Oefentoets klas 5 SE 3.

Opgave 1.

4p a $2\sin(2x)\cos(2x) = \sin(x + \frac{1}{2}\pi)$

7p b $\cos(\frac{1}{2}x) = 7\cos(\frac{1}{4}x) - 6$

Opgave 2. Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{\cos(x)}$.

5p a. Toon aan dat de grafiek van *f* symmetrisch is in het punt $(\frac{1}{2}\pi, 0)$.

6p b. Het punt *A* met $x_A = \frac{1}{6}\pi$ ligt op de grafiek van *f*.
Stel algebraïsch de formule op van de lijn *k* die de grafiek van *f* raakt in *A*.

Opgave 3.

De banen van de punten *P* en *Q* worden beschreven door de parametervoorstellingen

$$\begin{cases} x_P = 3\cos(\frac{1}{3}\pi t) \\ y_P = 3\sin(\frac{1}{3}\pi t) \end{cases} \text{ en } \begin{cases} x_Q = 4\cos(-\frac{1}{5}\pi t) \\ y_Q = 4\sin(-\frac{1}{5}\pi t) \end{cases}.$$

Voor de afstand tussen de punten geldt $PQ = \sqrt{25 - 24\cos(\frac{8}{15}\pi t)}$.

7p a Toon dit aan.

7p b Bereken algebraïsch het eerste tijdstip na $t = 0$ waarop de afstand tussen *P* en *Q* het kleinst is.

Opgave 4.

4 a. $\displaystyle\int_{\sqrt{5}}^{3} \frac{7x}{(x^2 - 4)^3}$

5 b. $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$

Antwoorden :

1.a $\sin(4x)=\sin(x+\frac{1}{2}\pi)$ 1p

$4x = x+\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi \ \vee\ 4x=\frac{1}{2}\pi - x+k\cdot 2\pi$ 1p

$3x=\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi \ \vee\ 5x=\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi$ 1p

$x=\frac{1}{6}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi \ \vee\ x=\frac{1}{10}\pi+k\cdot\frac{2}{5}\pi$ 1p

b $2\cos^2(\frac{1}{4}x)-1=7\cos(\frac{1}{4}x)-6$ 1p

$2\cos^2(\frac{1}{4}x)-7\cos(\frac{1}{4}x)+5=0$ 1p

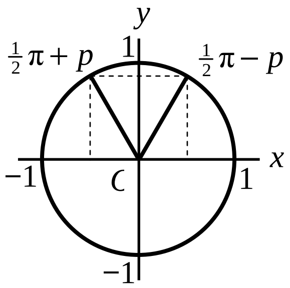
$\cos(\frac{1}{4}x)=1 \ \vee\ \cos(\frac{1}{4}x)=2\frac{1}{2}$ 3p

$\frac{1}{4}x=k\cdot 2\pi$ 1p

$x=k\cdot 8\pi$ 1p

Opgave 2. Gegeven : $f(x)=\dfrac{\sin^2(x)}{\cos(x)}$

a.



$\cos(\frac{1}{2}\pi+p)=-\cos(\frac{1}{2}\pi-p)$ en

$\sin(\frac{1}{2}\pi+p)=\sin(\frac{1}{2}\pi-p)$ 3p

$$f(\tfrac{1}{2}\pi+p)=-\frac{\sin^2(\frac{1}{2}\pi-p)}{\cos(\frac{1}{2}\pi-p)}$$ 1p

$$f(\tfrac{1}{2}\pi-p)+f(\tfrac{1}{2}\pi+p)=\frac{\sin^2(\frac{1}{2}\pi-p)}{\cos(\frac{1}{2}\pi-p)}-\frac{\sin^2(\frac{1}{2}\pi-p)}{\cos(\frac{1}{2}\pi-p)}=0$$ 1p

b.

$$f(x)=\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}\Rightarrow f'(x)=\frac{2\sin(x).\cos(x).\cos(x)-\sin^2(x).(-\sin(x)}{\cos^2(x)}=\frac{2\sin(x).\cos^2(x)+\sin^3(x)}{\cos^2(x)}$$

2p

Dan $f'(\frac{1}{6}\pi)=\dfrac{7}{6}$

$$f(\tfrac{1}{6}\pi)=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}=\tfrac{1}{6}\sqrt{3}$$ 2p

$k\colon y=1\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}\sqrt{3}-\frac{7}{36}\pi$ 2p

Opgave 3.

a $PQ=\sqrt{(3\cos(\frac{1}{3}\pi t)-4\cos(-\frac{1}{5}\pi t))^2+(3\sin(\frac{1}{3}\pi t)-4\sin(-\frac{1}{5}\pi t))^2}$ 2p

$PQ=\sqrt{25-24\cos(\frac{1}{3}\pi t)\cos(-\frac{1}{5}\pi t)-24\sin(\frac{1}{3}\pi t)\sin(-\frac{1}{5}\pi t)}$ 2p

$PQ=\sqrt{25-24\cos(\frac{1}{3}\pi t--\frac{1}{5}\pi t)}$ 2p

$PQ=\sqrt{25-24\cos(\frac{8}{15}\pi t)}$ 1p

b Afstand minimaal als de cosinus maximaal is dus een waarde 1 heeft.

Dan geldt : $\sqrt{25-24\cos(\frac{8}{15}\pi t)}=1$ 2p

$\cos(\frac{8}{15}\pi t)=1$ 2p

$\frac{8}{15}\pi t=k\cdot 2\pi$ 1p

$t=k\cdot 3\frac{3}{4}$ 1p

$t=3\frac{3}{4}$ 1p

Opgave 4.

a. $\int_{\sqrt{5}}^{3}\frac{7x}{(x^2-4)^3}$ Stel $x^2-4=u$ dan 2xdx=du Nu invullen $\Rightarrow$

$$\int_{\sqrt{5}}^{3}\frac{7x}{(x^2-4)^3}=\int_{1}^{5}\frac{3\frac{1}{2}}{u^3}du=\left[-\frac{7}{4}u^{-2}\right]_1^5=-\frac{7}{100}+\frac{7}{4}=\frac{168}{100}=1,68$$

b. $\int_{1}^{e}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$

$Stel\ f(x)=\ln(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$

en $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\Rightarrow g(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x}$

$$\Rightarrow \int_{1}^{e}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx=\left[\frac{1}{2}\sqrt{x}.\ln(x)\right]_1^e-\int_{1}^{e}\frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}}{x}dx=\frac{1}{2}\sqrt{e}-\int_{1}^{e}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}\sqrt{e}-\left[\sqrt{x}\right]_1^e=$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{e}-\sqrt{e}+1=1-\frac{1}{2}\sqrt{e}$$