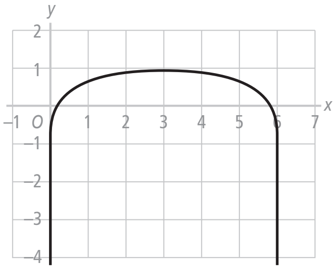
Blok 4 - Vaardigheden

bladzijde 238

1a $\log(6-x)+\log x=0 \Rightarrow \log(6-x)x=0 \Rightarrow (6-x)x=1 \Rightarrow 6x-x^2=1 \Rightarrow$
$x^2-6x+1=0 \Rightarrow$
$x=\dfrac{6-\sqrt{32}}{2}=3-2\sqrt{2}$ of $x=\dfrac{6+\sqrt{32}}{2}=3+2\sqrt{2}$

b



De symmetrie-as is $x=3$.

c $f(3-p)=\log(6-(3-p))+\log(3-p)=\log(3+p)+\log(3-p)$

$\log(3+p)(3-p)=\log(9-p^2)$

$f(3+p)=\log(6-(3+p))+\log(3+p)=\log(3-p)+\log(3+p)$

$\log(3-p)(3+p)=\log(9-p^2)$

d Het maximum is $f(3)=\log 3+\log 3=\log 9$

2a $f(-2-p)=(-2-p)-1+\dfrac{1}{2(-2-p)+4}=-3-p+\dfrac{1}{-2p}=-3-p-\dfrac{1}{2p}$

b $f(-2+p)=(-2+p)-1+\dfrac{1}{2(-2+p)+4}=-3+p+\dfrac{1}{2p}$

c $\dfrac{f(-2-p)+f(-2+p)}{2}=\dfrac{\left(-3-p-\dfrac{1}{2p}\right)+\left(-3+p+\dfrac{1}{2p}\right)}{2}=\dfrac{-6}{2}=-3$

3a $\dfrac{f(0-p)+f(0+p)}{2}=\dfrac{\left(2(-p)^3-\dfrac{4}{(-p)}+2p^3-\dfrac{4}{p}\right)}{2}=\dfrac{0}{2}=0$ dus puntsymmetrisch in $(0,0)$

b $f(0-p)=2(-p)^4-3(-p)^2+1=2p^4-3p^2+1=f(0+p)$ dus lijnsymmetrisch in $x=0$

c $f(0-p)=2^{-p}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-p}=\left(2^{-1}\right)^{p}+\left(2^{-1}\right)^{-p}=\left(\frac{1}{2}\right)^{p}+2^{p}=f(0+p)$ dus lijnsymmetrisch in $x=0$

d $f(0-p)={}^2\log\left((-p)^2+1\right)={}^2\log\left(p^2+1\right)=f(0+p)$ dus lijnsymmetrisch in $x=0$
Denk eraan dat je de functie op de grafische rekenmachine in moet voeren als
$y=\log\left(x^2+1\right):\log 2$.

bladzijde 239

4a $f_6(x)=x^3+6x^2+9x+2$
$f_6'(x)=3x^2+12x+9=0$
$x^2+4x+3=0$
$(x+1)(x+3)=0$
$x=-1$ of $x=3$
$A(-1,-2)$ en $B(-3,2)$

b $\dfrac{f(-2-p)+f(-2+p)}{2}=$

$$\frac{\left((-2-p)^3+6(-2-p)+9(-2-p)+2\right)+\left((-2+p)^2+6(-2+p)^2+9(-2+p)+2\right)}{2}=0$$

dus puntsymmetrisch in $M(-2,0)$

c $f_a{}'(x)=3x^2+2ax+9$
$f_a{}''(x)=6x+2a=0$ als $x=-\frac{1}{3}a$
$f\left(-\frac{1}{3}a\right)=\left(-\frac{1}{3}a\right)^3+a\left(-\frac{1}{3}a\right)^2+9\left(-\frac{1}{3}a\right)+2=\frac{2}{27}a^3-3a+2$ dus $C\left(-\frac{1}{3}a,\ \frac{2}{27}a^3-3a+2\right)$

d $\dfrac{f\left(-\frac{1}{3}a-p\right)+f\left(-\frac{1}{3}a+p\right)}{2}=\frac{2}{27}a^3-3a+2$

5a $f(0-p)=\sqrt{18-2(-p)^2}=\sqrt{18-2p^2}=f(0+p)$ dus lijnsymmetrisch in $x=0$

b $\dfrac{f(-3-p)+f(-3+p)}{2}=\dfrac{\dfrac{8-2(-3-p)}{3+(-3-p)}+\dfrac{8-2(-3+p)}{3+(-3+p)}}{2}=\dfrac{\dfrac{14+2p}{-p}+\dfrac{14-2p}{p}}{2}=$

