Le Mésotonique Tempéré de Bach (texte extensif)

Relaté à « Das wohltemperirte Clavier »

Résumé

Les battements d'harmoniques des quintes et tierces majeures de tempéraments historiques bien connus sont analysés.

Il apparait que les battements d'harmoniques pourraient être le facteur réel et déterminant pour les tempéraments baroques, surtout parce que les battements d'harmoniques tiennent une grande importance pour le musicien interprète pour ce qui concerne l'harmonie et les affects musicaux possibles, et pour l'accordeur pour le confort et la qualité de l'accord. D'autre part, il n'est pas toujours clair si les rapports, cents ou commas publiés sont déduits à partir de calculs théoriques ou à partir de résultats concrets obtenus de mesures ou réglages faits au monocorde.

L'importance révélée des caractéristiques des battements apporte des arguments supplémentaires pour l'acceptation de la proposition de Jobin relative au tempérament probable pratiqué par Bach, ou d'alternatives quasi identiques basées sur le calcul de battements.

Une nouvelle hypothèse est proposée concernant les spirales dessinées sur la page de titre du « Clavier bien tempéré » de Jean Sebastien Bach.

Mots clé

Baroque ; bien tempéré ; mésotonique ; intervalle ; comma ; battement ; harmonique ; rapport ; cent ; Bach

Mes plus sincères remerciements à Mr. A Calvet, qui a minutieusement vérifié, amélioré et corrigé la version française de ce texte, non seulement du point de vue linguistique, mais aussi de son point de vue en tant qu'accordeur professionnel.

Symboles utilisés : *Les symboles utilisés dans ce texte sont ceux généralement utilisés dans les publications anglophones :*

- ***Notes :*** *les notes sont nommées selon*
  C4 (=Do3), C#4 (=Do#3), D4 (=Ré3), E*b*4 (=Mib3), E4 (=Mi3), F4 (=Fa3), F#4 (=Fa#3), G4 (=Sol3), G#4 (=Sol#3), Ab4 (=Lab3), A4 (=La3), B*b*4 (Sib3), B4 (=Si3),
  pour l'octave qui contient la note A4*, pour laquelle on a en général :* **~ 415 < A4 < ~ 466 Hz***.*
- ***Nombres décimaux : le point*** *est utilisé comme séparateur entre les nombres entiers et les décimales.*

1 Préambule

Les facteurs communément publiés et dominant les discussions sur les tempéraments musicaux sont probablement les recherches quant aux écarts à pur des intervalles musicaux, mesurés en rapports, cents ou commas.

Et pourtant, les vibratos d'intervalles musicaux produits par leurs battements d'harmoniques sont probablement des facteurs musicaux affectant d'avantage les musiciens interprètes et les accordeurs d'instruments à clavier.

Il faudra donc sans doute accorder plus d'attention à ces caractéristiques : les battements sont indésirables et immédiatement audibles. Les évaluations approximatives des battements d'harmoniques ne nécessitent aucun outil ni calcul. Les mesures d'impuretés des rapports, cents ou commas, d'autre part, ne sont souvent rien de plus que des concepts plutôt abstraits pour de nombreux musiciens, qui ne sont pas directement utiles ou intéressants pour la performance musicale ou la réalisation de l'accord.

Cet article est une tentative pour dire l'importance et estimer l'applicabilité en pratique des battements d'harmoniques pour décrire les tempéraments musicaux, en particulier certains tempéraments baroques.

2 L'accord auditif d'un clavier

Les concepts de base élémentaires des tempéraments musicaux, vus du point de vue du musicien interprète et de l'accordeur d'instruments à clavier, sont discutés dans ce paragraphe.

Il y a bien sûr beaucoup plus à écrire sur ce sujet, voir par exemple: "Le Clavier Bien Obtempéré", A. Calvet, 2020.

Les personnes familiarisées au sujet de l'accord peuvent sauter les paragraphes 2.1, 2.2, 2.3.

2.1 La "Raison" à l'époque baroque

À l'époque baroque, les fractions ou systèmes décimaux n'étaient pas encore couramment appliqués.

De nombreux systèmes différents existaient, souvent basés sur des fractions duodécimales, de la métrologie en vigueur : argent, longueur, poids, temps,... Aujourd'hui encore, ce type de mesures est utilisé dans certains pays, parmi ceux-ci non pas les moins avancés. Les mesures dérivées, comme le volume, la surface ou la vitesse par exemple, sont encore plus complexes.

