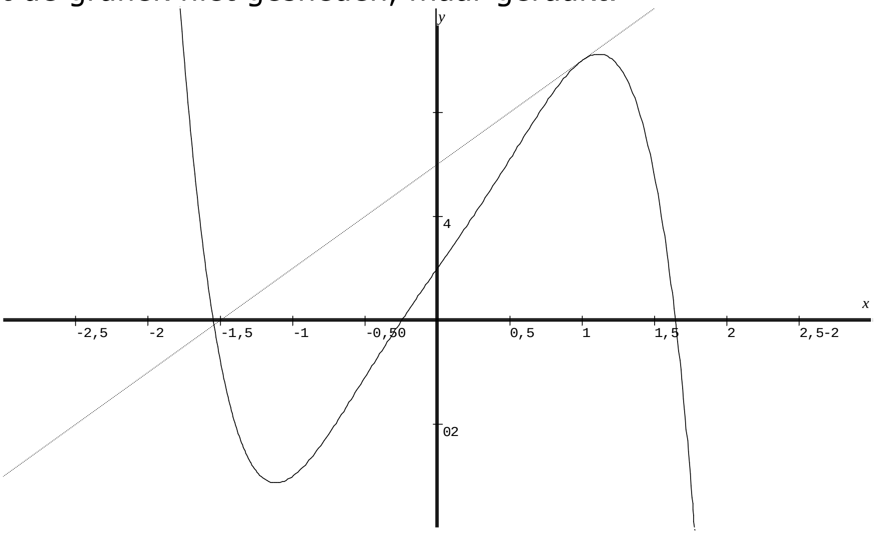
Wiskunde B Herhaling en technische vaardigheden klas 5

Begin klas 5: Raaklijnen

Hieronder zien we de grafiek van $f(x)=1 + 4x + x^3 - x^5$. De gestippelde lijn is de raaklijn in het punt (1,5).

raaklijn: Lijn die in een bepaald punt de grafiek raakt. De raaklijn gaat door het punt, maar omdat hij dezelfde helling heeft als de grafiek in dat punt, wordt de grafiek niet gesneden, maar geraakt.



We bepalen de vergelijking van de raaklijn op de volgende manier:

0) De vorm van de vergelijking is $y=Hx + S$ met H het hellingsgetal en S het startgetal.
1) Wat is de hellingsgetal van de raaklijn? Natuurlijk hetzelfde als de helling van f in het punt (1,5). Bepaal daarom $f'(x) = 4 + 3x^2 - 5x^4$. De helling in punt (1,5) is $f'(1)=4+3-5=2$.
2) We weten nu dus het hellingsgetal van de raaklijn (namelijk 2) en we weten dat de lijn door het punt (1,5) gaat. Als we weten wat het startgetal is van de lijn dan zijn we klaar.
3) De vergelijking van de lijn heeft de volgende vorm: $y = 2x + S.$ Als $x=1$ dan $y=5$ dus geldt $5=2\cdot1+S.$ Nu is eenvoudig te zien dat $S=3$.

Antwoord: vergelijking van de raaklijn is $y = 2x + 3$.

1. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van de gegeven functie $f(x)$ in het punt (a, $f(a)$)

a) $f(x) = 2x^2 - 3,\quad a = 1$
b) $f(x) = x^5 - 3x^2 + 3,\quad a = -1$
c) $f(x) = 4x^3 + 2x - 3,\quad a = 0$
d) $f(x) = 8x^4 - x^7,\quad a = 2$
e) $f(x) = 4x - 2x^2 + x^3,\quad a = -1$

2. Differentiëren en controleren

a) Differentieer de functie $f(x) = 2x^3 + 3x(x+1)$.
b) Vul x=2 in in je afgeleide functie.
c) Laat je GRM de helling van deze functie benaderen in het punt met x-coördinaat 2 en controleer daarmee je antwoord bij a) en b)
d) Dezelfde vragen, maar dan voor $g(x) = x^2 + \dfrac{x^5\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}$ en $h(x)=(x+1)^2$

Wiskunde B Herhaling en technische vaardigheden klas 5

3. Schrijf zonder negatieve en gebroken exponenten

a) $x^{1\frac{1}{2}} + 2p^{-1} - \sqrt{8}q^{\frac{1}{2}} \cdot q^{\frac{1}{3}}$

b) $(x+3)^{-3}(x^{-1}+1)^{2,5} \cdot 12$

Na § 1.3

4. Differentieer en schrijf zonder negatieve en gebroken exponenten

a) $f(x) = (2x^3 - 4) \cdot \sqrt{x}$

b) $R(p) = (3p^{-2} + 1)(4p + 5)$

c) $W(q) = 3x^2 - 2qx + 4q$

5. Lineaire functie bepalen

a) Geef de vergelijking van de lijn door de punten (200,88) en (225,50)

b) Geef de vergelijking van de lijn door de punten (12,25) en (36,61)

6. Parameters

a) Voor welke *a* gaat de grafiek van $f_a(x) = 2x^3 + (3-a)x^2$ door het punt (12,144)?

b) Voor welke *a* gaat de grafiek van $h_a(x) = \sqrt[3]{ax^2 + 16}$ door het punt (10,6)?

c) Voor welke *a* en *b* heeft de grafiek van $g_{a,b}(x) = x^2 + ax + b$ het punt (-5,-10) als top?

d) Voor welke *a* en *b* is (-1,5) het buigpunt van de grafiek van $k_{a,b}(x) = x^3 + bx^2 + 6a$?

Na hoofdstuk 1

7. Bepaal exact de extreme waarden van

a) $f(x) = x^5 - 2x^4 + 3$

b) $g(x) = (5x^2 - 180)^3$

8. Bepaal de exacte buigpunten van

$f(x) = (x^2 + 3x)^2 - x^3$

9. Schrijf zonder negatieve en gebroken exponenten

a) $2p^{-1}$

b) $(2p)^{-1}$

c) $\dfrac{12}{(2x-3)^{-1}} \cdot \dfrac{(2x-3)^4}{12x^{1,5}}$

10. Toppen en buigpunten

Gegeven $k(x) = \frac{1}{84}x^7 - \frac{4}{3}x^3$.

a) Bereken exact de *x*-coördinaten van de toppen van de grafiek van *k*.

b) Bereken exact de buigpunten van de grafiek van *k*

c) Bepaal met algebra de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van *k* in het punt met *x*-coördinaat -1.

Wiskunde B Herhaling en technische vaardigheden klas 5

Na introductie sommen

11. Bereken met GRM

a) 1 + 2 + 3 + 4 + … + 199

b) 1+4+9+16+25+…+400

c) De helling van $g(x)=3^x-\sqrt{x}+8$ in het punt met *x*-coördinaat 8.

d) 201 + 213 + 225 + … + 321

Na paragraaf 2.4

12. Van welke functie…

a) … is $f(x) = 2x^2 + \sqrt{x}$ de afgeleide functie?

b) … is $g(x) = 2x(\sqrt{2x}+3x^5)$ een primitieve functie?

c) … is $h(x) = \dfrac{3}{4x^2}+\dfrac{2\sqrt{x}}{4x}$ de afgeleide functie?

13. Bereken een Riemannsom

a) van $f(x)=6-2x^2$ op het interval [-1,2], gebruik deelintervallen die 0,75 breed zijn en gebruik de functiewaarden op de linkergrenzen van de deelintervallen.

b) van $g(x)=2\cdot 3^x$ op het interval [0,4], gebruik deelintervallen die 0,5 breed zijn en gebruik de functiewaarden op de rechtergrenzen van de deelintervallen.

c) van $h(x)=32\cdot(\tfrac{1}{2})^x$ op het interval [2,6], gebruik deelintervallen die 0,25 breed zijn en zorg ervoor dat je Riemannsom een bovensom is.

14. Bepaal exact de oppervlakte …

a) … die wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = x - x^2 + 6$ en de *x*-as.

b) … die wordt ingesloten door de grafieken van $f(x) = 2x + 2$, $g(x) = -0{,}5x+12$ en de *y*-as.

c) … die wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = 3x - 6$, de *x*-as en de *y*-as.

15. Bepaal (indien aanwezig) de exacte extreme waarde(n) van

a) $f(x)=15x^3$

b) $g(x)=15x^3-15x$

c) $h(x)=\sqrt{x}(-15x+180)$

d) $k(x)=x(8+x)^2$

e) $l(x)=\sqrt{x}(x-x^2)$

16. Bepaal de exacte extreme waarde(n) en buigpunt(en) van

a) $f(x)=15x^5$

b) $g(x)=5(x^2-x)$

c) $h(x)=0{,}4x^6-3{,}6x^5-7x^4$

Wiskunde B Herhaling en technische vaardigheden klas 5

17. Bepaal de vergelijking van de raaklijn

a) aan de grafiek van $f(x) = 3(5x^3 - 4x)$ in het punt (1,3)

b) aan dezelfde grafiek in het punt met x-coördinaat -1

c) *opgave vervalt*

d) door de top van $g(x) = 4x^2 - 4x$

18. Gebruik de tabel van je stencil en geschikt gekozen symmetrieën van de eenheidscirkel om de volgende sinussen, cosinussen en tangenten te berekenen. Geef exacte antwoorden!

(uit: Basiswiskunde, Jan de Craats & Rob Bosch)

18.1	18.2	18.3
a. $\sin \frac{2}{3}\pi$	a. $\sin 3\pi$	a. $\sin -\frac{2}{3}\pi$
b. $\cos \frac{3}{4}\pi$	b. $\tan 7\pi$	b. $\tan \frac{7}{4}\pi$
c. $\cos \frac{11}{6}\pi$	c. $\cos -5\pi$	c. $\cos -\frac{7}{6}\pi$
d. $\tan \frac{5}{4}\pi$	d. $\tan 12\pi$	d. $\tan -\frac{5}{3}\pi$
e. $\sin \frac{5}{6}\pi$	e. $\sin -5\pi$	e. $\sin \frac{13}{4}\pi$

19. Alle oplossingen van de vergelijking sin x = ½ kunnen geschreven worden als $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ met *k* geheel.

Geef op een dergelijke wijze alle oplossingen van de volgende vergelijkingen.

