Blok 3 - Vaardigheden

bladzijde 178

1a Elke 12 uur wordt een hoeveelheid b vermenigvuldigd met 1,09.
Na 12 uur is er $b\cdot 1{,}09$. Na 1 dag = 2 × 12 = 24 uur is er $(b\cdot 1{,}09)\cdot 1{,}09 = b\cdot 1{,}09^2$
De groeifactor per dag is $1{,}09^2 \approx 1{,}19$

b De groeifactor per dag wordt 7 keer toegepast binnen een week. Dat is
$g = (1{,}09^2)^7 = 1{,}09^{14} \approx 3{,}34$.

c De groeifactor per 8 uur wordt 3 keer toegepast binnen 24 uur. Dat is
$g^3 = 1{,}09^2 \to g = 1{,}09^{\frac{2}{3}} \approx 1{,}06$

d De groeifactor per 3 uur wordt 4 keer toegepast binnen 12 uur. Dat is
$g^4 = 1{,}09 \to g = 1{,}09^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}02$

2a Ja, want $2^t\cdot 4^t = 2^t\cdot(2^2)^t = 2^t\cdot 2^{2t} = 2^{t+2t} = 2^{3t} = (2^3)^t = 8^t$.

b Nee, want $2^{2t} = 2^{t+t} = 2^t\cdot 2^t$ en niet $2^t + 2^t$.

c Ja, want $2^t + 2^t + 2^t + 2^t = 4\cdot 2^t = 2^2\cdot 2^t = 2^{2+t} = 2^{t+2}$.

d Ja, want $8\cdot 4^t = 2^3\cdot(2^2)^t = 2^3\cdot 2^{2t} = 2^{3+2t}$.

e Nee, want $(2^t)^t = 2^{t\cdot t} = 2^{t^2}$ en niet $2^{2t}(=2^{t+t})$.

f Ja, want $\dfrac{1}{2^t} = \dfrac{1^t}{2^t} = \left(\tfrac12\right)^t$

3a
$4^t = \sqrt{2}$
$(2^2)^t = 2^{\frac12}$
$2^{2t} = 2^{\frac12}$
$2t = \tfrac12 \to t = \tfrac14$

b
$3^{t+2} = 9\sqrt{3}$
$3^{t+2} = 3^2\cdot 3^{\frac12} = 3^{2\frac12}$
$t + 2 = 2\tfrac12 \to t = \tfrac12$

c
$(3\sqrt{3})^t = 9^{t+1} \Rightarrow (3\cdot 3^{\frac12})^t = (3^2)^{t+1}$
$(3)^t\cdot(3^{\frac12})^t = (3^2)^t\cdot(3^2)^1$
$3^t\cdot 3^{\frac12 t} = 3^{2t}\cdot 3^2 \Rightarrow 3^{t+\frac12 t} = 3^{2t+2}$
$3^{1\frac12 t} = 3^{2t+2}$
$1\tfrac12 t = 2t + 2 \to -\tfrac12 t = 2 \to t = -4$

d
$8^t = (\tfrac{1}{\sqrt{2}})^{2-t}$
$(2^3)^t = \left(\dfrac{1}{2^{\frac12}}\right)^{2-t} = (2^{-\frac12})^{2-t} = (2^{-\frac12})^2\cdot(2^{-\frac12})^{-t}$
$2^{3t} = 2^{-1}\cdot 2^{\frac12 t} = 2^{-1+\frac12 t}$
$3t = -1 + \tfrac12 t \to 6t = -2 + t \to 5t = -2 \to t = -\tfrac25$

e
$10^{-2t} = 1000 = 10^3$
$-2t = 3 \to t = -\tfrac32 = -1\tfrac12$

f
$5^{2t-1} = 0{,}008 = \tfrac{8}{1000} = \tfrac{1}{125} = \dfrac{1}{5^3} = 5^{-3}$
$2t - 1 = -3 \to 2t = -2 \to t = -1$

bladzijde 179

4a $\tfrac{1}{64} = \dfrac{1}{4\cdot 16} = \dfrac{1}{4\cdot 4^2} = \dfrac{1}{4^3} = 4^{-3}$

b $\tfrac18 = \tfrac{2}{16} = \dfrac{\sqrt{4}}{4^2} = 4^{\frac12}\cdot 4^{-2} = 4^{-1\frac12}$

c $32 = 2\cdot 16 = \sqrt{4}\cdot 4^2 = 4^{\frac12}\cdot 4^2 = 4^{2\frac12}$

d $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{4^2} = 4^{\frac23}$

5a $f(t) = 4^{1-\frac12 t} = 4^1\cdot 4^{-\frac12 t} = 4\cdot 4^{-\frac12 t} = 4\cdot(4^{-\frac12})^t = 4\cdot(\dfrac{1}{\sqrt{4}})^t = 4\cdot(\tfrac12)^t$
Uit een vergelijking met het formuleschema $f(t) = b\cdot g^t$ volgt dat de beginhoeveelheid $b = 4$ en de groeifactor $g = \tfrac12 = 0{,}5$ is.