La physique des sons n'était pas connue en profondeur : il n'était pas encore communément connu ou clair, que les sons musicaux sont périodiques, et consistent en une somme d'ondes sinusoïdales.

Il n'y avait pas de notation décimale standardisée des fractions. Un certain système précoce de notation décimale fut décrit par S. Stevin (1586), et les unités décimales ou l'application de virgules ont probablement été introduites par G. Rheticus (1542), B. Pitiscus (1613) et J. Napier (1614). Le calcul des racines, des valeurs trigonométriques, des logarithmes,... était fait à la main et très laborieux.

Les rapports du tempérament égal (TE) ont été discutés par Zhu Zaiyu (1536 – 1611) et S. Stevin (1548 – 1620). Ce dernier fut probablement le premier scientifique européen à calculer les rapports requis (vers 1605). Il a calculé que les longueurs de corde sur un monocorde devraient être proportionnelles aux chiffres affichés au tableau 1 (qui n'a pas encore de décimales !). La vérification des chiffres publiés démontre que quelques corrections mineures sont possibles.

C	C#	D	E*b*	E	F	F#	G	G#	A	B*b*	B	c
10000	9438	8908	8409	7936	7491	7071	6674	6298	5944	5611	5296	5000
	9439	8909		7937	7492			6300		5612	5297	

Tableau 1 : Proportions de longueur de cordes requises sur un monocorde, selon S.Stevin, pour une échelle 12TE (+ corrections sur la deuxième rangée)

2.2 **Intervalles purs** (dénués de battements)

La musique se compose de sons périodiques ordonnés.

La pureté des sons musicaux coïncidents est généralement souhaitée. Les sons coïncidents sont considérés comme purs, si aucun battement ne se produit. Des battements peuvent se produire en raison de l'interférence des harmoniques de différents sons périodiques.

Tout son périodique peut être simulé mathématiquement par une fonction périodique $F(t)$.

J. Fourier (1768 – 1830) a développé la preuve mathématique que toute fonction périodique $F(t)$ consiste en une somme d'ondes sinusoïdales, – les harmoniques –, ***les fréquences des ondes sinusoïdales étant des multiples ENTIERS d'une fréquence de base***.

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \sin(2\pi n f t) + b_n \cos(2\pi n f t)] \quad \text{avec} \quad n = \mathbb{N} \; ; \quad \text{et avec :}$$

$$a_n = 2f \int_{-1/(2f)}^{1/(2f)} F\,(t) \sin(2\pi n f t)\, dt \quad \text{et} \quad b_n = 2f \int_{-1/(2f)}^{1/(2f)} F\,(t) \cos(2\pi n f t)\, dt$$

La moindre impureté d'un intervalle musical produit un battement, en raison de ***la confrontation des harmoniques communs***, de même fréquences très légèrement différentes. La somme de deux ondes sinusoïdales est calculée dans la formule ci-dessous :

$$a \sin(2\pi f_a t) + b \sin(2\pi f_b t) = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos[2\pi (f_a - f_b) t]} \times \cos\left(2\pi \frac{f_a + f_b}{2} t - \psi\right)$$

Par conséquent, cette somme correspond à une seule onde sinusoïdale :

- de fréquence moyenne $(f_a + f_b)/2$
- avec une amplitude variant de $(a - b)$ à $(a + b)$, modulé à la fréquence $(f_a - f_b)$
- avec une modulation de phase (à influence minime) : $\psi = \tan^{-1}\left[\frac{a+b}{a-b} \cot\left(2\pi \frac{f_a - f_b}{2} t\right)\right]$

La figure 1 illustre l' effet.

Par exemple : le battement d'une quinte impure – rapport ≈ 3/2 –, résulte principalement de la rencontre du deuxième harmonique de la note supérieure avec le troisième harmonique de la note inférieure, mais aussi de la rencontre de tout harmonique de rang 2n de la note supérieure, avec tout harmonique de rang 3n de la note inférieure.