(uit: Basiswiskunde, Jan de Craats & Rob Bosch)

19.1	19.2	19.3
a. $\sin x = -\frac{1}{2}$	a. $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	a. $\tan x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
b. $\cos x = \frac{1}{2}$	b. $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$	b. $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
c. $\tan x = -1$	c. $\tan x = -\sqrt{3}$	c. $\cos x = 0$

20. Los exact op:

a) $4(1+\tan x) = 4$

b) $\sin t = 2\sin t \cdot \cos t$

c) $\sin 3(x - \frac{1}{6}\pi) = \sin 2(x + \frac{1}{4}\pi)$

21. Toon aan:

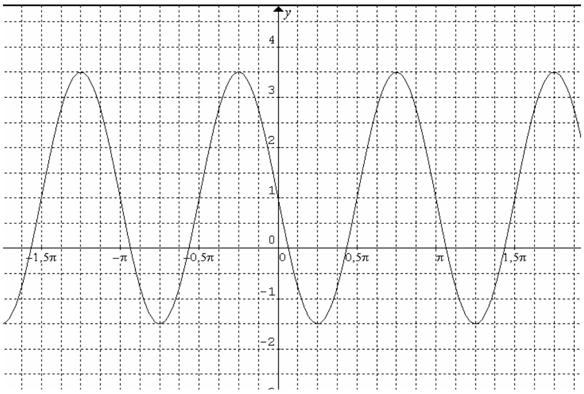
a) $\cos^2 x\,(1+\tan^2 x) = 1$

b) $\dfrac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$

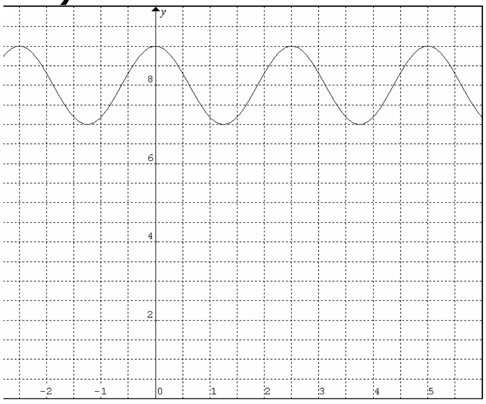
c) $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$

22. **Bepaal een functievoorschrift bij de volgende afgebeelde sinusoïden.**

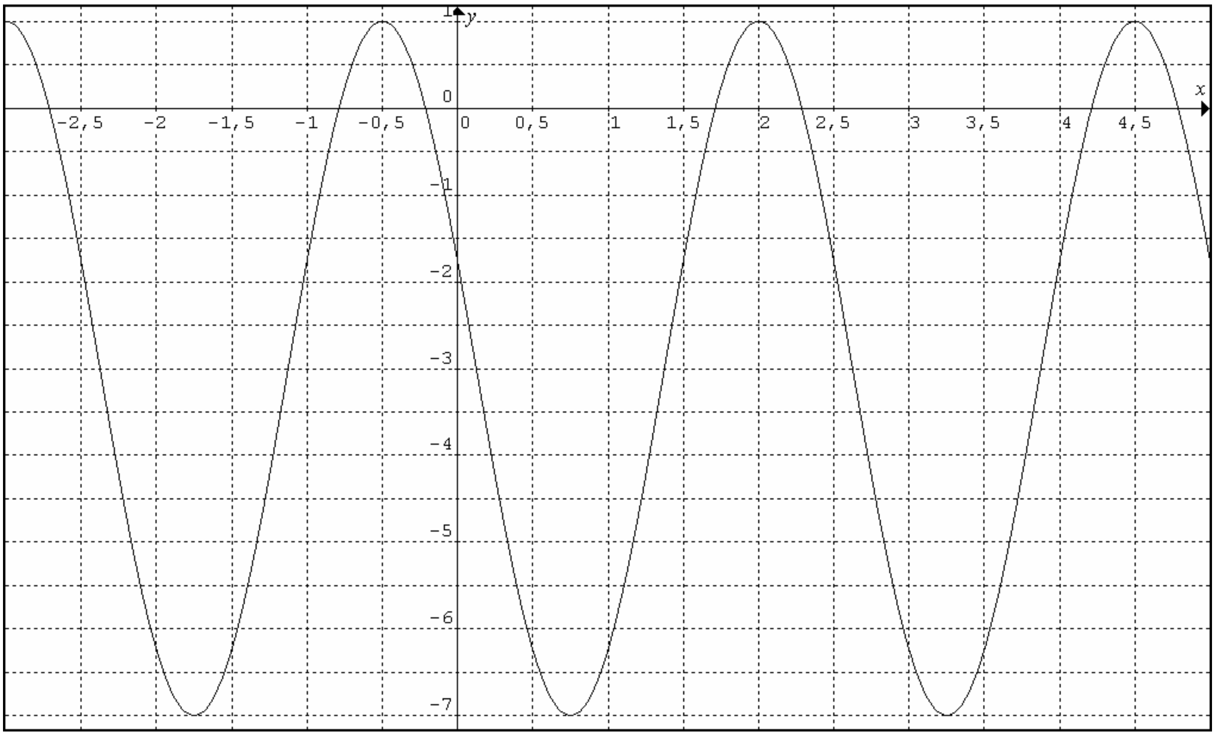
a)



b)



c)



23. **Los op met algebra**

a) $2x^2+3x+4=8$

b) $2\sqrt{2x+15}=2x$

c) $x+2=\dfrac{3}{x}$

24. **Maak gebruik van de rekenregel** $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ **en toon aan dat**

a) $\sqrt{32}=4\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$ **c)** $\dfrac{2+\sqrt{32}}{\sqrt{2}}=4+\sqrt{2}$

Wiskunde B Herhaling en technische vaardigheden klas 5

Na paragraaf 3.4

25. Differentieer de volgende functies

a) $f(t) = 1 + \sin \frac{1}{2} t$

b) $g(t) = -1 - 3\cos 2(t+1)$

c) $h(t) = 1 - \cos \pi t$

d) $k(t) = \pi \sin(1 - 2t)$

e) $l(t) = 2\cos^3 t$

26. Primitiveer de volgende functies

a) $f(x) = \cos 5x$

b) $g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

c) $h(x) = -9\cos^2 3x \cdot \sin 3x$

27. Rekenen met parameters

a) Beschouw de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van $f(x)=x^2$, de lijn $l(x)=a$ en de positieve x-as. Voor welke waarde(n) van a is die oppervlakte gelijk aan $\frac{16}{3}$?

b) Beschouw de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van $f(x)=0{,}5x+p$, de grafiek van $g(x)=-x+6+p$ en de horizontale as. Voor welke waarde(n) van p is die oppervlakte gelijk aan 54?

28. Bepaal de gezamenlijke periode van *f* en *g* als

a) $f(x)=3\sin 4x$ en $g(x)=2\sin 3x$

b) $f(x)=2\cos 2x$ en $g(x)=2\sin 2x$

c) $f(x)=3\sin 0{,}5x$ en $g(x)=15\sin(\frac{4}{7}x)$

d) $f(x)=3\sin \pi x$ en $g(x)=\cos 1{,}2\pi x$

e) $f(x)=\tan x$ en $g(x)=\sin(1{,}3x)$

29. Los op (GRM):

a) $3\sin 4x = 2\sin 3x$

b) $\tan x = \sin 1{,}2x$

30. Bepaal het aantal oplossingen van

a) $3\sin 4x = 2\sin 3x$ op $[-4\pi, 80\pi]$

b) $-5\sin \frac{\pi}{3}t = 8\cos \frac{\pi}{5}t$ op $[-45, 1500]$

c) $\tan x = \cos(0{,}8x)$ op $[0, 98\pi]$

31. Differentieer de volgende (extra gemene) functies

a) $f(t) = \dfrac{3}{\cos^2 4t}$

b) $g(t) = \cos^2 t \cdot \tan^2 t$

c) $h(t) = \tan^2 t - \sin^2 t \cdot \tan^2 t$

Wiskunde B Herhaling en technische vaardigheden klas 5

Veel gemaakte fouten in VT over A_1 en A_2

32. Extreme waarden en toppen

Veel leerlingen geven top of zelfs enkel x-waarden waar gevraagd wordt om extreme waarde.
Extreme waarden zijn: de hoogtes van de toppen plus de vermelding "min" of "max". Toppen zijn: de coördinaten van de minima en maxima.

De extreme waarde(n) van $f(x) = 2x + 4 + \dfrac{8}{x}$ zijn dus -4 (max) en 12 (min)

De toppen van f zijn (-2,-4) en (2,12).

a) Bepaal algebraïsch de toppen van $f(x) = (3-x)^3 + x^4 + 27x$

b) Bepaal algebraïsch de extreme waarden van $g(x) = 2\sin^3 x + \frac{3}{2}\sin^2 x - \sin x$

33. Herleiden voordat je differentieert of primitiveert

Weet goed wat standaardfuncties zijn en wat niet. Je weet enkel hoe je standaardfuncties moet differentiëren en primitiveren dus moet je soms eerst de opgave herleiden tot een standaardfunctie.

Bijv: $f(x) = \left(2x - x^{-2}\right)\cdot 3\sqrt{x} = 6x\sqrt{x} - 3x^{-2}\cdot\sqrt{x} = 6x^{1,5} - 3x^{-1,5}$

en: $h(x) = \dfrac{4x^5 - x\cdot\sqrt[3]{x}}{3x^2} = \dfrac{4x^5 - x^{1\frac{1}{3}}}{3x^2} = \dfrac{4}{3}x^3 - \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

Differentieer en schrijf zonder negatieve en gebroken exponenten

a) $f(x) = 15x^3 + \dfrac{1}{x^4}$

b) $g(x) = \sqrt{15x + 8}$

c) $h(x) = -2x^2 + \dfrac{1}{13x^2}$

d) $k(x) = \dfrac{x^8 + \sqrt{x} - 12}{x^2\sqrt{x}}$

e) $l(x) = 15x^2 \cdot 22x^5$

f) $m(x) = x\cdot\sqrt[5]{x}(\sqrt[3]{x} + 15)$

g) $n(x) = \dfrac{15}{\sqrt[4]{2x^2}}$

h) $p(x) = 25x^2 - 18x + 3$

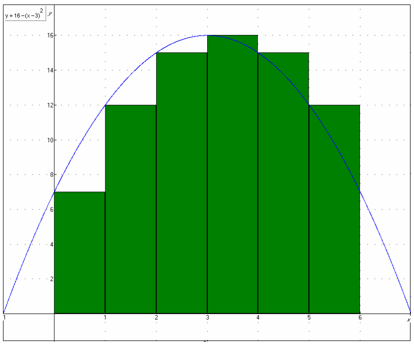
i) $q(x) = \dfrac{3}{4x^5} + \dfrac{4}{5x^3} - \dfrac{5}{3x^4}$

j) $r(x) = 22x + 22$

k) $s(x) = \sqrt{5} + \sqrt{5}\cdot x$

l) $t(x) = \dfrac{-8}{(2x + \frac{1}{2})^5}$

34. Onjuiste grenzen gebruiken in de Riemannsom



Hiernaast zie je de grafiek van $f(x)=16-(3-x)^2$ waarvan we de oppervlakte op het interval [0,6] willen bepalen. De exacte oppervlakte is natuurlijk $\int_0^6 f(x)dx$, de benadering via de Riemannsom gebeurt via de getekende staafjes waarbij steeds de linkergrens is gebruikt. De Riemannsom is hier dus $\sum_{k=0}^{5} f(k)\cdot 1$. Merk op dat de Riemannsom niet van 0 tot 6 loopt. In dit geval begint het laatste staafje bij 5 en loopt de som dus tot 5. Omdat bij de (exacte) integraal de staafje theoretisch smal zijn, loopt de integraal wel tot 6. Veel leerlingen zien dit verschil over het hoofd en kiezen bij de Riemannsom net als bij de integraal voor 0 t/m 6 zoals in $\sum_{k=0}^{6} f(k)\cdot 1$. Hier berekenen zij echter een som voor zeven staafjes in plaats van voor zes.

a) Laat mbv schetsen zien dat ook de volgende sommen Riemannsommen zijn $\sum_{\substack{k=0 \\ \Delta k=0,1}}^{5,9} f(k)\cdot 0{,}1$ (met Δx=0,1 en gebruik van de linkergrenzen) en $\sum_{\substack{k=0,3 \\ \Delta k=0,6}}^{5,7} f(k)\cdot 0{,}6$ (met Δx=0,6 en gebruik van de intervalmiddens).

b) Benader met een Riemannsom in twee decimalen nauwkeurig de oppervlakte onder de grafiek van $g(x)=16-x^2$ op het domein [1,4]. Gebruik Δx=0,15 en neem de linkergrenzen van de deelintervallen.

c) Wat is het verschil tussen je Riemannsom van opgave b) en de exacte oppervlakte?

d) Bepaal het verschil tussen de exacte oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de x-as en de grafiek van $h(x)=-x^3+2x^2$ en de benadering met een Riemannsom. Gebruik intervalmiddens en Δx=0,1.

e) Benader met je GRM de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van $k(x)=2^x$ en $m(x)=8\cdot 0{,}5^x$ en de verticale as.