b $g(t) = 2\cdot(\tfrac12)^{3t-5} = 2\cdot(\tfrac12)^{3t}\cdot(\tfrac12)^{-5} = 2\cdot(\tfrac12)^{-5}\cdot\left((\tfrac12)^3\right)^t = 2\cdot(2^{-1})^{-5}\cdot\left((2^{-1})^3\right)^t = 2\cdot 2^5\cdot(2^{-3})^t =$
$2^6\cdot(2^{-3})^t = 64\cdot(\tfrac{1}{2^3})^t = 64\cdot(\tfrac18)^t$
De beginhoeveelheid $b = 64$ en de groeifactor $g = \tfrac18 = 0{,}125$.

c $h(t) = 5\cdot 3^{t+1} = 5\cdot 3^t\cdot 3 = 15\cdot 3^t$
De beginhoeveelheid $b = 15$ en de groeifactor $g = 3$.

d $k(t) = \dfrac{6}{2^{t-2}} = 6 \cdot 2^{-(t-2)} = 6 \cdot 2^{-t+2} = 6 \cdot 2^{-t} \cdot 2^2 = 6 \cdot 2^2 \cdot (2^{-1})^t = 24 \cdot (\frac{1}{2})^t$
De beginhoeveelheid $b = 24$ en de groeifactor $g = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

6a Voor het snijpunt met de y-as geldt $t = 0$. Invullen in de functie geeft
$f(0) = 5^2 = 25$. De coördinaten zijn dus $(0, 25)$.

b $f(t) = 5^{2-\frac{1}{2}t} = 5^2 \cdot 5^{-\frac{1}{2}t} = 5^2 \cdot (5^{-\frac{1}{2}})^t = 25 \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^t$
Uit een vergelijking met het formuleschema $f(t) = b \cdot g^t$ volgt dat de beginhoeveelheid $b = 25$ en de groeifactor $g = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

c $f(t) = \frac{1}{25}$
$5^{2-\frac{1}{2}t} = \frac{1}{25}$
$5^{2-\frac{1}{2}t} = \dfrac{1}{5^2} = 5^{-2}$
$2 - \frac{1}{2}t = -2$
$4 - t = -4 \rightarrow t = 8$

7a Voor het snijpunt geldt $f(t) = g(t)$. Oplossen geeft
$9 \cdot 3^{1-t} = \frac{1}{3} \cdot 9^t$
$3^2 \cdot 3^{1-t} = 3^{-1} \cdot (3^2)^t = 3^{-1} \cdot 3^{2t}$
$3^{2+1-t} = 3^{-1+2t}$
$3 - t = -1 + 2t \rightarrow 3t = 4 \rightarrow t = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$
De y-waarde hierbij is $9 \cdot 3^{1-1\frac{1}{3}} = 3^2 \cdot 3^{-\frac{1}{3}} = 3^{1\frac{2}{3}} = 3 \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 3\sqrt[3]{3^2} = 3\sqrt[3]{9}$
Het snijpunt is $(1\frac{1}{3}, 3\sqrt[3]{9})$.

b $h(t) = f(t) \cdot g(t) = 9 \cdot 3^{1-t} \cdot \frac{1}{3} \cdot 9^t = 3^2 \cdot 3^{1-t} \cdot 3^{-1} \cdot (3^2)^t = 3^2 \cdot 3^{1-t} \cdot 3^{-1} \cdot 3^{2t} = 3^{2+1-t-1+2t} = 3^{2+t} =$
$3^2 \cdot 3^t = 9 \cdot 3^t$
Hierbij hoort de beginhoeveelheid $b = 9$ en de groeifactor $g = 3$.

