangle$.

f ${}^2\log 2x$ is de tijd die nodig is om bij groeifactor 2 de beginhoeveelheid 2*x* keer zo groot te maken.
Die groeitijd is ook gelijk aan $1 + {}^2\log x$, want in 1 tijdseenheid wordt de beginhoeveelheid verdubbeld omdat de groeifactor gelijk is aan 2 en als je er dan nog de tijd bij optelt die nodig is om die dubbele beginhoeveelheid *x* keer zo groot te maken krijg je een hoeveelheid die 2*x* keer zo groot is als de beginhoeveelheid.

29a Het domein van functie *f* is $\langle \leftarrow, 2\frac{1}{2} \rangle$, want er moet gelden $5 - 2x > 0$, dus $x < 2\frac{1}{2}$.
Het domein van functie g is $\langle -4, \rightarrow \rangle$, want er moet gelden dat $x + 4 > 0$, dus $x > -4$.
b De asymptoot van de grafiek van *f* heeft de vergelijking $x = 2\frac{1}{2}$.
De asymptoot van de grafiek van *g* heeft als vergelijking $x = -4$.
c Je moet de vergelijking ${}^2\log(5 - 2x) = 2 + {}^2\log(x + 4)$ oplossen. Omdat $2 = {}^2\log 4$ kun je de vergelijking schrijven als ${}^2\log(5 - 2x) = {}^2\log 4 + {}^2\log(x + 4) = {}^2\log 4(x + 4)$.
Dus $5 - 2x = 4(x + 4)$, $5 - 2x = 4x + 16$, $6x = -11$, $x = -1\frac{5}{6}$. Invullen van deze waarde in één van beide functievoorschriften geeft $y = {}^2\log \frac{26}{3}$. Het snijpunt van beide grafieken heeft de coördinaten $(-1\frac{5}{6},\ {}^2\log 8\frac{2}{3})$.
d Je hebt bij opdracht c de coördinaten van het snijpunt uitgerekend. De oplossingen van de ongelijkheid zijn de getallen van het interval $\langle -4, -1\frac{5}{6} \rangle$.

1.5 Logaritmische schalen

bladzijde 22

30a De concentratie is gelijk aan 10 na ongeveer 33 dagen.
b Na ongeveer 35 dagen is de concentratie gelijk aan 100. Na ongeveer 37 dagen en na 46 dagen is de concentratie gelijk aan 1000.
c De concentratie neemt niet steeds met dezelfde hoeveelheid toe. Van dag 33 tot dag 35 neemt de concentratie toe van 10 tot 100 en dan is er dus een toename met 90 eenheden. Maar van dag 35 tot 37 is die toename 1000 – 100 = 900.
d De schaalverdeling op de horizontale as is lineair. Elk hokje staat voor hetzelfde aantal eenheden. Bij de schaalverdeling op de verticale as is dat niet het geval.
e De exponenten van de machten van 10 nemen lineair toe.

31a $0{,}01 = 10^{-2}$, $0{,}1 = 10^{-1}$, $1 = 10^0$, $10 = 10^1$, $100 = 10^2$, $1000 = 10^3$ en $10\,000 = 10^4$.
b Dat is het getal $10^{3{,}5} \approx 3162$.
c Bij het getal 2 op de lineaire schaal hoort het getal 4^2 op logschaal 2 en bij het getal 3 op de lineaire schaal hoort het getal 4^3 op logschaal 2. Bij het getal 2,5 op de lineaire schaal hoort dan het getal $4^{2{,}5}$ van logschaal 2.
d Op logschaal 1: Je schrijft 20 en 50 als macht van 10. Daartoe los je de vergelijkingen $10^t = 20$ en $10^t = 50$ op. Je vindt $t = \log 20 \approx 1{,}3$ en $t = \log 50 \approx 1{,}7$. Het getal 20 vind je dus tussen 10 en 100 op een afstand van ongeveer 1,3 eenheden van het getal 1. Het getal 50 ligt op 1,7 eenheden rechts van het getal 1.
Op logschaal 2: Je schrijft 20 en 50 als macht van 4. Je lost op $4^t = 20$ en vindt $t = {}^4\log 20 \approx 2{,}2$.
De oplossing van de vergelijking $4^t = 50$ is $t = {}^4\log 50 \approx 2{,}8$. Je gaat dus van het getal 1 op logschaal 2 ongeveer 2,2 eenheden naar rechts om de plaats van het getal 20 te vinden en 2,8 eenheden naar rechts om de plaats van het getal 50 te vinden.
e Dat is het getal $10^{2{,}5} \approx 316$.