35. Bepaal de eventuele nulpunten, asymptoten en perforaties van

a) $f(x)=\dfrac{\frac{1}{x}+1}{x-\frac{1}{x}}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$

c) $g(x)=\dfrac{x}{x^2}$

d) $h(x)=\dfrac{x^2}{x}$

e) $k(x)=\dfrac{3x^2+4x+5}{x-3}$

f) $l(x)=\dfrac{2x+4-\frac{6}{x}}{1+\frac{1}{x}}$

36. Bepaal de bijzonderheden van

$f(x)=\dfrac{x^2+3x-10}{4x^2-16}+7$

37. Gegeven de functie

$f(x)=0{,}75-\dfrac{3}{(2x-5)^2}$

a) Bereken de helling in de snijpunten met de *x*-as.
b) De grafiek van *f*, zijn asymptoten en de coördinaatsassen sluiten een vlakdeel *V* in. Bereken de oppervlakte van *V*.

Na paragraaf 5.0

38. Los de volgende vergelijkingen exact op. Controleer vervolgens je uitkomsten met je GRM.

a) $\frac{1}{3}x+\frac{3}{2}=1+\frac{1}{6}x$
b) $x^2=8$
c) $2^x=8$
d) $5(-2x+3)+(2x-5)=4(x-4)$
e) $(3x-1)^2=4$
f) $\frac{x}{8}-\frac{5}{6}=x-\frac{3}{4}$
g) $10^x=100$
h) $10^x=50$
i) $(x-1)^3=8$
j) $\dfrac{2x}{3x-4}=-1$
k) $\dfrac{x(x-1)}{12x}=0$
l) $12\cdot x^3=144$
m) $12\cdot 3^x=144$

n) $\frac{10 \cdot 2^x}{x+1} = \frac{x-1}{x^2-1}$

39. Absolute waarde

a) Schrijf de volgende functies zonder absoluutstrepen (dus met accolades)

$f(x) = \left|x^2 + 15x\right|$

$g(x) = |x+2| + 15$

$h(x) = 3x^2 \cdot |3x-9|$

$k(x) = x \cdot \left|x^2 - 2x + 4\right|$

b) Los de volgende vergelijkingen exact op.

$|x+3| = 4x+5$

$|x+3| = 0{,}5x+6$

$-|4-2x| = x+2$

$\sqrt{x-1} = |x-2|$

c) Los de volgende ongelijkheid exact op.

$\left|25 - x^2\right| > 11$

Na paragraaf 5.2

40.

a) Differentieer $f(x) = \sin(4x) \cdot e^{-x}$

b) Bepaal exact de vergelijking van de lijn door de buigpunten van de grafiek van $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 5x^3 + 18x^2$

c) Bepaal exact de x-coördinaten van de toppen van de grafiek van $f(x) = (x+3)(x+2) \cdot e^{-x}$

41.

a) Laat algebraïsch zien dat $(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) = 1 - 2\sin^2 x$

b) Laat algebraïsch zien dat $F(x) = \sin x \cdot \cos x$ een primitieve functie is van $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

c) Laat algebraïsch zien dat $\frac{5x+25}{x+5} + \frac{2x^3+3x^2-50x-74}{x^2-25} = 2x+8+\frac{1}{x^2-25}$

d) Schrijf $\frac{4x^2-80}{2x+9}$ in de vorm $ax+b+\frac{c}{2x+9}$

42. Schrijf als één logaritme of één getal

a) ${}^3\log x + {}^3\log 4$

b) ${}^2\log x^2 - {}^2\log x$

c) ${}^3\log 27 + {}^9\log 1 \cdot ({}^2\log 7 - 3)$

d) $2 \cdot {}^7\log 14 + {}^7\log 14$

e) ${}^3\log \frac{1}{3} + {}^5\log \frac{1}{5}$

43. Geef een primitieve functie van

a) $f(x) = 3\sin(4x)$

b) $g(x) = \sin^3 x + \sin x \cdot \cos^2 x$

c) $h(x) = 2(5x+7)^4$

d) $k(x) = \dfrac{4}{7x+3}$

e) $l(x) = 5\cos(7x)$

f) $m(x) = \dfrac{2x^2+3x+5}{x}$

g) $n(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$

44. Gegeven $f(x) = \dfrac{3x^2-4x+7}{x+2}$

a) Bereken exact $\int_{-1}^{2} f(x)dx$

b) Bereken exact de extreme waarden van *f(x)*

45. Gegeven $g(x) = (x^2-3x)\cdot e^{2x-1}$

a) Bereken in 2 decimalen de oppervlakte van het vlakdeel dat door de grafiek van g en de x-as wordt ingesloten

b) Bereken de oppervlakte van a) nu exact als je weet dat de primitieve van g een volgende gedaante heeft: $G(x) = (ax^2+bx+c)\cdot e^{2x-1}$

c) Als je door iedere top een verticale lijn tekent, wat is dan de exacte afstand tussen deze beide lijnen?

46. Gegeven $h(x) = 2 - 2\cdot\sin^2 2x$

a) Schrijf *h* in de vorm $h(x) = a + b\sin c(x-d)$

b) Bereken $h'(\frac{2}{3}\pi)$

47. Differentieer en primitiveer de volgende functies

a) $\left(x^2+3\right)\cdot x^{2\frac{1}{2}}$

b) $\left(3x+4\right)^{18}$

c) 3^{2x+5}

d) $\dfrac{4x^5-x+7}{2x^2}$

e) $3\cos(2x+\pi) - 4\sin(\pi - x)$

f) $\dfrac{1}{\left(3x-5\right)^4}$

g) $\dfrac{2x}{(3-x^2)^3}$ (de primitieve ‘past’ precies!!!!)

h) $\dfrac{7}{2x\ln x}$ (sorry, nog zo’n speciaal geval om te primitiveren!)

i) $3\sin^4(2x)\cdot\cos(2x)$ (nu hebben we de smaak te pakken!)

j) $\dfrac{3x+5}{\sqrt{3x+2}}$ (hint: $\dfrac{3x+5}{\sqrt{3x+2}}$ = $\dfrac{3x+2+3}{\sqrt{3x+2}}$ = ….)

48. Gegeven $f(x)=\dfrac{x^5-16x^3}{x+4}$

a) Bepaal exact de coördinaten van de perforatie van *f.*
b) Bepaal exact de extreme waarde(n) van *f*.
c) Bepaal exact de buigpunten van *f.*

49. Geef directe en recursieformules voor de volgende rijen

a) 15, -15, 15, -15, 15, …
b) 8, 19, 30, 41, 52, 63, …
c) 2½, 7½, 22½, 67½, 202½, …
d) 2889, 963, 321, 107, …

50. Geef bij deze pittige opgave een formule voor de volgende rijen (kies zelf of je een rangnummerformule of recursieformule maakt)

a) 12, 8, 6, 5, 4½, 4¼, …
b) 10, 12, 10, 12, 10, 12, 10, 12, …
c) 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, …

51. Gegeven is de rij u_n met $u_n = u_{n-1} + 77$ en $u_1 = 2$

a) Wat voor type rij is dit?
b) Geef de directe formule voor deze rij.
c) Geef de 2006^de^ term in de verschilrij van u_n.
d) Bepaal de 5^de^ term in de somrij van u_n.
e) Een van de termen van de somrij is 1631. Welk rangnummer heeft die term?

52. Gegeven is de rij u_n met $u_n = u_{n-1} \cdot 7$ en $u_1 = 2$

a) Wat voor type rij is dit?
b) Geef de directe formule voor deze rij.
c) Geef de 6^de^ term in de verschilrij van u_n.
d) Bepaal de 5^de^ term in de somrij van u_n.
e) Een van de termen van de somrij is 274514. Welk rangnummer heeft die term?

Wiskunde B HTV klas 5 - Antwoorden

1.

a)

$f(x) = 2x^2 - 3$

$f(1) = -1$

$f'(x) = 4x$

$f'(1) = 4$

we zoeken dus een lijn met helling 4 door punt (1,-1)

$y = 4x + b$

$-1 = 4 \cdot 1 + b$

$b = -5$

raaklijnvergelijking y=4x-5

op dezelfde manier vind je:

b) y=11x+10

c) y=2x-3

d) y=-192x+384

e) y=11x+4

2.

a) Herleid: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 3x$

Differentieer: $f'(x) = 6x^2 + 6x + 3$

b) $f'(2) = 6 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 + 3 = 39$

c) Y1 = 2X^3 + 3X(X+1)

CALC, 6, X=2

geeft helling 39. KLOPT!

d) $g(x) = x^2 + \frac{1}{2}x^4$, $g'(x) = 2x + 2x^3$, $g'(2) = 20$

$h(x) = x^2 + 2x + 1$, $h'(x) = 2x + 2$, $g'(2) = 6$

3.

a) $x\sqrt{x} + \dfrac{2}{p} - \sqrt{8} \cdot \sqrt{q} \cdot \sqrt[3]{q}$

b) $\dfrac{12(\frac{1}{x}+1)^2\sqrt{\frac{1}{x}+1}}{(x+3)^3}$

4.

a)

$f(x) = (2x^3 - 4) \cdot \sqrt{x} = 2x^3\sqrt{x} - 4\sqrt{x} = 2x^{3\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = 7x^{2\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}} = 7x^2\sqrt{x} - 2 \cdot \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = 7x^2\sqrt{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

b) $R'(p) = -\dfrac{12}{p^2} - \dfrac{30}{p^3} + 4$

c) $W'(q) = -2x + 4$

5.

a) lijn door (200,88) en (225,50)

hellingsgetal = $\dfrac{50-88}{225-200} = \dfrac{-38}{25} = -1{,}52$

$$y = -1{,}52x + b$$
$$88 = -1{,}52 \cdot 200 + b$$
$$88 = -304 + b$$
$$b = 392$$
$$y = -1{,}52x + 392$$

b) y=1,5x+7

6.

a) Als de grafiek van f_a door (12,144) gaat wil dat zeggen dat als x=12 dat geldt y=144, dus

$$f_a(x) = 2x^3 + (3-a)x^2$$
$$144 = 2 \cdot 12^3 + (3-a) \cdot 12^2$$
$$144 = 3456 + (3-a) \cdot 144$$
$$(3-a) \cdot 144 = -3312$$
$$3 - a = -23$$
$$a = 26$$

op dezelfde manier vind je

b) a=2

c) In een top is de helling nul, dus differentiëren en gelijkstellen aan nul

$$g_{a,b}(x) = x^2 + ax + b$$
$$g'_{a,b}(x) = 2x + a$$

De afgeleide moet nul zijn in punt (-5,-10), dus als x=-5 dan afgeleide is nul
2*-5+a = 0, dan is a dus 10
b kunnen we bepalen omdat we weten dat de grafiek van $g_{a,b}$ door punt (-5,-10) moet gaan, dus

$$g_{a,b}(x) = x^2 + ax + b$$
$$[\text{vul in dat } a = 10, x = -5, y = -10]$$
$$-10 = (-5)^2 + 10 \cdot -5 + b$$
$$-10 = 25 - 50 + b$$
$$b = 15$$

antwoord: a=10, b=15

d) via de dubbele afgeleide kom je aan b=3 door punt (-1,5) in te vullen kom je aan a=0,5.

7.

aandachtspunt: extreme <u>waarde</u> is een getal (de hoogte)

a) maximum: 3, minimum: $\frac{1183}{3125}$ =0,37856

b) f(0)=-5832000 is een minimum (LET OP! f(6) en f(-6) geven geen extreme waarden!!!)