8a Voor $t = 0$ is de y-waarde $f(0) = 12 \cdot 1{,}5^0 = 12 \cdot 1 = 12$. De functie f moet dus 12 naar beneden geschoven worden. Functie g wordt dus
$g(t) = f(t) - f(0) = 12 \cdot 1{,}5^t - 12 = 12(1{,}5^t - 1)$.

b Voor een verschuiving van twee eenheden naar links wordt t vervangen door $t + 2$.
Functie h wordt dan $h(t) = 12 \cdot 1{,}5^{t+2} = 12 \cdot 1{,}5^t \cdot 1{,}5^2 = 27 \cdot 1{,}5^t$.
$h(0) = 27 \cdot 1{,}5^0 = 27 \cdot 1 = 27$

c Voor een spiegeling in de y-as wordt t vervangen door $-t$. Functie j wordt dan
$j(t) = 12 \cdot 1{,}5^{-t} = 12 \cdot (1{,}5^{-1})^t = 12 \cdot ((\frac{3}{2})^{-1})^t = 12 \cdot (\frac{2}{3})^t$.

bladzijde 180

9a 18 600 000 = 1,86 × 10 000 000 = 1,86 × 10^7
b 23 000 000 000 = 2,3 × 10 000 000 000 = 2,3 × 10^{10}
c 2450 = 2,450 × 1000 = 2,450 × 10^3
d 0,023 = 2,3 : 100 = 2,3 × 10^{-2}
e 0,000 000 931 = 9,31 : 10 000 000 = 9,31 × 10^{-7}
f 0,000 000 000 056 = 5,6 : 100 000 000 000 = 5,6 × 10^{-11}

10a 100 ligt boven $81 = 9 \times 9 = 3^2 \times 3^2 = 3^4$ en is kleiner dan $3 \times 81 = 3^5$.
Bij ${}^3\log 100$ is de uitkomst de macht waartoe 3 verheven moet worden om 100 te geven.
100 ligt tussen 81 en 3×81, dus ${}^3\log 100$ ligt tussen 4 en 5.

b 175 ligt tussen $128 = 2^7$ en $2 \times 128 = 256 = 2^8$, dus ${}^2\log 175$ ligt tussen 7 en 8.

c 3 ligt tussen $1 = 4^0$ en $4 = 4^1$, dus ${}^4\log 3$ ligt tussen 0 en 1.

d $0{,}1 = \frac{1}{10}$ ligt tussen $\frac{1}{8} = (\frac{1}{2})^3$ en $\frac{1}{16} = (\frac{1}{2})^4$, dus ${}^{\frac{1}{2}}\log 0{,}1$ ligt tussen 3 en 4.

11 Het grondtal g is het grondtal dat geldig is bij exponentiële functies. Dat zijn alle positieve getallen behalve 0 en 1, dus $0 < g < 1$.
Uit $p = g^q$ volgt ${}^g\log p = q$. De exponentiële functie $p = g^q$ is altijd positief, dus $p > 0$. De logaritme van een negatief getal of 0 berekenen kan dus niet. In het theorievlak zijn a en b de getallen waarvan je de logaritme berekent. Er moet dus gelden $a > 0$ en $b > 0$.

12a $3 \cdot {}^3\log 2 + {}^3\log 4 = {}^3\log 2^3 + {}^3\log 2^2 = {}^3\log(2^3 \cdot 2^2) = {}^3\log 2^5 = {}^3\log 32$

b ${}^7\log 126 + 2 \cdot {}^7\log 3 - {}^7\log 81 = {}^7\log 126 + {}^7\log 3^2 - {}^7\log 81 = {}^7\log \dfrac{126 \cdot 9}{81} = {}^7\log \dfrac{126}{9} = {}^7\log 14$

c $3 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 4 - \log 64 = \log 2^3 + \log 4^2 - \log 64 = \log 8 + \log 16 - \log 64 = \log \dfrac{8 \cdot 16}{64} = \log 2$

d $3 \cdot \log 2 + 3 \cdot \log 5 - \frac{1}{2} \cdot \log 25 = \log 2^3 + \log 5^3 - \log 25^{\frac{1}{2}} = \log 8 + \log 125 - \log \sqrt{25} = \log \dfrac{8 \cdot 125}{5} =$