bladzijde 23

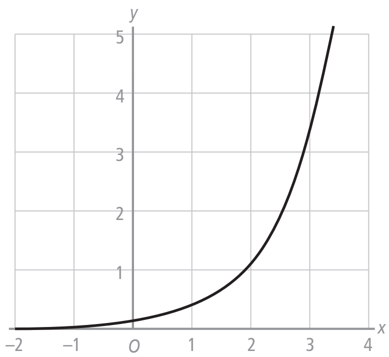
32a De grenzen van de golflengte van Röntgenstraling zijn $10^{-10,5}$ en $10^{-8,5}$. De linkergrens is ongeveer $10^{-10,5} : 10^{-9} = 10^{-1,5} \approx 0,0316$ nanometer en de rechtergrens is ongeveer $10^{-8,5} : 10^{-9} = 10^{0,5} \approx 3,16$ nanometer.

b Je schrijft de grenzen van het zichtbaar licht als macht van 10.
380 nanometer = $380 \times 10^{-9} = 10^{2,58} \cdot 10^{-9} = 10^{-6,42}$ meter .
750 nanometer = $750 \times 10^{-9} = 10^{2,88} \cdot 10^{-9} = 10^{-6,12}$ meter .
Op de getallenlijn kun je nu redelijk nauwkeurig de plaats van de grenzen aangeven.

33a

t in uren	0	1	2	3	4	5	6
O in km^2	0,12	0,36	1,08	3,24	9,72	29,16	87,48

b



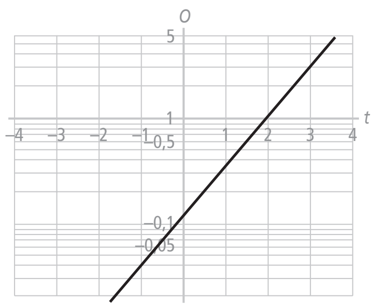
c Na ongeveer 2,5 uren is de oppervlakte ongeveer 2 km^2 .

d Je lost op $0,12 \cdot 3^t = 10$, $3^t \approx 83,33$, $t \approx \dfrac{\log 83,33}{\log 3} \approx 4,03$. Dus na ongeveer 4 uren.

e

t in uren	–2,26	–0,17	1,93	4,03	6,13	8,22
O in km^2	0,01	0,1	1	10	100	1000

f



g Half negen 's morgens komt overeen met het tijdstip $t = -1,5$. Dan is de oppervlakte ongeveer gelijk aan 0,02 km^2 .

1.6 Gemengde opdrachten

bladzijde 24

34a De groeifactor is gelijk aan 0,6. Om de halfwaardetijd te bepalen moet je de vergelijking $0{,}6^t = 0{,}5$ oplossen. Dus $t_h = {}^{0,6}\log 0{,}5 \approx 1{,}357$ dagen of ruim 32 uren.

b De vergelijking die je moet oplossen is $100 \cdot 0{,}6^t = 36$, dus $0{,}6^t = 0{,}36$ en $t = 2$. Na 2 dagen is er nog 36 mg over.

c Je lost dan op $0{,}6^t = 0{,}18$. Daaruit volgt $t = \dfrac{\log 0{,}18}{\log 0{,}6} \approx 3{,}357$ dagen.

d Steeds als de hoeveelheid wordt gehalveerd moet je de halveringstijd optellen bij de tijd die al verstreken was. Dus het antwoord op opdracht c is gelijk aan het antwoord op opdracht b plus de halveringstijd van opdracht a.