8.

aandachtspunt bij buig<u>punten</u>: we vragen een punt, dus coördinaten!!
($-\frac{3}{2}$, $\frac{135}{16}$) en (-1,5)

Wiskunde B HTV klas 5 - Antwoorden

9.

a) $\frac{2}{p}$

b) $\frac{1}{2p}$

c) $\frac{12}{(2x-3)^{-1}} \cdot \frac{(2x-3)^4}{12x^{1,5}} = 12 \cdot (2x-3) \cdot \frac{(2x-3)^4}{12x\sqrt{x}} = \frac{12(2x-3)^5}{12x\sqrt{x}} = \frac{(2x-3)^5}{x\sqrt{x}}$

10.

a) hellingfunctie bepalen en gelijkstellen aan nul

$k'(x) = \frac{1}{12}x^6 - 4x^2$

$\frac{1}{12}x^6 - 4x^2 = 0$

$\frac{1}{12}x^2(x^4 - 48) = 0$

$\frac{1}{12}x^2 = 0$ of $x^4 - 48 = 0$

$x^2 = 0$ of $x^4 = 48$

$x = 0$ of $x = -\sqrt[4]{48}$ of $x = \sqrt[4]{48}$

controle in de plot/tabel wijst uit dat de x - coördinaten van de toppen zijn :

$x = -\sqrt[4]{48}$ of $x = \sqrt[4]{48}$

b) in een buigpunt "is de grafiek extreem steil of vlak"

$k''(x) = \frac{1}{2}x^5 - 8x$

$\frac{1}{2}x^5 - 8x = 0$

$\frac{1}{2}x(x^4 - 16) = 0$

$\frac{1}{2}x = 0$ of $x^4 = 16$

$x = 0$ of $x = -2$ of $x = 2$

bij deze *x*-coördinaten is de tweede afgeleide dus nul. Bij deze *x*-coördinaten horen de *y*-coördinaten

$k(-2) = \frac{64}{7}$

$k(0) = 0$

$k(2) = -\frac{64}{7}$

uit plot/tabel blijkt dat de volgende punten buigpunten zijn:

$(-2, \frac{64}{7}), (0,0), (2, -\frac{64}{7})$

c) $k(-1) = \frac{37}{28};\ k'(-1) = -\frac{47}{12}$

raaklijn betekent dat we een lijn zoeken door $(-1, \frac{37}{28})$ met helling $-\frac{47}{12}$

na uitwerking (zie voorbeeld bij opgave 5a) vind je dan $y = -\frac{47}{12}x - \frac{109}{42}$.

11.

a) sum(seq(X,X,1,199,1))=19900

b) sum(seq(X^2,X,1,20,1))=2870

c) nDeriv(3^X-√(X)+8,X,8)=7207,8

<u>óf met:</u>

Y1=3^X-√(X)+8, CALC, 6:dy/dx, X=8

d) sum(seq(X,X,201,321,12))=2871 <u>óf</u> sum(seq(12X+201,X,0,10)) <u>óf</u> sum(seq(12X+189,X,1,11))

12.

a) $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x\sqrt{x}$

b) Merk op dat geldt $g(x)=(2x)^{1,5} + 6x^6$ en dat het antwoord dus moet luiden
$g'(x) = 1,5\ (2x)^{0,5} \cdot 2 + 36\ x^5 = 3\sqrt{2x} + 36x^5$

c) $h(x)= \frac{3}{4}x^{-2} + \frac{1}{2}x^{-0,5}$ hieruit volgt het antwoord $H(x) = -\frac{3}{4}\ x^{-1}+x^{0,5} = -\dfrac{3}{4x} + \sqrt{x}$

13.

a) ***uitwerking met extra uitleg:***
$f(x)=6-2x^2$
interval [-1,2] verdelen in deelintervallen met breedte 0,75 dus
[-1,-¼] is het eerste deelinterval (k=1)
[-¼,½] is het tweede deelinterval (k=2)
[½,1¼] is het derde deelinterval (k=3)
[1¼,2] is het vierde deelinterval (k=4)
In ieder deelinterval ontstaat een staafje met een breedte van 0,75. Uit de vraagstelling in de opgave blijkt dat de hoogte van het staafje wordt bepaald door de hoogte van de functie op de linkergrens van het deelinterval.
dus het eerste staafje is $f(-1)$ hoog,
het tweede staafje is $f(-¼)$ hoog,
het derde staafje is $f(½)$ hoog,
het vierde en laatste staafje is $f(1¼)$ hoog,

De oppervlakte van een staafje is dus *hoogte* · *breedte* = functiewaarde linkergrens · 0,75.
Ik tel de oppervlakte van het 1e, 2e, 3e en 4e staafje bij elkaar op met
$f(-1)\cdot 0,75 + f(-¼)\cdot 0,75 + f(½)\cdot 0,75 + f(1¼)\cdot 0,75$ =

$\sum_{\substack{k=-1\\ \Delta k=0,75}}^{1\frac{1}{4}} f(k)\cdot 0,75$ = sum(seq((6-2X^2)*0.75,X,-1,1.25,0.75))=13,6875

[N.B. via GRM: In het list menu (2nd STAT) vind je sum (onderdeel MATH) en seq (onderdeel OPS).]

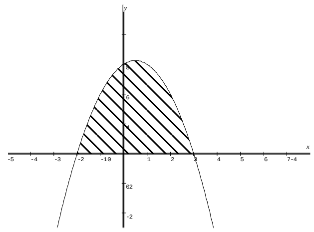
b) **uitwerking met voorbeeldnotatie**
$g(x) = 2\cdot 3^x$ op het interval [0,4]
deelintervallen [0,½], [½,1], …, [3½,4]
rechtergrenzen deelintervallen: ½, 1, …, 4
oppervlakte eerste staafje $f(½)$ · 0,5
oppervlakte laatste staafje $f(4)$ · 0,5
Riemannsom = $\sum_{\substack{k=\frac{1}{2}\\ \Delta k=0,5}}^{4} f(k)\cdot \frac{1}{2}$ = sum(seq((2*3^X)*0,5, X, 0.5, 4, 0.5)) = 189,28

c) ***toelichting:*** *een bovensom wil zeggen dat de hoogte van elk staafje wordt bepaald door de maximale hoogte van de grafiek in het betreffende deelinterval.*
hint: *leg eerst uit dat deze functie steeds daalt*
antwoord: 11,78

Wiskunde B HTV klas 5 - Antwoorden

14.

a) **uitwerking met uitgebreide uitleg**



Je ziet hiernaast de gevraagde oppervlakte gearceerd.
Om het domein te bepalen waarover we moeten integreren moeten we de nulpunten van deze kwadratische formule bepalen.

Los op: $x - x^2 + 6 = 0$

$-x^2 + x + 6 = 0$

$x^2 - x - 6 = 0$

$(x - 3)(x + 2) = 0$

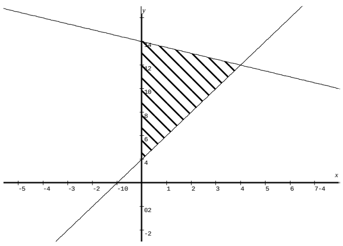
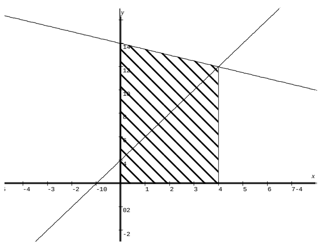
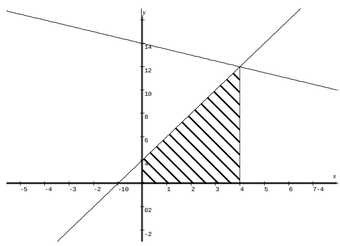
Opl: $x = 3$ of $x = -2$

Het gevraagde oppervlakte bevindt zich dus op het domein van $x = -2$ tot en met $x = 3$. De gevraagde oppervlakte is de integraal

$$\int_{-2}^{3} x - x^2 + 6dx = [\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 + 6x]_{-2}^{3}$$

$$= (\tfrac{1}{2}\cdot 3^2 - \tfrac{1}{3}\cdot 3^3 + 6\cdot 3) - (\tfrac{1}{2}\cdot(-2)^2 - \tfrac{1}{3}\cdot(-2)^3 + 6\cdot -2) = 13\tfrac{1}{2} - -7\tfrac{1}{3} = 20\tfrac{5}{6}$$

b) tip: maak altijd een schets!!!
Om de grenzen te kunnen bepalen is het nodig de x-coördinaat van het snijpunt van de grafieken te bepalen. Los op: $2x+2 = -0,5x+12$; $2,5x = 10$; $x=4$. De gevraagde oppervlakte ligt dus op het domein [0,4].

I) gevraagde oppervlak II) oppervlak onder g III) oppervlak onder f

Uit bovenstaande afbeeldingen volgt dat de gevraagde oppervlakte gelijk is aan het verschil van de oppervlakken II) en III).

Dus: oppervlakte = $\int_0^4 g(x)dx - \int_0^4 f(x)dx = [-0,25x^2 + 12x]_0^4 - [x^2 + 2x]_0^4$

$$= (-0,25\cdot 16 + 12\cdot 4 - 0) - (16 + 2\cdot 4 - 0) = 20$$

c) maak een schets, bepaal snijpunten met de assen en je weet dat je moet rekenen met $\int_0^2 3x - 6dx = [1,5x^2 - 6x]_0^2 = 1,5\cdot 4 - 6\cdot 2 = -6$

Daarna eraan denken dat een oppervlakte positief is, dus dat we het tegengestelde antwoord moeten geven. Oppervlakte = 6

15.

a) geen

b) $g(-\sqrt{\frac{1}{3}}) = 10\sqrt{\frac{1}{3}}$ is een max, $g(\sqrt{\frac{1}{3}}) = -10\sqrt{\frac{1}{3}}$ is een min

c) $h(4)=240$ is een max

d) $k(-\frac{8}{3}) = -75\frac{23}{27}$ is een min, $k(-8) = 0$ is een max

e) $l(0) = 0$ randpunt, $l(0{,}6) = 0{,}24\sqrt{0{,}6}$ is een max

N.B. Denk eraan dat we *y*-waarden willen horen en vergeet niet "minimum" of "maximum" te vermelden.