$\dfrac{\dfrac{-14-2p+14-2p}{p}}{2}=\dfrac{\dfrac{-4p}{p}}{2}=\dfrac{-4}{2}=-2$ dus puntsymmetrisch in $(-3,-2)$

c $f(0-p)=(-p)^4-4(-p)^2+2=p^4-4p^2+2=f(0+p)$ dus lijnsymmetrisch in $x=0$

d $f(2-p)={}^3\log\left((2-p)^2-4(2-p)+7\right)={}^3\log\left(p^2+3\right)$ en
$f(2+p)={}^3\log\left((2+p)^2-4(2+p)+7\right)={}^3\log\left(p^2+3\right)$ dus lijnsymmetrisch in $x=2$

e $f(-1-p)=2^{(-1-p)^2+2(-1-p)}=2^{p^2-1}$ en $f(-1+p)=2^{(-1+p)^2+2(-1+p)}=2^{p^2-1}$

dus lijnsymmetrisch in $x=-1$

f $f(-2-p)=\sqrt{(-2-p)^2+4(-2-p)}=\sqrt{p^2-4}$ en
$f(-2+p)=\sqrt{(-2+p)^2+4(-2+p)}=\sqrt{p^2-4}$ dus lijnsymmetrisch in $x=-2$

6a Met de grafische rekenmachine is eenvoudig te berekenen dat de andere top $(-2,-6)$ is.

b De grafiek is puntsymmetrisch in punt $(-1,-4)$.

c $\dfrac{g(-1-p)+g(-1+p)}{2}=\dfrac{\left(\dfrac{(-1-p)^2-2(-1-p)-2}{-1-p+1}\right)+\left(\dfrac{(-1+p)^2-2(-1+p)-2}{-1+p+1}\right)}{2}$

$=\dfrac{\left(\dfrac{p^2+4p+1}{-p}\right)+\left(\dfrac{p^2-4p+1}{p}\right)}{2}=\dfrac{-p-4-\dfrac{1}{p}+p-4+\dfrac{1}{p}}{2}=\dfrac{-8}{2}=-4$

d Punt $\left(-\frac{1}{2},-1\frac{1}{2}\right)$ spiegelen in $(-1,-4)$ geeft punt $\left(-1\frac{1}{2},-6\frac{1}{2}\right)$.

7a $h(0-p) = \frac{4\cdot 3^{-p}}{1+9^{-p}}\cdot\frac{3^{2p}}{3^{2p}} = \frac{4\cdot 3^{p}}{3^{2p}+3^{0}} = \frac{4\cdot 3^{p}}{3^{2p}+1} = \frac{4\cdot 3^{p}}{9^{p}+1} = h(0+p)$

b $y=0$ is de horizontale asymptoot

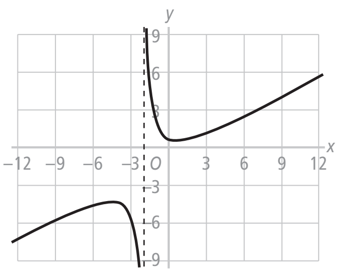
c $\frac{4\cdot 3^{x}}{1+9^{x}} = 3^{-x} \Rightarrow \frac{4\cdot 3^{x}}{1+9^{x}} = \frac{1}{3^{x}} \Rightarrow 4\cdot 3^{x}\cdot 3^{x} = 1+9^{x} \Rightarrow 4\cdot 3^{2x} = 1+3^{2x} \Rightarrow$

$3\cdot 3^{2x} = 1 \Rightarrow 3^{1+2x} = 3^{0} \Rightarrow 1+2x=0 \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$
$y = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow S\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$

d $k(x) < h(x)$ op interval $\left\langle -\frac{1}{2}, \rightarrow\right\rangle$

bladzijde 240

8a



De asymptoten zijn $y = \frac{1}{2}x - 1$ en $x = -2$.

b $\frac{1}{2}x - 1 + \frac{3}{x+2} = 0 \Rightarrow \frac{3}{x+2} = 1 - \frac{1}{2}x \Rightarrow \left(1-\frac{1}{2}x\right)(x+2) = 3 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 2 = 3 \Rightarrow$
$-\frac{1}{2}x^2 = 1 \Rightarrow$

$x^2 = -2$ dus geen oplossingen.

c $g(x) = \frac{1}{2}(x-2) - 1 + \frac{3}{(x-2)+2} + 2 = \frac{1}{2}x - 1 - 1 + \frac{3}{x} + 2 = \frac{1}{2}x + \frac{3}{x}$

d $\frac{g(-p)+g(p)}{2} = \frac{-\frac{1}{2}p - \frac{3}{p} + \frac{1}{2}p + \frac{3}{p}}{2} = 0$ dus puntsymmetrisch in $(0, 0)$.

e Door punt $(0,0)$ twee naar links en twee naar beneden te schuiven krijg je het punt $(-2,-2)$.

9a $y=0$ en $y=6$ zijn de horizontale asymptoten.

b $\frac{f(-p)+f(p)}{2} = \frac{\frac{6}{1+0{,}5^{-p}} + \frac{6}{1+0{,}5^{p}}}{2} = \frac{\frac{6\cdot 0{,}5^{p}}{\left(1+0{,}5^{-p}\right)0{,}5^{p}} + \frac{6}{1+0{,}5^{p}}}{2} = \frac{\frac{6\left(1+0{,}5^{p}\right)}{\left(1+0{,}5^{p}\right)}}{2} = \frac{6}{2} = 3$

c De gemiddelde hoogte op interval $[-a, a]$ is 3 dus de oppervlakte is $3\times 2a = 6a$.