35a

r	5	7	10	20
D	42,92	40	36,90	30,88

b Je kunt de formule kun je herleiden tot $D = 10 \cdot \log(4{,}9 \cdot 10^5) - 10 \cdot \log r^2$, dus $D = 56{,}9 - 20 \log r$ Daaruit volgt dat $A = 56{,}9$ en $B = -20$.

c Dan moet gelden $\log\left(\dfrac{4{,}9 \cdot 10^5}{r^2}\right) = 0$, dus $\dfrac{4{,}9 \cdot 10^5}{r^2} = 1$ en $r^2 = 490\,000$. Daaruit volgt $r = \sqrt{490\,000} = 700$ meter.

36a $${}^6\log 5 = \frac{\log 5}{\log 6} = \frac{1}{\left(\dfrac{\log 6}{\log 5}\right)} = \frac{1}{{}^5\log 6}.$$

b $${}^a\log b = \frac{\log b}{\log a} = \frac{1}{\dfrac{\log a}{\log b}} = \frac{1}{{}^b\log a}.$$

c $$\frac{{}^5\log 7}{{}^5\log 2} = {}^5\log 7 \cdot \frac{1}{{}^5\log 2} = {}^5\log 7 \cdot {}^2\log 5 = \frac{\log 7}{\log 5} \cdot \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{\log 7}{\log 2} = {}^2\log 7.$$

d $$\frac{{}^g\log b}{{}^g\log a} = {}^g\log b \cdot \frac{1}{{}^g\log a} = {}^g\log b \cdot {}^a\log g = \frac{\log b}{\log g} \cdot \frac{\log g}{\log a} = \frac{\log b}{\log a} = {}^a\log b.$$

e $g = 1$ is niet toegestaan als grondtal van de logaritme. Als $a = 1$ en $g \neq 1$ dan is ${}^g\log a = 0$ en dan zou de noemer van de breuk gelijk zijn aan nul.

bladzijde 25

37a De levensduur van koper is dan $313 : 8{,}7 \approx 36$ jaar en de levensduur van chroom is $420 : 36 \approx 11{,}7$ maal zo groot.

b Als $t = 0$ het jaar 1970 voorstelt, geldt voor de jaarlijks verbruikte hoeveelheid koper de formule
$K(t) = 8{,}7 \cdot 1{,}058^t$ met $K(t)$ in miljoenen ton. Voor chroom is die formule
$C(t) = 1{,}9 \cdot 1{,}033^t$.
Er moet gelden dat $8{,}7 \cdot 1{,}058^t \geq 6 \cdot 1{,}9 \cdot 1{,}033^t$. De bijbehorende vergelijking kun je herleiden tot
$\left(\dfrac{1{,}058}{1{,}033}\right)^t = \dfrac{6 \cdot 1{,}9}{8{,}7}$ of $1{,}0242^t = 1{,}3103$. Daaruit volgt $t \approx 11{,}3$. Dus vanaf het jaar 1982.

c In de formule moet je voor p het getal 3,3 invullen en voor L het getal 420.
Dan geldt dat $L^* = \dfrac{230 \cdot \log(420 \cdot 3,3 + 100) - 460}{3,3} \approx 81,7$. Dan zou in het jaar 2052 de voorraad chroom uitgeput zijn.

d Dan is $L^* = 30$ en $p = 6,1$. Invullen in de formule geeft
$30 = \dfrac{230 \cdot \log(L \cdot 6,1 + 100) - 460}{6,1}$.
Daaruit volgt $230 \cdot \log(6,1L + 100) - 460 = 6,1 \cdot 30 = 183$ dus $230 \cdot \log(6,1L + 100) = 643$.
Dus $\log(6,1L + 100) \approx 2,7957$,
$6,1L + 100 \approx 10^{2,7957} \approx 624,67$,
$6,1L \approx 524,67$ en $L \approx 86$.
Dus dan zou in het jaar 2056 de voorraad aluminium zijn uitgeput.