16.
controleer je antwoorden met je GRM
extreme waarden via CALC, MIN of MAX
buigpunten door de hellinggrafiek te tekenen en dan de toppen van de hellingfunctie te bepalen via CALC, MIN of MAX
[NB: hoe laat je je GRM de hellinggrafiek tekenen?
invoer: Y1 = 15X^5; Y2= nDeriv(Y1, X, X)
je vindt Y1 via de knop VARS, optie Y-VARS, optie 1: Function…, optie 1:Y1
het handigst is het om je GRM alleen Y2 te laten tekenen, zet daarom het =-teken dat achter Y1 staat 'van zwart naar wit" door erop te 'enteren']

17.
a) $y=33x-30$ **b)** $y=33x+30$ **c)** opgave vervalt **d)** $y=-1$

18. 1
a) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ **b)** $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ **c)** $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ **d) 1** **e)** $\frac{1}{2}$

.2
a) 0 **b) 0** **c) -1** **d) 0** **e) 0**

.3
a) $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ **b) -1** **c)** $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ **d)** $\sqrt{3}$ **e)** $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

19. 1
a) $x = 1\frac{1}{6}\pi + k\cdot 2\pi$ **of** $x = 1\frac{5}{6}\pi + k\cdot 2\pi$ **met *k* geheel**
b) $x = \frac{1}{3}\pi + k\cdot 2\pi$ **of** $x = 1\frac{2}{3}\pi + k\cdot 2\pi$ **met *k* geheel**
c) $x = \frac{1}{4}\pi + k\cdot \pi$ **met *k* geheel**

.2
a) $x = \frac{1}{4}\pi + k\cdot 2\pi$ **of** $x = \frac{3}{4}\pi + k\cdot 2\pi$ **met *k* geheel**
b) $x = \frac{5}{6}\pi + k\cdot 2\pi$ **of** $x = 1\frac{1}{6}\pi + k\cdot 2\pi$ **met *k* geheel**
c) $x = \frac{2}{3}\pi + k\cdot \pi$ **met *k* geheel**

.3
a) $x = \frac{1}{6}\pi + k\cdot \pi$ **met *k* geheel**
b) $x = \frac{3}{4}\pi + k\cdot 2\pi$ **of** $x = 1\frac{1}{4}\pi + k\cdot 2\pi$ **met *k* geheel**
c) $x = \frac{1}{2}\pi + k\cdot \pi$ **met *k* geheel**

20.
a) $x = 0 + k\cdot\pi$ met *k* geheel
b) $2\sin t \cdot \cos t - \sin t = 0$
$\sin t(2\cos t - 1) = 0$
$\sin t = 0 \text{ of } \cos t = 0{,}5$
$t = 0 + k\cdot\pi \text{ of } t = \frac{1}{3}\pi + k\cdot 2\pi \text{ of } t = 1\frac{2}{3}\pi + k\cdot 2\pi$

met *k* geheel

c) vanwege symmetrie geldt:

$3(x-\frac{1}{6}\pi)=2\left(x+\frac{1}{4}\pi\right)+k\cdot 2\pi$ of $3(x-\frac{1}{6}\pi)=\pi-2\left(x+\frac{1}{4}\pi\right)+k\cdot 2\pi$

$3x-\frac{1}{2}\pi=2x+\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi$ of $3x-\frac{1}{2}\pi=\pi-2x-\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi$

$x=\pi+k\cdot 2\pi$ of $5x=\pi+k\cdot 2\pi$

$\text{x}=\frac{1}{5}\pi+k\cdot\frac{2}{5}\pi$

Dit is te combineren tot $\text{x}=\frac{1}{5}\pi+k\cdot\frac{2}{5}\pi$

21.

c) $\tan^2 x\cdot\sin^2 x=\tan^2 x\cdot(1-\cos^2 x)=\tan^2 x-\tan^2 x\cdot\cos^2 x=\tan^2 x-\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\cos^2 x=$

$\tan^2 x-\sin^2 x$

22.

a) bijvoorbeeld y=1-2,5sin2x of y=1+2,5sin2(x-0,5π)

b) bijvoorbeeld y=8+cos(0,8πx)

c) bijvoorbeeld y=-3+4cos0,8π(x+0,5)

23.

a) Los op met abc-formule: $2x^2+3x+4=0$

opl: $x=-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{41}$ of $x=-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{41}$

b) Los op:

$2\sqrt{2x+15}=2x$

$\sqrt{2x+15}=x$

$2x+15=x^2$ kwadrateren, dus straks controleren!!!

$x^2-2x-15=0$

$(x-5)(x+3)=0$

$x=5$ of $x=-3$

controle : $2\sqrt{2\cdot 5+15}=10$ en $2\cdot 5=10$ OK!

controle : $2\sqrt{2\cdot -3+15}=6$ en $2\cdot -3=-6$ FOUT!

opl : $x=5$

c) Los op:

$x+2=\dfrac{3}{x}$

$x^2+2x=3$ (dus vermenigvuldigen met noemer!!!)

$x^2+2x-3=0$

$(x-1)(x+3)=0$

opl : $x=1$ of $x=-3$

24.

a) $\sqrt{32}=\sqrt{16\cdot 2}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{2}=4\sqrt{2}$ **enzovoorts**

25.

a) $f'(t)=\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}t$

b) $g'(t)=6\sin 2(t+1)$

c) $h'(t)=\pi\sin\pi t$

d) $k'(t) = -2\pi\cos(1-2t)$

e) $l'(t) = -6\cos^2 t \cdot \sin t$

26.

a) $F(x) = \frac{1}{5}\sin 5x$

b) Let op! Je moet zo'n opgave altijd (!) herkennen. Je weet: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
Dus $g(x)=1$ en $G(x)=x$

c) Ook hier draait het maken van een opgave om *herkenning.* Je weet: $\sin 3x$ lijkt sterk op de afgeleide van $\cos 3x$, die zal daar dus wel terecht gekomen zijn via de kettingregel…
En dus moeten we $H(x)=\cos^3 x$ maar eens proberen. En wat blijkt: als je H differentieert, dan levert dat h.

27.

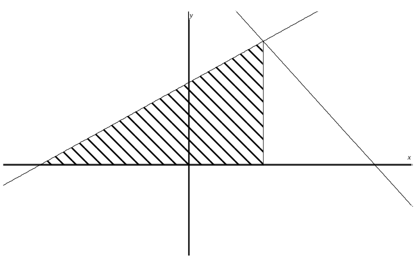
N.B. De positieve x-as wil zeggen het gedeelte van de x-as rechts van de oorsprong.
N.B. Maak steeds eerst een schets.

a) Over welk interval loopt het gevraagde oppervlak? Linkergrens natuurlijk nul, rechtergrens wordt bepaald door snijpunt van f met $y=a$.
Los op: $x^2=a$ Levert rechts van de oorsprong $x=\sqrt{a}$.
Vandaar is het gevraagde oppervlak gelijk aan:

$$\int_0^{\sqrt{a}} l(x) - f(x)dx = \int_0^{\sqrt{a}} a - x^2 dx = [ax - \tfrac{1}{3}x^3]_0^{\sqrt{a}} = (a\sqrt{a} - \tfrac{1}{3}a\sqrt{a}) - (0) = \tfrac{2}{3}a\sqrt{a}$$

$$\text{Los op}: \tfrac{2}{3}a\sqrt{a} = \frac{16}{3} \Rightarrow a\sqrt{a} = 8 \Rightarrow a = 4$$

b)



Maak een schets. (Waarom weet je zeker dat dit de juiste vorm is? Waarom snijdt g de y-as hoger dan f?) Het gevraagde oppervlak bestaat uit twee delen, een linker (gearceerd) en een rechter.

Te berekenen punten: de nulpunten en het snijpunt van f en g.

Los op: $f(x)=0$; $0{,}5x+p=0$; $0{,}5x=-p$; $x=-2p$
Los op: $g(x)=0$; $-x+6+p=0$; $x=6+p$
Los op: $f(x)=g(x)$; $0{,}5x+p=-x+6+p$; $0{,}5x=-x+6$; $1{,}5x=+6$; $x=4$

Dus gevraagde oppervlak is

$$\int_{-2p}^{4} f(x)dx + \int_{4}^{6+p} g(x)dx = \int_{-2p}^{4} 0{,}5x + pdx + \int_{4}^{6+p} -x + 6 + pdx =$$

$$[0{,}25x^2 + px]_{-2p}^{4} + [-0{,}5x^2 + 6x + px]_4^{6+p} =$$

$$\{(4+4p) - (p^2 - 2p^2)\} + \{(-0{,}5(6+p)^2 + 6(6+p) + p(6+p)) - (-8+24+4p)\} =$$

$$\{4 + 4p - p^2 + 2p^2\} + \{-0{,}5(36 + 12p + p^2) + 36 + 6p + 6p + p^2 + 8 - 24 - 4p\} =$$

$$4 + 4p + p^2 - 18 - 6p - 0{,}5p^2 + 36 + 12p + p^2 - 16 - 4p = 1{,}5p^2 + 6p + 6$$

Dat oppervlak moet gelijk zijn aan 54 dus

$1{,}5p^2 + 6p + 6 = 54$

$1{,}5p^2 + 6p - 48 = 0$

Los op: $p^2 + 4p - 32 = 0$

$(p+8)(p-4) = 0$

$p = -8$ of $p = 4$

28.

a) KGV $(\frac{1}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi) = 2\pi$

b) π

c) KGV $(4\pi, 3\frac{1}{2}\pi) = 28\pi$

d) KGV $(2, 1\frac{2}{3}) = 10$

e) KGV $(\pi, \frac{20}{13}\pi) = 20\pi$

29.

a) gezamenlijke periode: 2π
opl: $x = 0 + k \cdot 2\pi$ of $x = 0{,}61 + k \cdot 2\pi$ of $x = 1{,}41 + k \cdot 2\pi$ of $x = 2{,}27 + k \cdot 2\pi$
of $x = \pi + k \cdot 2\pi$ of $x = 4{,}01 + k \cdot 2\pi$ of $x = 4{,}87 + k \cdot 2\pi$ of $x = 5{,}67 + k \cdot 2\pi$
met *k* geheel

b) gezamenlijke periode: 5π
opl: $x = 0 + k \cdot 5\pi$ of $x = 0{,}55 + k \cdot 5\pi$ of … enzovoorts!

30.

a) gezamenlijke periode: 2π, en volgens GRM op [0, 2π> zijn er 8 oplossingen
dus op [-4π, 80π> zijn er 42*8=336 oplossingen
totaal 336+1=337 oplossingen (want *x*= 80π is ook een oplossing)

b) gezamenlijke periode: 30, en volgens GRM op [0, 30> zijn er 6 oplossingen
dus op [-30, 1500> zijn er 501*6=3006 oplossingen
volgens GRM op [-45,-30> zijn er 3 oplossingen
totaal 3006+3=3009 oplossingen

c) gezamenlijke periode: 5π, en volgens GRM op [0, 5π> zijn er 5 oplossingen
dus op [0, 95π> zijn er 19*5=95 oplossingen
volgens GRM op [95π, 98π > zijn er 3 oplossingen
totaal 95+3=98 oplossingen

31.

a) $f'(t) = -6\cos^{-3} 4t \cdot -4\sin 4t = \dfrac{24\sin 4t}{\cos^3 4t}$

b) $g(t) = \sin^2 t$ **dus** $g'(t) = 2\sin t \cdot \cos t$

c) **merk op** $h(t) = \tan^2 t(1 - \sin^2 t) = \tan^2 t \cdot \cos^2 t = \sin^2 t$ dus zelfde antwoord als b)

32.