10a De grafiek van $g(x) = \sin x$ is lijnsymmetrisch in $x = \frac{1}{2}\pi$.
b De grafiek van $h(x) = \cos x$ is puntsymmetrisch in $\left(\frac{1}{2}\pi, 0\right)$.

11a $g(-p) = \frac{2\cos(-p)}{3+2\cos(-p)} = \frac{2\cos p}{3+2\cos p} = g(p)$

b $x = \pi$ en $x = 2\pi$

c $g(x)=0$ als $\cos x=0$ dus $x=\frac{1}{2}\pi$ en $x=1\frac{1}{2}\pi$.
$g(x)<0$ op $\langle \frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi\rangle$

d $g'(x)=\dfrac{-2\sin x(3+2\cos x)-(-2\sin x)\cdot 2\cos x}{(3+2\cos x)^2}=\dfrac{-6\sin x}{(3+2\cos x)^2}=0$ als $\sin x=0$ dus
$x=0$ of $x=\pi$ of $x=2\pi$
Maximum $g(0)=g(2\pi)=\frac{2}{5}$
Minimum $g(\pi)=-2$

bladzijde 241

12a $h(\frac{1}{2}\pi-p)=\cos 2(\frac{1}{2}\pi-p)-2\sin(\frac{1}{2}\pi-p)+1=\cos(\pi-2p)-2\sin(\frac{1}{2}\pi+p)+1$
$=-\cos(-2p)-2\sin(\frac{1}{2}\pi+p)+1=-\cos 2p-2\sin(\frac{1}{2}\pi+p)+1$
$h(\frac{1}{2}\pi+p)=\cos 2(\frac{1}{2}\pi+p)-2\sin(\frac{1}{2}\pi+p)+1=\cos(\pi+2p)-2\sin(\frac{1}{2}\pi+p)+1=$
$-\cos 2p-2\sin(\frac{1}{2}\pi+p)+1$

b $x=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{3}\pi=\frac{1}{6}\pi$ is een oplossing dus $x=\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{3}\pi=\frac{5}{6}\pi$ is de andere oplossing

c $x=-\frac{1}{2}\pi+\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{6}\pi$ is een oplossing dus $x=-\frac{1}{2}\pi-\frac{2}{3}\pi=-1\frac{1}{6}\pi$ is de andere oplossing

13a De grafiek van f is puntsymmetrisch in
$(-\pi, 3), (-\frac{3}{4}\pi, 3), (-\frac{1}{2}\pi, 3), (-\frac{1}{4}\pi, 3), (0, 3), (\frac{1}{4}\pi, 3), (\frac{1}{2}\pi, 3), (\frac{3}{4}\pi, 3)$ en $(\pi, 3)$.

b De symmetrieassen zijn $x=-\frac{7}{8}\pi$, $x=-\frac{5}{8}\pi$, $x=\frac{-3}{8}\pi$, $x=-\frac{1}{8}\pi$, $x=\frac{1}{8}\pi$, $x=\frac{3}{8}\pi$, $x=\frac{5}{8}\pi$
en $x=\frac{7}{8}\pi$.

c $\int_{-\pi}^{\pi}(3+2\sin 4t)\,dt=\left[3t-\frac{1}{2}\cos 4t\right]_{-\pi}^{\pi}=(3\pi-\frac{1}{2}\cos 4\pi)-(-3\pi-\frac{1}{2}\cos -4\pi)=$
$(3\pi-\frac{1}{2})-(-3\pi-\frac{1}{2})=6\pi$

d De gemiddelde hoogte op $[-\pi, \pi]$ is exact 3 dus de oppervlakte is $2\pi\times 3=6\pi$.

e Het bereik van g is $[-1, 3]$.

f $g(x)=1-2\sin 4t$

14a Domein $=\langle\leftarrow,-1\rangle\cup\langle -1,1\rangle\cup\langle 1,\rightarrow\rangle$.

b $\dfrac{f(-p)+f(p)}{2}=\dfrac{\dfrac{(-p)^3}{1-(-p)^2}+\dfrac{p^3}{1-p^2}}{2}=\dfrac{\dfrac{-p^3}{1-p^2}+\dfrac{p^3}{1-p^2}}{2}=\dfrac{0}{2}=0$

c De verticale asymptoten zijn $x=1$ en $x=-1$.

d $-x+\dfrac{x}{1-x^2}=\dfrac{-x(1-x^2)}{1-x^2}+\dfrac{x}{1-x^2}=\dfrac{-x+x^3+x}{1-x^2}=\dfrac{x^3}{1-x^2}$

e Voor grote waarden van x nadert $\dfrac{x}{1-x^2}$ naar nul dus nadert $f(x)$ naar $-x$.