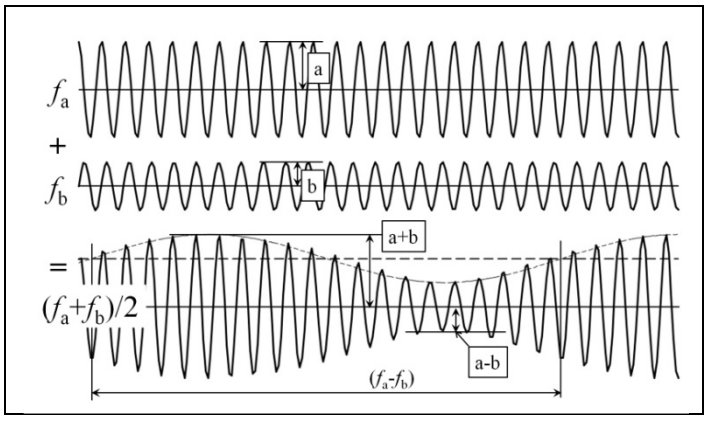


Fig.1 Battement de deux ondes sinusoïdales

Le battement d'harmonique le plus faible soit-il d'une quinte peut donc être défini comme suit :

$$Battement_{\text{quinte}} = 2f_{\text{note supérieure}} - 3f_{\text{note inférieure}} = \mathrm{p}_1 f_2 - \mathrm{p}_2 f_1$$

Cette mesure d'impureté a déjà été appliquée par A. Kellner (1977), et est également applicable pour d'autres intervalles, en appliquant ***des nombres entiers appropriés pour p_1 et p_2.***

Tout ce qui précède démontre pourquoi les intervalles musicaux référentiels ont des rapports de (petits) nombres entiers.

Outre l'absence de battements, il y a un renforcement des harmoniques communs, conduisant à un nouveau son agréable et riche : une belle "consonance" (= harmonie).

Remarque :
Ce qui précède n'est valable que pour les corps vibratoires harmoniques théoriques et idéaux.

Le monde réel des corps vibratoires à colonne d'air ou à cordes diverge légèrement du modèle théorique idéal : les fréquences des harmoniques diffèrent légèrement d'un multiple entier de la fréquence de base en raison d'imperfections physiques, en général à fréquence un peu élevée pour les corps vibratoires à cordes. Les fréquences réelles des tempéraments accordés auditivement sur un instrument de musique physique diffèrent donc quelque peu des chiffres calculés. Une autre conséquence, par exemple, est l'étirement dû à l'inharmonicité qui peut être observé pour les pianos (Railsback 1938). Un modèle théorique impliquant l'inharmonicité pour le piano a été développé par T. Paintoux (Calvet, Annexe 12, pp. 429 – 447). Ce modèle tient compte des facteurs suivants concernant les cordes : la tension, la longueur, le diamètre, le poids spécifique et l'élasticité.

2.3 Systèmes Pythagoriciens

Pythagore (env. 570 – env. 495 avant JC) est probablement parmi les premiers à avoir établi que les intervalles musicaux purs correspondent à des simples rapports de nombres entiers. Les intervalles musicaux les plus importants sont l'unisson de rapport 1/1, l'octave de rapport 2/1, la quinte parfaite de rapport 3/2, et la quarte, –son inverse–, de rapport 4/3. La tierce majeure a un rapport de 5/4, la tierce mineure de 6/5.

Une quinte parfaite de rapport 3/2 conduit à ce qu'on appelle la gamme de Pythagore.

Cette façon d'accorder, à son tour, conduit à des gammes musicales pentatoniques et heptatoniques / diatoniques, et d'avantage aussi aux gammes chromatiques. Une éventuelle gamme pentatonique peut, par exemple, être obtenue par quintes consécutives sur F, C, G, D, menant jusqu'à la note A, et construisant ainsi l'échelle C – D – F – G – A. Une éventuelle échelle heptatonique peut être obtenue en ajoutant des quintes sur A et E, menant jusqu'à la note B, construisant ainsi l'échelle C – D – E – F – G – A – B. Une extension supplémentaire menant à des gammes chromatiques peut être obtenue par des quintes ascendantes additionnelles, telles que F#, C#, G#, etc., et des quintes descendantes additionnelles, telles que B*b*, E*b*, A*b*, etc. Une gamme chromatique possible peut être ainsi, par exemple, C – C# – D – E*b* – E – F – F# – G – G# – A – B*b* – B.

On constate qu'à partir de la douzième note, certaines notes obtiennent des fréquences très similaires, comme pour G# et A*b*, par exemple. Ces notes sont appelées enharmoniques, et diffèrent de ce qu'on appelle un comma Pythagoricien, rapport $3^{12}/2^{19}$ (= 1.013643265…).

Le comma Pythagoricien conduit à des battements d'harmoniques désagréables sur la quinte "fermant" le cycle des quintes. Ce cycle de quintes est souvent fermé par la quinte G# – D# (en fait : G# – E*b*) avec une fréquence de battement désagréable de – 16.86... battements/sec (pour A = 440), au lieu de zéro battements/sec. pour les quintes pures.