Gebruik je GRM ter controle van je antwoord

33.

a) $f'(x) = 45x^2 - \dfrac{4}{x^5}$

b) $g'(x) = \dfrac{15}{2\sqrt{15x+8}}$

c) $h'(x) = -4x - \dfrac{2}{13x^3}$

d) $k'(x) = 5\frac{1}{2}x^4\sqrt{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{30}{x^3\sqrt{x}} = \frac{11x^8 - 4\sqrt{x} + 60}{2x^3\sqrt{x}}$

e) $l'(x) = 2310x^6$

f) $m'(x) = 1\frac{8}{15} \cdot \sqrt[15]{x^8} + 18\sqrt[5]{x}$

g) $n'(x) = \frac{15}{2x \cdot \sqrt[4]{2x^2}}$

h) $p'(x) = 50x - 18$

i) $q'(x) = -\frac{15}{4x^6} - \frac{12}{5x^4} + \frac{20}{3x^5}$

j) $r'(x) = 22$

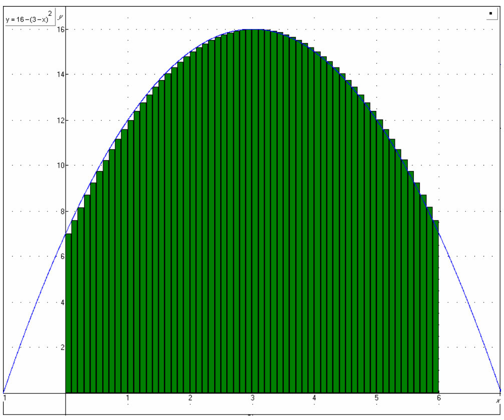
k) $s'(x) = \sqrt{5}$

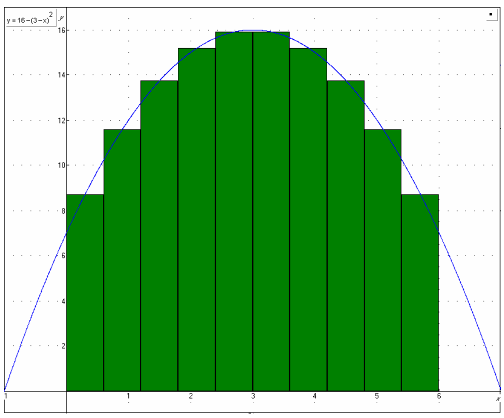
l) $t'(x) = \frac{80}{(2x + \frac{1}{2})^6}$

34.

a) In de linker afbeelding hieronder zie je een opdeling van het interval [0,6] in staafjes van 0,1 breed. Merk op dat het eerste staafje een oppervlakte van $f(0)\cdot 0{,}1$ heeft en dat het laatste staafje een oppervlakte van $f(5{,}9)\cdot 0{,}1$ heeft.

Daarom is de juiste Riemannsom gelijk aan $\sum_{\substack{k=0\\ \Delta k=0{,}1}}^{5{,}9} f(k)\cdot 0{,}1$ en niet aan $\sum_{\substack{k=0\\ \Delta k=0{,}1}}^{6} f(k)\cdot 0{,}1$.





In de rechter afbeelding hierboven zie je een opdeling van het interval [0,6] in staafjes van 0,6 breed. Merk op dat het eerste staafje een oppervlakte van $f(0{,}3)\cdot 0{,}6$ heeft en dat het laatste staafje een oppervlakte van $f(5{,}7)\cdot 0{,}6$ heeft.

Daarom is de juiste Riemannsom gelijk aan $\sum_{\substack{k=0{,}3\\ \Delta k=0{,}6}}^{5{,}7} f(k)\cdot 0{,}6$ en niet aan

$\sum_{\substack{k=0{,}3\\ \Delta k=0{,}6}}^{6} f(k)\cdot 0{,}6$.

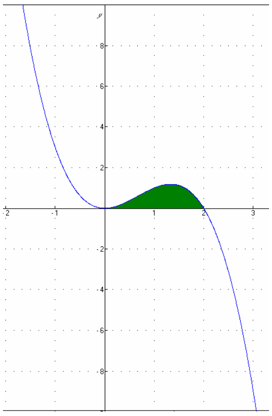
b) linkergrenzen dus opp eerste staafje is $g(1)\cdot 0{,}15$ en opp laatste staafje is $g(3{,}85)\cdot 0{,}15$

Riemannsom = sum(seq((16-X^2)*0.15,X,1,3.85,0.15))=28,11375

c) exacte opp= $\int_1^4 16 - x^2 dx = [16x - \frac{1}{3}x^3]_1^4 = (16\cdot 4 - \frac{1}{3}\cdot 4^3) - (16\cdot 1 - \frac{1}{3}\cdot 1^3) = 27$

verschil 28,11375-27=1,11375

d) Maak eerst een schets. Je ziet nu dat je eerst de nulpunten moet bepalen.



$\text{Los op}: -x^3+2x^2=0$

$-x^2(x-2)=0$

$x=0 \text{ of } x=2$

exacte opp =

$$\int_0^2 -x^3+2x^2dx=[-\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{2}{3}x^3]_0^2=(-\tfrac{1}{4}\cdot 2^4+\tfrac{2}{3}\cdot 2^3)-0=\frac{4}{3}$$

benadering:
opp eerste staafje = $h(0,05)\cdot 0,1$
en opp laatste staafje = $h(1,95)\cdot 0,1$
dus Riemannsom =

sum(seq((-X^3+2X^2)*0.1,X,0.05,1.95,0.1)) = 1,335
Het verschil is ongeveer 0,002

e) opmerking: omdat er bij deze opgave niet vermeld staat dat je gebruik moet maken van een Riemannsom, dien je de integraal $\int_0^{1,5} 8\cdot 0,5^x-2^x\,dx$ op een van de volgende twee manieren te benaderen met je GRM.
1) Y1=8*0.5^X-2^X
opties: calc, ∫f(X)dx, lower limit=0, upper limit=1,5
opl: 4,82

2) in rekenscherm fnInt(functie, X, ondergrens, bovengrens)
fnInt vind je via MATH, 9
dus hier fnInt(8*0.5^X-2^X, X, 0, 1.5) = 4,82

35.

a) domein & nulpt

teller $\frac{1}{x}+1=0 \Leftrightarrow 1+x=0 \Leftrightarrow x=-1$

noemer $x-\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ of } x=-1$

$f(0)=\dfrac{\frac{1}{0}+1}{0-\frac{1}{0}}=\dfrac{kn}{kn}\Rightarrow \text{VA of perforatie}$

$f(-1)=\frac{0}{0}\Rightarrow \text{VA of perforatie}$

$f(1)=\frac{2}{0}\Rightarrow \text{VA}$

$\text{domein}: x\neq 0 \text{ en } x\neq -1 \text{ en } x\neq 1$

plot — je ziet 1 VA en 1 HA

herleiden — $f(x)\dfrac{\frac{1}{x}+1}{x-\frac{1}{x}}=\dfrac{1+x}{x^2-1}=\dfrac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{1}{x-1} \text{ mits } x\neq 0 \text{ en } x\neq -1$

bijzonderheden
*geen nulpt
*VA: x=1 en HA: y=0
*perforaties (0,-1) en (-1;-0,5)

b) $f(-3)=\frac{0}{-5}=0\Rightarrow nulpt;\quad f(2)=\frac{0}{0}\Rightarrow \text{VA of perf};\quad \text{Domein}: x\neq 2$

$$f(x)=\frac{x^2+x-6}{x-2}=\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}=x+3 \text{ mits } x\neq 2$$

*nulpt (-3,0) *geen asymptoten *perforatie (2,5)

c) $g(0)=\frac{0}{0}\Rightarrow \text{VA of perf};\ \text{Domein}: x\neq 0;\ g(x)=\dfrac{x}{x^2}=\dfrac{1}{x}$

*geen nulpt *VA: x=0 HA: y=0 *geen perforaties

d) $h(0)=\frac{0}{0}\Rightarrow \text{VA of perf; Domein}: x\neq 0;\ h(x)=\dfrac{x^2}{x}=x \text{ mits } x\neq 0$

*geen nulpt *geen asymptoten *perforatie (0,0)

e) teller heeft geen nulpunten (discriminant positief)

$k(3)=\frac{44}{0}\Rightarrow \text{VA; Domein}: x\neq 3;$

met bijvoorbeeld een staartdeling vind je:

$$k(x)=\frac{3x^2+4x+5}{x-3}=\frac{(x-3)(3x+13)+44}{x-3}=\frac{(x-3)(3x+13)}{x-3}+\frac{44}{x-3}=3x+13+\frac{44}{x-3}$$

*geen nulpt *VA: x=3 *SA: y=3x+13 *geen perforaties

f)

$$l(0)=\tfrac{kn}{kn}\Rightarrow \text{VA of perf; } l(1)=\tfrac{0}{2}=0\Rightarrow \text{nulpunt; } l(-3)=\tfrac{0}{1\frac{1}{3}}=0\Rightarrow \text{nulpunt; } l(-1)=\tfrac{8}{0}\Rightarrow \text{VA;}$$

Domein: x≠0 en x≠-1

$$l(x)=\frac{2x+4-\frac{6}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{2x^2+4x-6}{x+1}=\frac{(x+1)(2x+2)-8}{x+1}=\frac{(x+1)(2x+2)}{x+1}-\frac{8}{x+1}=2x+2-\frac{8}{x+1}$$

*nulpunten (1,0) en (-3,0) *VA: x=-1 SA: 2x+2 *perforatie(0,-6)

36.

* nulpunten teller: x^2+3x-10=0; (x+5)(x-2)=0; x=-5 of x=2

* nulpunten noemer: 4x^2-16=0; 4x^2=16; x^2=4; x=2 of x=-2

f(-5)=7 » (-5,7) is een punt op de grafiek

$f(-2)=\frac{-12}{0}\Rightarrow \text{VA}$

$f(2)=\frac{0}{0}\Rightarrow \text{VA of perforatie}$

* nulpunten van f:

$$\frac{x^2+3x-10}{4x^2-16}=-7$$

$$x^2+3x-10=-7(4x^2-16)$$

$$x^2+3x-10=-28x^2+112$$

$$29x^2+3x-122=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot 29\cdot -122}}{2\cdot 29}=\frac{-3\pm 119}{58}$$

$$x=2 \text{ of } x=\frac{-122}{58}=\frac{-61}{29}\approx -2{,}10$$

Merk op dat x=2 geen nulpunt oplevert, omdat x=2 zowel in de teller als in de noemer van de breuk een nulpunt is!!!

Dus het nulpunt van f is $(\frac{-61}{29},0)$

* plot: je ziet 1 VA en 1 HA

* herleiden:

$$f(x)=\frac{x^2+3x-10}{4x^2-16}+7=\frac{(x+5)(x-2)}{4(x^2-4)}+7=\frac{(x+5)(x-2)}{4(x+2)(x-2)}+7$$

$$=\frac{x+5}{4(x+2)}+7 \text{ mits } x\neq 2=\frac{x+2+3}{4(x+2)}+7=\frac{x+2}{4(x+2)}+\frac{3}{4(x+2)}+7$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{4(x+2)}+7=\frac{3}{4(x+2)}+7\frac{1}{4} \text{ mits } x\neq 2$$

* nulpt $(\frac{-61}{29},0)$ *VA: x = -2 *HA: y = 7,25 *perforatie: $(2,7\frac{7}{16})$

37.

a) nulpunten bij

$$0{,}75-\frac{3}{(2x-5)^2}=0$$

$$\frac{3}{(2x-5)^2}=0{,}75$$

$$(2x-5)^2=4$$

$$2x-5=2 \text{ of } 2x-5=-2$$

$$x=3\tfrac{1}{2} \text{ of } x=1\tfrac{1}{2}$$

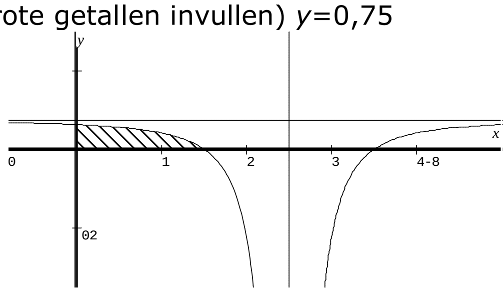
hellingfunctie bepalen

$$f(x)=0{,}75-3(2x-5)^{-2}$$

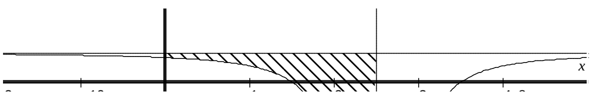
$$f'(x)=6(2x-5)^{-3}\cdot 2=12(2x-5)^{-3}=\frac{12}{(2x-5)^3}$$

in het linker snijpunt met de x-as is de helling $12/(2\cdot1{,}5-5)^3=-1{,}5$
in het linker snijpunt met de x-as is de helling $12/(2\cdot3{,}5-5)^3=1{,}5$

b) Bij a) is bepaald dat het linker snijpunt met de x-as (1,5;0) is.
Uit het functievoorschrift zijn de asymptoten af te leiden.
VA (noemer is nul) x=2,5
HA (grote getallen invullen) y=0,75



In deze afbeelding hierboven zie je het oppervlak dat we gaan bepalen.