$\log 200$

13a
${}^2\log 3 + {}^2\log x = 2$
${}^2\log 3x = 2$
$3x = 2^2 = 4 \to x = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

b
$2 - {}^3\log(2x+1) = 3$
$-{}^3\log(2x+1) = 3 - 2 = 1$
${}^3\log(2x+1) = -1$
$2x + 1 = 3^{-1} = \frac{1}{3}$
$6x + 3 = 1 \to 6x = -2 \to x = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$

c
${}^3\log x - {}^3\log(2x+1) = -1$
${}^3\log \dfrac{x}{2x+1} = -1$
$\dfrac{x}{2x+1} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$
$\dfrac{3x}{2x+1} = 1 \to 3x = 2x + 1 \to x = 1$

d
${}^2\log(4+x) + {}^2\log(4-x) = 3$
${}^2\log(4+x)(4-x) = 3$
${}^2\log(16 - x^2) = 3$
$16 - x^2 = 2^3 = 8$
$x^2 = 8 \to x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ of $x = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$

bladzijde 181

14a Het domein van ${}^2\log x$ is $\langle 0, \to \rangle$, dus voor f moet $3x - 4 > 0$ zijn.
Dat geeft voor f het domein $x > 1\frac{1}{3}$.
Voor g moet $x - 1 > 0$ zijn, dus het domein van g is $x > 1$.

b Voor het snijpunt geldt $f(x) = g(x)$. Oplossen geeft
${}^2\log(3x-4) = {}^2\log(x-1) + 1$
${}^2\log(3x-4) - {}^2\log(x-1) = 1$

${}^2\log \dfrac{3x-4}{x-1} = 1$

$\dfrac{3x-4}{x-1} = 2^1 = 2$

$3x - 4 = 2(x - 1)$
$3x - 4 = 2x - 2 \rightarrow x = 2$
Hierbij hoort y-waarde $f(2) = {}^2\log(2 \cdot 3 - 4) = {}^2\log 2 = 1$.
De coördinaten van het snijpunt zijn dus (2, 1).

15a $2^x = 3$
$x = {}^2\log 3$

b $3 \cdot 5^x = 4$
$5^x = \frac{4}{3} \rightarrow x = {}^5\log\frac{4}{3} = {}^5\log 1\frac{1}{3}$

c $1 + 2 \cdot 3^{x+1} = 5$
$2 \cdot 3^{x+1} = 4 \rightarrow 3^{x+1} = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow x + 1 = {}^3\log 2 \rightarrow$
$x = -1 + {}^3\log 2 = -{}^3\log 3 + {}^3\log 2 = {}^3\log\frac{2}{3}$

d $3^x + 3^{x+1} = 8$
$3^x + 3^x \cdot 3 = 8$
$3^x(1 + 3) = 8$
$4 \cdot 3^x = 8 \rightarrow 3^x = \frac{8}{4} = 2 \rightarrow x = {}^3\log 2$

e $\dfrac{180}{1 + 2 \cdot 3^x} = 12$
$1 + 2 \cdot 3^x = \dfrac{180}{12} = 15 \rightarrow 2 \cdot 3^x = 14 \rightarrow$
$3^x = 7 \rightarrow x = {}^3\log 7$

f $(6^x - 8)^2 = 4$
$6^x - 8 = \sqrt{4} = 2$ of $6^x - 8 = -\sqrt{4} = -2$
$6^x = 10$ of $6^x = 6$
$x = {}^6\log 10$ of $x = 1$

16a Voor f geldt als eis $x^2 - 2x > 0 \rightarrow x(x - 2) = 0$ voor $x = 0$ of $x = 2$. De grafiek van $x^2 - 2x$ is een dalparabool, dus tussen $x = 0$ en $x = 2$ is de waarde negatief en niet toegestaan. Daarmee wordt het domein van f de intervallen $\langle\leftarrow, 0\rangle$ en $\langle 2, \rightarrow\rangle$.
Voor g geldt als eis $6 - x > 0 \rightarrow 6 - x = 0 \rightarrow x = 6$. De ongelijkheid geldt voor $x < 6$ dus het domein van g is $\langle\leftarrow, 6\rangle$.

b Los op: $f(x) = {}^2\log(x^2 - 2x) = 0$
${}^2\log(x^2 - 2x) = {}^2\log 1$
$x^2 - 2x = 1 \rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow$ met de *abc*-formule volgt

$$x = \frac{2 + \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1}}{2 \cdot 1} = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2} \text{ of } x = 1 - \sqrt{2}$$

c Los op: $f(x) = g(x)$
${}^2\log(x^2 - 2x) = {}^2\log(6 - x)$
$x^2 - 2x = 6 - x$
$x^2 - x - 6 = 0$
$(x - 3)(x + 2) = 0$
$x = 3$ of $x = -2$
De y-waarden zijn $g(3) = {}^2\log(6 - 3) = {}^2\log 3$ en
$g(-2) = {}^2\log(6 + 2) = {}^2\log 8 = {}^2\log 2^3 = 3 \cdot {}^2\log 2 = 3 \cdot 1 = 3$
De exacte coördinaten zijn $(3, {}^2\log 3)$ en $(-2, 3)$.

d Met behulp van de exacte snijpunten en het domein uit opdracht a lees je de oplossing van $f(x) < g(x)$ in de grafiek af.
De oplossing is $\langle -2, 0\rangle$ en $\langle 2, 3\rangle$.