ICT Logaritmische functies

bladzijde 26

I-1a De grafiek van f heeft de x-as als horizontale asymptoot en de grafiek van h heeft de y-as als verticale asymptoot.

b

	f	*h*
domein	$\mathbb{R}$	$\langle 0, \rightarrow \rangle$
bereik	$\langle 0, \rightarrow \rangle$	$\mathbb{R}$

Wat opvalt is dat het domein van f gelijk is aan het bereik van h en omgekeerd.

c De grafiek van f snijdt de y-as in het punt $(0, 1)$ en de grafiek van h snijdt de x-as in het punt $(1, 0)$.

d Ze zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegeling in de lijn $y = x$.

e,f Je vindt bij de vragen a tot en met d weer dezelfde antwoorden.

I-2a

	asymptoot	*domein*	*bereik*	*snijpunt x-as*	*snijpunt y-as*
k	*x*-as	$\mathbb{R}$	$\langle 0, \rightarrow \rangle$	geen	(0, 1)
m	*y*-as	$\langle 0, \rightarrow \rangle$	$\mathbb{R}$	(1, 0)	geen

Ook nu zijn de grafieken gespiegeld ten opzichte van de lijn met vergelijking $y = x$.

b Nee, de antwoorden blijven dezelfde.

I-3a Als g toeneemt stijgt de grafiek minder sterk. Het domein, het bereik, de asymptoot en het snijpunt met de x-as blijven gelijk.

b De grafiek is dan heel steil. Hoe dichter g in de buurt komt van het getal 1 des te meer lijkt de grafiek op de grafiek van de lijn $x = 1$.

c Bij $g = 1$ hoort geen grafiek. Als je in de vergelijking ${}^g\log x = \dfrac{\log x}{\log g}$ voor g het getal 1 invult is de noemer van het rechterlid gelijk aan nul en dan bestaat ${}^g\log x$ niet.

d Als g een getal is tussen 0 en 1, dan is de grafiek van f een dalende grafiek, maar het domein, het bereik , de asymptoot en het snijpunt met de x-as blijven gelijk.

bladzijde 27

I-4a De grafieken van f en h zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegeling in de x-as.

b De grafiek van f stijgt steeds langzamer en de grafiek van h daalt steeds langzamer.

c ${}^{\frac{1}{g}}\log x = \dfrac{\log x}{\log \frac{1}{g}} = \dfrac{\log x}{-\log g} = -\dfrac{\log x}{\log g} = -{}^{g}\log x$.

d $f(x) = 1$, ${}^{g}\log x = 1$, $x = g^1 = g$.

$h(x) = 1$, ${}^{\frac{1}{g}}\log x = 1$, $x = (\frac{1}{g})^1 = \frac{1}{g}$.

e Daaruit volgt dat ${}^{g}\log a = {}^{\frac{1}{g}}\log b = -{}^{g}\log b$, ${}^{g}\log a + {}^{g}\log b = 0$, ${}^{g}\log ab = 0$, $ab = g^0 = 1$.
Dus als $f(a) = h(b)$ dan is het product van a en b gelijk aan 1.

I-5a

	domein	*asymptoot*
f	$\langle \leftarrow, 2\frac{1}{2} \rangle$	$x = 2\frac{1}{2}$
g	$\langle -4, \rightarrow \rangle$	$x = -4$

b Je moet de vergelijking ${}^{2}\log(5-2x) = 2 + {}^{2}\log(x+4)$ oplossen. Omdat $2 = {}^{2}\log 4$ kun je de vergelijking anders schrijven . Je krijgt ${}^{2}\log(5-2x) = {}^{2}\log 4 + {}^{2}\log(x+4) = {}^{2}\log 4(x+4)$.
Dus $5-2x = 4(x+4)$, $5-2x = 4x+16$, $6x = -11$, $x = -1\frac{5}{6}$. Invullen van deze waarde in één van beide functievoorschriften geeft $y = {}^{2}\log \frac{26}{3}$. Het snijpunt van beide grafieken heeft de coördinaten $(-1\frac{5}{6}, {}^{2}\log 8\frac{2}{3})$.

d Je hebt bij opdracht c de coördinaten van het snijpunt uitgerekend. De oplossingen van de ongelijkheid zijn de getallen van het interval $\left\langle -4, -1\frac{5}{6} \right\rangle$.