In deze afbeelding zie je het oppervlak dat gevraagd werd.

Het hele rechthoekje heeft een oppervlakte van 2,5 · 0,75. Daar moeten we het volgende vlakdeel vanaf trekken:

$$\int_0^{1,5} 0,75-3(2x-5)^{-2}\,dx=[0,75x+3(2x-5)^{-1}\cdot\tfrac{1}{2}]_0^{1,5}=[0,75x+\frac{3}{2(2x-5)}]_0^{1,5}$$
$$=(0,75\cdot1,5+\tfrac{3}{2(2\cdot1,5-5)})-(0,75\cdot0+\tfrac{3}{2(2\cdot0-5)})=0,675$$

Gevraagde oppervlakte is dus: 2,5*0,75-0,675=1,2

38.

controleer je uitkomsten met je GRM
Wil je je uitwerking controleren, dan mag je deze inleveren!!!

39.

a) Aanpak: bepaal de nulpunten van de functie binnen de strepen, dat zijn je "omslagpunten". Bepaal voor de tussenliggende waarden steeds of de functie binnen de strepen positief of negatief is. (Gebruik bijvoorbeeld een plot.) Als deze negatief is, moet je dat stuk met -1 vermenigvuldigen.
Los op: $x^2 + 15x = 0$; $x(x + 15) = 0$; $x = 0$ of $x = -15$
Als $x<-15$ dan $x^2 + 15x > 0$ dus dan 'geen wijziging'
Als $x=-15$ dan $x^2 + 15x = 0$ dus dan 'geen wijziging'
Als $-15<x<0$ dan $x^2 + 15x < 0$ dus dan wordt het $-x^2 - 15x$
Als $x>0$ dan $x^2 + 15x > 0$ dus dan 'geen wijziging'
Als $x=0$ dan $x^2 + 15x = 0$ dus dan 'geen wijziging'

Daarom:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+15x \text{ als } x\le -15 \\ -x^2-15x \text{ als } -15<x<0 \\ x^2+15x \text{ als } x\ge 0\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} -x-2+15 \text{ als } x<-2 \\ x+2+15 \text{ als } x\ge -2\end{cases}=\begin{cases} -x+13 \text{ als } x<-2 \\ x+17 \text{ als } x\ge -2\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases} 3x^2\cdot(-3x+9) \text{ als } x<3 \\ 3x^2\cdot(3x-9) \text{ als } x\ge 3\end{cases}=\begin{cases} -9x^3+27x^2 \text{ als } x<3 \\ 9x^3-27x^2 \text{ als } x\ge 3\end{cases}$$

$$k(x)=x\cdot(x^2-2x+4)=x^3-2x^2+4x$$

Merk op dat bij x^2-2x+4 geldt dat discriminant D=4-4·1·4<0 en dat x^2-2x+4 dus geen nulpunten heeft. Volgens de plot is x^2-2x+4 altijd positief.

b) Los op: $|x+3|=4x+5$

als $x<-3$: $-x-3=4x+5$; $-5x=8$; $x=-1,6$ KAN NIET! (nl. groter dan -3)
als $x\geq-3$: $x+3=4x+5$; $-3x=5$; $x=-5/3$

opl: $x=-5/3$

Los op: $|x+3|=0,5x+6$

als $x<-3$: $-x-3=0,5x+6$; $-1,5x=9$; $x=-6$
als $x\geq-3$: $x+3=0,5x+6$; $-0,5x=3$; $x=-6$ KAN NIET!

opl: $x=-6$

Los op: $-|4-2x|=x+2$

als $x\leq2$: $-(4-2x)=x+2$; $-4+2x=x+2$; $x=6$ KAN NIET!
als $x>2$: $-(-4+2x)=x+2$; $4-2x=x+2$; $-3x=-2$; $x=2/3$ KAN NIET!

géén opl.

Los op: $\sqrt{x-1} = |x-2|$

als $x<2$: $\sqrt{x-1}$ =-x+2; x-1=(-x+2)^2 *(kwadrateren=controleren!)*
x-1=x^2-4x+4
als $x\geq 2$: $\sqrt{x-1}$ =x-2; x-1=(x-2)^2 *(kwadrateren=controleren!)*
x-1=x^2-4x+4;

dus:
x^2-5x+5=0; x= $\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ =2,5±0,5√5

CONTROLE OPLOSSING 1:
$\sqrt{2{,}5-0{,}5\sqrt{5}-1} = 0{,}62$
$|2{,}5-0{,}5\sqrt{5})-2| = 0{,}62$

CONTROLE OPLOSSING 2:
$\sqrt{2{,}5+0{,}5\sqrt{5}-1} = 1{,}62$
$|2{,}5+0{,}5\sqrt{5})-2| = 1{,}62$

opl: x = 2,5±0,5√5

c) stappenplan: 1) schets, 2) snijpunten, 3) antwoord
Los op: $|25-x^2| = 11$

als x<-5: -25+x^2=11; x^2=36; x=-6 of x=6 (KAN NIET)
als -5≤x≤5 25-x^2=11; x^2=14; x=-√14 of x=-√14
als x>5: -25+x^2=11; x^2=36; x=-6 (KAN NIET) of x=6

opl: x= -6 of x=-√14 of x=√14 of x=6
Uit de schets volgt dat $|25-x^2| > 11$ als x<-6 of -√14<x<√14 of x>6

40.

a) $f'(x) = \cos(4x)\cdot 4\cdot e^{-x} + \sin(4x)\cdot e^{-x}\cdot -1 = 4\cos(4x)\cdot e^{-x} - \sin(4x)\cdot e^{-x}\cdot$

b) y = -27,5x – 15

c) x = $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ of x = $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$

41.

a) (cos$x$ + sin$x$)(cos$x$-sin$x$) = cos^2x -sin$x$·cos$x$ +sin$x$·cos$x$ - sin^2x
= cos^2x - sin^2x = cos^2x + sin^2x - 2sin^2x = 1-2sin^2x

b) $F(x)$ = sin$x$ · cos$x$ dan $F'(x)$ = cos$x$ · cos$x$ + sin$x$ · -sin$x$ = cos^2x – sin^2x
Waarmee aangetoond dat F een primitieve is van f.

c) *STAP 1:*

$$\frac{5x+25}{x+5} + \frac{2x^3+3x^2-50x-74}{x^2-25} = \frac{5(x+5)}{(x+5)} + \frac{2x^3+3x^2-50x-74}{x^2-25}$$

$$= 5 + \frac{2x^3+3x^2-50x-74}{x^2-25}$$

STAP 2:

$$2x+8+\frac{1}{x^2-25} = 5+2x+3+\frac{1}{x^2-25} = 5+\frac{(2x+3)(x^2-25)}{x^2-25}+\frac{1}{x^2-25}$$

$$= 5+\frac{2x^3-50x+3x^2-75}{x^2-25}+\frac{1}{x^2-25} = 5+\frac{2x^3-50x+3x^2-74}{x^2-25}$$

CONCLUSIE:
linkerlid en rechterlid zijn gelijk aan elkaar

d)
$$\frac{4x^2-80}{2x+9}=\frac{2x(2x+9)-18x-80}{2x+9}=\frac{2x(2x+9)-9(2x+9)+81-80}{2x+9}$$
$$=\frac{2x(2x+9)-9(2x+9)+1}{2x+9}=2x-9+\frac{1}{2x+9}$$

42.

a) ${}^3\log 4x$

b) ${}^2\log\frac{x^2}{x}={}^2\log x$

c) $3+0\cdot({}^2\log 7-3)=3+0=3$ of: ${}^3\log 27+0\cdot({}^2\log 7-3)=3+0={}^3\log 27$

d) $3\cdot{}^7\log 14={}^7\log 14^3$

e) $-1+-1=-2$

43.

a) $F(x)=\frac{3}{4}\cos(4x)$

b) $G(x)=-\cos x$ **(hint: ontbind de functie *g* in factoren)**

c) $H(x)=\frac{2}{25}(5x+7)^5$

d) $K(x)=\frac{4}{7}\ln|7x+3|$

e) $L(x)=\frac{5}{7}\sin(7x)$

f) $M(x)=x^2+3x+5\ln|x|$

g) $N(x)=\frac{1}{2}x^2+2x$ **(hint: vereenvoudig de breuk door de teller te ontbinden in factoren)**

44.

a) eerst BREUKSPLITSEN om te kunnen primitiveren:

$$f(x)=\frac{3x^2-4x+7}{x+2}=\frac{3x(x+2)-10x+7}{x+2}=\frac{3x(x+2)-10(x+2)+27}{x+2}=3x-10+\frac{27}{x+2}$$

$$\int_{-1}^{2}3x-10+\frac{27}{x+2}\,dx=\left[\tfrac{3}{2}x^2-10x+27\cdot\ln|x+2|\right]_{-1}^{2}=\left(\tfrac{3}{2}\cdot 4-20+27\ln 4\right)-\left(\tfrac{3}{2}+10+27\ln 1\right)$$

$$=6-20+27\ln 4-\tfrac{3}{2}-10-0=27\ln 4-25\tfrac{1}{2}$$

b) Je kunt met de 'gebreuksplitste' vorm van f(x) gaan differentiëren maar laat ik maar eens de quotiëntregel toepassen:

$$f'(x)=\frac{(6x-4)\cdot(x+2)-(3x^2-4x+7)\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{6x^2+12x-4x-8-3x^2+4x-7}{(x+2)^2}=\frac{3x^2+12x-15}{(x+2)^2}$$

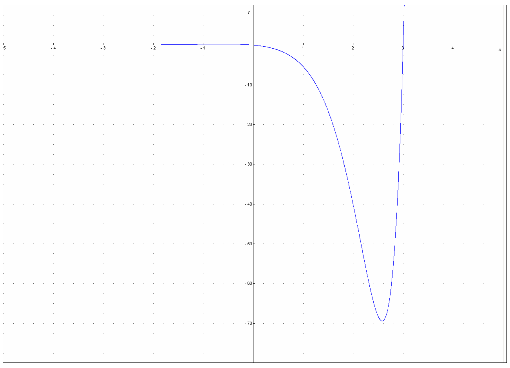
$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2+12x-15=0 \text{ en } x\neq -2$

$$x^2+4x-5=0$$
$$(x+5)(x-1)=0$$
$$x=-5 \text{ of } x=1$$

extreme waarden (heel vaak wordt vergeten om de *x*-coördinaten in te vullen!!!) invullen en controleren in plot
f (-5) = -34 is een maximum
f (1) = 2 is een minimum

45.

a) Eerst maar eens een schetsje voor het overzicht.