17a $y = 3 \cdot {}^2\log x$
${}^2\log x = \dfrac{y}{3} = \frac{1}{3}y$
$x = 2^{\frac{1}{3}y}$

b $y = 1 + {}^2\log(x - 2)$
$y - 1 = {}^2\log(x - 2)$
$x - 2 = 2^{y-1}$
$x = 2 + 2^{y-1} = 2 + 2^y \cdot 2^{-1} = 2 + \frac{1}{2} \cdot 2^y$

c $y = {}^3\log\frac{x-4}{5}$

$\frac{x-4}{5} = 3^y$

$x - 4 = 5 \cdot 3^y$

$x = 4 + 5 \cdot 3^y$

18a ${}^2\log\frac{12}{\sqrt{2}} = {}^2\log 12 - {}^2\log\sqrt{2} = {}^2\log(4 \cdot 3) - {}^2\log 2^{\frac{1}{2}} = {}^2\log 4 + {}^2\log 3 - \frac{1}{2} \cdot {}^2\log 2 =$

${}^2\log 2^2 + {}^2\log 3 - \frac{1}{2} = 2 \cdot {}^2\log 2 + {}^2\log 3 - \frac{1}{2} = 2 + {}^2\log 3 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} + {}^2\log 3$

b ${}^2\log 3 \cdot {}^3\log 4 \cdot {}^4\log 5 \cdot {}^5\log 2 = \frac{\log 3}{\log 2} \cdot \frac{\log 4}{\log 3} \cdot \frac{\log 5}{\log 4} \cdot \frac{\log 2}{\log 5} = \frac{\log 2}{\log 2} = 1$

c $(1 - {}^9\log 3) \cdot (1 + {}^9\log 3) = 1^2 - {}^9\log 3 \cdot {}^9\log 3 = 1 - {}^9\log\sqrt{9} \cdot {}^9\log\sqrt{9} = 1 - {}^9\log 9^{\frac{1}{2}} \cdot {}^9\log 9^{\frac{1}{2}} =$
$1 - \frac{1}{2} \cdot {}^9\log 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot {}^9\log 9 = 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

19a Voor *f* geldt als eis $\frac{2x-1}{3} > 0 \rightarrow 2x - 1 > 0 \rightarrow 2x > 1 \rightarrow x > \frac{1}{2}$. Het domein van *f* is dus $\langle \frac{1}{2}, \rightarrow \rangle$.

b $f(x) = 2 - {}^3\log\frac{2x-1}{3} = 2 - \left({}^3\log(2x-1) - {}^3\log 3\right) = 2 - \left({}^3\log(2x-1) - 1\right) = 2 - {}^3\log(2x-1) + 1 =$

$3 - {}^3\log(2x-1)$

c $f(x) = 2 - {}^3\log\frac{2x-1}{3} = 2 \cdot 1 - {}^3\log\frac{2x-1}{3} = 2 \cdot {}^3\log 3 - {}^3\log\frac{2x-1}{3} = {}^3\log 3^2 - {}^3\log\frac{2x-1}{3} =$

${}^3\log\frac{3^2}{\left(\frac{2x-1}{3}\right)} = {}^3\log\frac{3^2 \cdot 3}{2x-1} = {}^3\log\frac{27}{2x-1}$

d Los op: $f(x) = 2 - {}^3\log\frac{2x-1}{3} = 0$

${}^3\log\frac{2x-1}{3} = 2$

${}^3\log\frac{2x-1}{3} = {}^3\log 3^2$

$\frac{2x-1}{3} = 3^2 \rightarrow 2x - 1 = 27 \rightarrow 2x = 28 \rightarrow x = 14$

e Met behulp van het nulpunt en het domein uit opdracht a lees je de oplossing van

$f(x) > 0$ in de grafiek af. De oplossing is $\langle \frac{1}{2}, 14 \rangle$.