I-6a Het domein van elk van beide functies blijft hetzelfde.

b Ook de asymptoot van elk van beide functies is dezelfde.

c De antwoorden bij de opdrachten I-5b en c veranderen wel want als je de vergelijking $f(x) = g(x)$ oplost, schrijf je het getal 2 als een logaritme en bij opdracht I-5 geeft dat $2 = {}^{2}\log 4$, maar bij opdracht I-6 krijg je $2 = {}^{3}\log 9$.
Je krijgt nu de vergelijking: $5-2x = 9(x+4)$ op te lossen.
Daaruit volgt $5-2x = 9x+36$, dus $11x = -31$ en $x = -2\frac{9}{11}$.
Het snijpunt van de grafieken heeft de coördinaten $(-2\frac{9}{11}, {}^{3}\log 10\frac{7}{11})$.
De oplossingen van de ongelijkheid van opdracht I-5c zijn de getallen uit het interval $\left\langle -4, -2\frac{9}{11} \right\rangle$.

I-7a Als je de grafiek van h één eenheid naar boven verschuift, krijg je de grafiek van f.

b De grafiek van g is dezelfde als de grafiek van f. Het getal ${}^{2}\log x$ is de groeitijd die nodig om de beginhoeveelheid x keer zo groot te laten worden bij groeifactor 2. Als je bij die groeifactor 1 optelt wordt de hoeveelheid nog eens twee keer zo groot. Dat betekent dat je de groeitijd krijgt die bij de hoeveelheid $2x$ hoort.

c $1 + {}^{2}\log x = {}^{2}\log 2 + {}^{2}\log x = {}^{2}\log 2x$.

d Je lost op $1 + {}^{2}\log x = 0$, ${}^{2}\log x = -1$, $x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$. Dus de coördinaten van het snijpunt met de x-as zijn $(\frac{1}{2}, 0)$.

e $g(x) = 0$, ${}^{2}\log 2x = 0$, $2x = 2^0 = 1$, $x = \frac{1}{2}$.
$g(x) = 4$, ${}^{2}\log 2x = 4$, $2x = 2^4 = 16$, $x = 8$.

Test jezelf

bladzijde 30

T-1a Een passende formule is $B = 600 \cdot 2^t$ met B het aantal bacteriën na t dagen.

b Van de vergelijking $2^t = 40$.

c Dan zijn er volgens de formule $600 \cdot 40 = 24\,000$ bacteriën.

T-2a $\log 35 - \log 7 = \log \frac{35}{7} = \log 5$

b ${}^2\log 6 + 3 \cdot {}^2\log 5 = {}^2\log 6 + {}^2\log 5^3 = {}^2\log(6 \cdot 5^3) = {}^2\log 750$.

c $3 \cdot {}^4\log 5 - {}^4\log 0{,}2 = {}^4\log 5^3 - {}^4\log 0{,}2 = {}^4\log(\frac{5^3}{0{,}2}) = {}^4\log 625$.

d ${}^5\log 4 + {}^5\log 9 - 2 \cdot {}^5\log 3 = {}^5\log 36 - {}^5\log 9 = {}^5\log 4$.

e $2 + \log 5 = \log 100 + \log 5 = \log 500$.

f $\log 0{,}1 + 10 \cdot \log 10 = \log(0{,}1 \cdot 10^{10}) = \log(10^{-1} \cdot 10^{10}) = \log 10^9 = 9$

T-3a ${}^3\log 37 = \dfrac{\log 37}{\log 3} \approx 3{,}287$

b ${}^{0{,}2}\log 10 = \dfrac{1}{\log 0{,}2} \approx -1{,}431$

c $\log \sqrt{2} \approx 0{,}151$

d ${}^2\log \frac{1}{9} = \dfrac{\log \frac{1}{9}}{\log 2} \approx -3{,}170$

e ${}^2\log 7 = \dfrac{\log 7}{\log 2} \approx 2{,}807$

f ${}^{0{,}1}\log 64 = -\log 64 = -1{,}806$

T-4a Als je de vergelijking $g^{6{,}6} = 0{,}5$ oplost, vind je de groeifactor g. Er geldt dat $g = 0{,}5^{\frac{1}{6{,}6}} \approx 0{,}9$.
Vervolgens los je op $0{,}9^t = 0{,}1$.

b De exacte oplossing van de vergelijking bij opdracht a is $t = {}^{0{,}9}\log 0{,}1$.

c Uit $0{,}9^t = 0{,}01$ volgt dat $t = {}^{0{,}9}\log 0{,}01 \approx 43{,}7$ dus na ongeveer 44 jaar is er nog 1% over.