We bepalen de nulpunten als volgt:

$$g(x)=0$$
$$(x^2-3x)=0 \text{ of } e^{2x-1}=0$$
$$x\cdot(x-3)=0$$
$$x=0 \text{ of } x=3$$

We zien het vlakdeel onder de horizontale as liggen, dus zullen we de negatieve uitkomst van de integraal straks positief moeten maken. De gevraagde oppervlakte is dus $opp=-\int_0^3 (x^2-3x)\cdot e^{2x-1}\,dx$

Met GRM vind je de benadering –fnInt(X^2-3X)*e^(2X-1), X, 0, 3) = 74,57

b) Er moet dus gelden $G'(x)=g(x)$

$$G'(x)=(2ax+b)\cdot e^{2x-1}+(ax^2+bx+c)\cdot e^{2x-1}\cdot 2=e^{2x-1}(2ax+b+2ax^2+2bx+2c)$$
$$=e^{2x-1}(2ax^2+(2a+2b)x+b+2c)$$

Dat moet gelijk zijn aan $g(x)=(x^2-3x)\cdot e^{2x-1}$

en dus $2a=1 \text{ en } 2a+2b=-3 \text{ en } b+2c=0$

hieruit volgt $a=\frac{1}{2}$

en dus $1+2b=-3 \text{ en } b+2c=0$

hieruit volgt $b=-2$

en dus $-2+2c=0$

hieruit volgt $c=1$

We weten nu dat de primitieve $G(x)=(\frac{1}{2}x^2-2x+1)\cdot e^{2x-1}$ is.

$$opp=-\int_0^3 (x^2-3x)\cdot e^{2x-1}\,dx$$
$$=-\left[\ (\tfrac{1}{2}x^2-2x+1)\cdot e^{2x-1}\ \right]_0^3$$
$$=-\{\ (\tfrac{1}{2}\cdot 9-6+1)\cdot e^5-(0-0+1)e^{-1}\ \}$$
$$=-\{\ -\tfrac{1}{2}\cdot e^5-e^{-1}\ \}$$
$$=\tfrac{1}{2}\cdot e^5+e^{-1}$$

en dit is inderdaad afgerond: 74,57

c) De vraag om de afstand tussen de beide verticale lijnen door de beide toppen van de grafiek van *g* te berekenen, komt neer op het berekenen van de *x*-coördinaten van de toppen en daarna het verschil van deze *x*-waarden te berekenen.

$$g'(x) = (2x-3)\cdot e^{2x-1} + (x^2-3x)\cdot e^{2x-1}\cdot 2 = e^{2x-1}\cdot(2x-3+2x^2-6x) = e^{2x-1}\cdot(2x^2-4x-3)$$

Toppen bij: $g'(x)=0$

$$e^{2x-1}\cdot(2x^2-4x-3)=0$$
$$2x^2-4x-3=0$$
$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot2\cdot-3}}{4}=\frac{4\pm\sqrt{16+24}}{4}=\frac{4\pm\sqrt{40}}{4}=\frac{4\pm2\sqrt{10}}{4}=1\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{10}$$

Dus de verticale lijnen zijn gegeven door

$$x=1+\tfrac{1}{2}\sqrt{10} \;\vee\; x=1-\tfrac{1}{2}\sqrt{10}$$

De afstand wordt daardoor $1+\tfrac{1}{2}\sqrt{10} - (1-\tfrac{1}{2}\sqrt{10}) = \sqrt{10}$

46.

a) Geplot op domein $[0,3\pi]$ zien we 6 hele periodes:

Periode = $\tfrac{1}{2}\pi \Rightarrow c=\dfrac{2\pi}{\tfrac{1}{2}\pi}=4$

Max = 2 en Min = 0 derhalve Ev.stand: $y=1 \Rightarrow a=1$ Amplitude = 1 $\Rightarrow b=1$

Beginpunt bij $x_{\max} - \tfrac{1}{4}\,periode = 0-\tfrac{1}{8}\pi = -\tfrac{1}{8}\pi = d$

$$h(x)=1+\sin 4(x+\tfrac{1}{8}\pi)$$

b) $h'(x) = -4\cdot\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot 2 = -8\cdot\sin 2x\cdot\cos 2x$

$h'(\tfrac{2}{3}\pi) = -8\cdot\sin\tfrac{4}{3}\pi\cdot\cos\tfrac{4}{3}\pi = -8\cdot-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot-\tfrac{1}{2} = -2\sqrt{3}$

47.

a) $(x^2+3)\cdot x^{2\frac{1}{2}} = x^{4\frac{1}{2}}+3\cdot x^{2\frac{1}{2}}$

$afg = 4\tfrac{1}{2}\cdot x^{3\frac{1}{2}}+7\tfrac{1}{2}\cdot x^{1\frac{1}{2}}$

$PRIM = \frac{1}{5\frac{1}{2}}\cdot x^{5\frac{1}{2}}+\frac{3}{3\frac{1}{2}}\cdot x^{3\frac{1}{2}} = \tfrac{2}{11}\cdot x^{5\frac{1}{2}}+\tfrac{6}{7}\cdot x^{3\frac{1}{2}}$

b) $afg = 18\cdot(3x+4)^{17}\cdot 3 = 54\cdot(3x+4)^{17}$

$PRIM = \tfrac{1}{19}(3x+4)^{19}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{57}(3x+4)^{19}$

c) $afg = 3^{2x+5}\cdot\ln 3\cdot 2 = 3^{2x+5}\cdot 2\cdot\ln 3$

$PRIM = 3^{2x+5}\cdot\tfrac{1}{\ln 3}\cdot\tfrac{1}{2} = 3^{2x+5}\cdot\tfrac{1}{2\ln 3}$

d) $\dfrac{4x^5 - x + 7}{2x^2} = 2x^3 - \dfrac{1}{2x} + \dfrac{7}{2x^2} = 2x^3 - \dfrac{1}{2} \cdot x^{-1} + \dfrac{7}{2} \cdot x^{-2}$

$$afg = 6x^2 + \frac{1}{2} \cdot x^{-2} - 7 \cdot x^{-3} = 6x^2 + \frac{1}{2x^2} - \frac{7}{x^3}$$

$$PRIM = \tfrac{2}{4} x^4 - \tfrac{1}{2} \cdot \ln|x| - \tfrac{7}{2} \cdot x^{-1} = \tfrac{1}{2} x^4 - \tfrac{1}{2} \cdot \ln|x| - \frac{7}{2x}$$

e) $afg = -3\sin(2x+\pi) \cdot 2 - 4\cos(\pi - x) \cdot -1 = -6\sin(2x+\pi) + 4\cos(\pi - x)$

$PRIM = 3\sin(2x+\pi) \cdot \tfrac{1}{2} + 4\cos(\pi - x) \cdot \tfrac{1}{-1} = \tfrac{3}{2}\sin(2x+\pi) - 4\cos(\pi - x)$

f) $\dfrac{1}{(3x-5)^4} = (3x-5)^{-4}$ $\qquad afg = -4 \cdot (3x-5)^{-5} \cdot 3 = -\dfrac{12}{(3x-5)^5}$

$$PRIM = \frac{1}{-3} \cdot (3x-5)^{-3} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{9 \cdot (3x-5)^3}$$

g)

$$afg = \frac{2 \cdot (3-x^2)^3 - 2x \cdot 3 \cdot (3-x^2)^2 \cdot -2x}{(3-x^2)^6} = \frac{2 \cdot (3-x^2) - 2x \cdot 3 \cdot -2x}{(3-x^2)^4}$$

$$= \frac{6 - 2x^2 + 12x^2}{(3-x^2)^4} = \frac{10x^2 + 6}{(3-x^2)^4}$$

$$\frac{2x}{(3-x^2)^3} = 2x \cdot (3-x^2)^{-3} = 2x \cdot t^{-3}$$

Meestal kunnen we kettingfuncties niet primitiveren als de nadifferentieerfactor een *x* bevat! Hier hebben we echter ‘geluk’: in de functie staat de nadifferentieerfactor al !!! (op een ‘min’ na)

Dus de primitieve is op een constante na gelijk aan: t^{-2} ……nog even passend maken:

$$PRIM = -\tfrac{1}{-2} \cdot (3-x^2)^{-2} = \tfrac{1}{2} \cdot (3-x^2)^{-2} = \frac{1}{2 \cdot (3-x^2)^2}$$

h) $afg = \dfrac{0 \cdot 2x\ln x - 7 \cdot (2 \cdot \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x})}{(2x\ln x)^2} = \dfrac{-7 \cdot (2 \cdot \ln x + 2)}{(2x \ln x)^2} = \dfrac{-14 \cdot \ln x - 14}{4x^2 \cdot \ln^2 x}$

$\dfrac{7}{2} \cdot \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\ln x} = \dfrac{7}{2} \cdot \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{t}$ ook hier ontdek je in de functie de nadifferentieerfactor van *t*

dus de primitieve is op een constante na gelijk aan $\ln|t|$ …..

$$PRIM = \tfrac{7}{2} \cdot \ln|\ln x|$$

i) $afg = 12\sin^3(2x) \cdot \cos(2x) \cdot 2 \cdot \cos(2x) + 3\sin^4(2x) \cdot -\sin(2x) \cdot 2$

$$= 24\sin^3(2x) \cdot \cos^2(2x) - 6\sin^5(2x)$$

$$= 6\sin^3(2x) \cdot (4\cos^2(2x) - \sin^2(2x))$$

$$= 6\sin^3(2x) \cdot (2\cos(2x) + \sin(2x)) \cdot (2\cos(2x) - \sin(2x))$$

$3\sin^4(2x)\cdot\cos(2x)=3t^4\cdot\cos(2x)$ en weer herken je t' in de functie…..
dus de primitieve is op een constante na gelijk aan t^5 …..

$$PRIM=\tfrac{3}{5}\sin^5(2x)\cdot\tfrac{1}{2}=\tfrac{3}{10}\sin^5(2x)$$

j)

$$afg=\frac{3\cdot\sqrt{3x+2}-(3x+5)\cdot\frac{1}{2\sqrt{3x+2}}\cdot 3}{3x+2}=\frac{6\cdot(3x+2)-(3x+5)\cdot 3}{(3x+2)\cdot 2\cdot\sqrt{3x+2}}=\frac{18x+12-9x-15}{(3x+2)\cdot 2\cdot\sqrt{3x+2}}=\frac{9x-3}{2\cdot(3x+2)^{1\frac{1}{2}}}$$

Slim breuksplitsen geeft hier de uitkomst om te kunnen primitiveren:

$$\frac{3x+5}{\sqrt{3x+2}}=\frac{3x+2+3}{\sqrt{3x+2}}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{3x+2}\right)^2+3}{\sqrt{3x+2}}=\sqrt{3x+2}+\frac{3}{\sqrt{3x+2}}=(3x+2)^{\frac{1}{2}}+3\cdot(3x+2)^{-\frac{1}{2}}$$

Het primitiveren zelf is inmiddels routine……

$$PRIM=\frac{1}{1\frac{1}{2}}\cdot(3x+2)^{1\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot(3x+2)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}\cdot(3x+2)^{1\frac{1}{2}}+2\cdot(3x+2)^{\frac{1}{2}}$$

als je wil, kun je zelfs nog een factor buiten haakjes zetten; met iets eenvoudigs tussen haakjes!!

$$=\frac{2}{9}\cdot(3x+2)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(3x+2+9\right)=\tfrac{2}{9}\cdot(3x+11)\cdot\sqrt{3x+2}$$

48.

a)
$$f(x)=\frac{x^5-16x^3}{x+4}=\frac{x^4(x+4)-4x^4-16x^3}{x+4}=\frac{x^4(x+4)-4x^3(x+4)}{x+4}$$
$$=x^4-4x^3 \text{ mits } x\neq -4$$
teller = 0 en noemer = 0 voor x = -4
Dus een perforatie bij x = -4 met y-coördinaat = $(-4)^4 - 4\cdot(-4)^3 = 512$
Dus coördinaten (-4, 512)

b) -27 is een minimum

c) (0,0) en (2,-16)