T-5a $D_f = \langle 1, \rightarrow \rangle$, $D_g = \langle \leftarrow, 2 \rangle$ en $D_h = \langle 0, \rightarrow \rangle$.

b De verticale asymptoot van de grafiek van f is de lijn met vergelijking $x = 1$.
De verticale asymptoot van de grafiek van g is de lijn met vergelijking $x = 2$.
De verticale asymptoot van de grafiek van h is de lijn met vergelijking $x = 0$.

c Uit de vergelijking ${}^3\log(x-1) = {}^3\log 2x$ volgt dat $x - 1 = 2x$ dus $x = -1$. Maar die oplossing voldoet niet omdat dit getal niet tot het domein van de functies f en h behoort. Er is dus geen snijpunt.

d Je lost dan de vergelijking ${}^3\log(2-x) = {}^3\log 2x$ op. Je vindt $2 - x = 2x$ dus $3x = 2$ en $x = \frac{2}{3}$.
Het snijpunt heeft de coördinaten $(\frac{2}{3},\ {}^3\log 1\frac{1}{3})$.

bladzijde 31

T-6a

t in dagen	0	5	10	15	20	25	35
h in cm	7	15	30	70	150	180	190

b Van 0 tot 20 dagen is de groeifactor per 5 dagen ongeveer gelijk aan 2,15. Vanaf de twintigste dag is de groei heel gering en niet meer exponentieel.

c De grafiek is een rechte lijn als de verticale as een logaritmische schaalverdeling heeft.

d $h = 7 \cdot (2{,}15^{\frac{1}{5}})^t \approx 7 \cdot 1{,}166^t$ met t in dagen.

T-7a Dit is zo omdat ${}^{\frac{1}{3}}\log x = -{}^{3}\log x$.

b $h(x) = {}^{3}\log 8x = {}^{3}\log 8 + {}^{3}\log x$. Als je de grafiek van *f* dus ${}^{3}\log 8 \approx 1{,}89$ eenheden naar boven verschuift, krijg je de grafiek van *h*.

T-8 $-1 + {}^{2}\log(5x-2) = {}^{2}\log x^2$, ${}^{2}\log \frac{1}{2} + {}^{2}\log(5x-2) = {}^{2}\log x^2$, ${}^{2}\log \frac{1}{2}(5x-2) = {}^{2}\log x^2$, $\frac{1}{2}(5x-2) = x^2$, $5x-2 = 2x^2$, $2x^2 - 5x + 2 = 0$. Met de abc formule vind je $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{9}}{4}$ dus $x = \frac{1}{2}$ of $x = 2$ beide oplossingen voldoen.

T-9 Kies $b = 3$, dan heeft de grafiek de lijn $x = -3$ als verticale asymptoot. Als je de coördinaten van de twee gegeven punten invult vind je $f(-1) = {}^{a}\log 2 + c = 0$ en $f(1) = {}^{a}\log 4 + c = 1$.
Dus $c = -{}^{a}\log 2$, maar ook $c = 1 - {}^{a}\log 4$. Los nu op $1 - {}^{a}\log 4 = -{}^{a}\log 2$.
${}^{a}\log 4 - {}^{a}\log 2 = 1$, ${}^{a}\log \frac{4}{2} = 1$, ${}^{a}\log 2 = 1$ dus $a = 2$. Verder geldt ${}^{a}\log 2 + c = 0$, dus $1 + c = 0$. Daaruit volgt dat $c = -1$.

T-10 Het verband is dat $k - 1 \le \log p < k$ als *p* uit *k* cijfers bestaat. Dus als *p* bijvoorbeeld een getal van 2 cijfers is dan geldt $1 \le \log p < 2$.