2.4 Le Tempérament Égal

Le tempérament pythagoricien a probablement été le tempérament dominant appliqué dans la pratique, jusqu'au début du 16ème siècle. Des tempéraments alternatifs sont apparus, pour éviter une douzième quinte "fermant" le cycle des quintes, ayant un battement d'harmoniques désagréable. Parmi ceux-ci, le tempérament dit égal. Vincenzo Galilei (vers 1520 – 1591) fut probablement parmi les premiers à appliquer un tempérament égal.

Des doutes peuvent être exprimés quant au tempérament égal installé. Le TE est couramment accepté de nos jours. Mais les rapports requis ne furent pas simples à régler avec précision avec l'instrumentation disponible à l'époque baroque : le monocorde.

Même aujourd'hui, ceci n'est pas facile : un écart de seulement 1 mm sur une corde de 1 m correspond à un écart de 1200 x $\log_2(1001/1000) = \sim 2$ cents, et en plus il faut compter avec l'inharmonicité de toute corde physique ou tube d'orgue réels. Des instruments électroniques précis démontrent que les fréquences mesurées de cordes peuvent être instables ou varier dans le temps. Une fluctuation de 0.22 Hz sur F3 (173.87 – 174.09 Hz, soit ~ 2 cent !), a été observée par Calvet (2020, p. 282 – 284). Il rapporte même jusqu'à 8 cents, suite à un saut dans la fréquence mesurée, mais ceci pourrait être dû à des légères déficiences de l'algorithme de mesure (probablement FFT).

Le terme allemand pour le tempérament égal est "Gleichschwebende Temperatur" (tempérament à battement égal). Par conséquent, on peut penser en effet à un tempérament égal où toutes les quintes ont un battement d'harmoniques égal, plutôt que des quintes à rapport égal et légèrement réduit du TE. Un tempérament à battement d'harmoniques égal a probablement été proposé par B. Fritz (Fritz 1756 ; Kroesbergen 2013 p. 16 – 20).

L'accord d'un piano est souvent initialisé en réglant les notes d'une gamme de F3 à F4 (Calvet, 2020). Les notes de cette gamme ont des fréquences plutôt basses et contiennent beaucoup d'harmoniques, ce qui facilite l'accord en raison des battements d'harmoniques clairs et lents. En plus, la tierce majeure sur C sera la meilleure de toutes les tierces, si toutes les tierces sont mesurée de façon égale, car cette tierce majeure se situe à la position la plus élevée sur l'échelle F3 – F4. Les quintes de cette échelle peuvent être calculées à base du tableau 2 contenant les équations applicables, pour lesquelles q_{Note} signifie le battement d'harmoniques de la quinte sur cette note. Un battement égal sur toutes les quintes, mettant tous les $q_{\text{Note}} = Beat$ conduit à un ensemble de 12 équations linéaires contenant 12 variables. Par conséquent, le calcul des notes et du battement d'harmoniques est facile.

$3F3 - 2C4 + q_F = 0$	$3C4 - 4G3 + q_C = 0$	$3G3 - 2D4 + q_G = 0$	$3D4 + q_D = 4A3$
$-2E4 + q_A = -3A3$	$3E4 - 4B3 + q_E = 0$	$3B3 - 4F\#3 + q_B = 0$	$3F\#3 - 2C\#4 + q_{F\#} = 0$
$3C\#4 - 4G\#3 + q_{C\#} = 0$	$3G\#3 - 2Eb4 + q_{G\#} = 0$	$3Eb4 - 4Bb3 + q_{Eb} = 0$	$3Bb3 - 4F3 + q_{Bb} = 0$

Tableau 2 : calcul du battement d'harmoniques des quintes pour l'échelle F3 − F4

Les battements d'harmoniques des intervalles sur les note obtenues sont affichés au tableau 3.

		C4	C#4	D4	E*b*4	E4	F4	F#4	G4	G#4	A4	B*b*4	B4
TE	Pitches	246.76	261.43	276.98	293.45	310.90	329.39	348.97	369.72	391.71	415.00	439.68	465.82
	fifth beats	– 0.84	– 0.89	– 0.94	– 0.99	– 1.05	– 1.12	– 1.18	– 1.25	– 1.33	– 1.41	– 1.49	– 1.58
Fritz	Pitches	246.73	261.43	276.92	293.45	310.87	329.48	349.08	369.72	391.77	415.00	439.80	465.94
	fifth beats	– 0.75	– 0.75	– 0.75	– 0.75	– 0.75	– 1.50	– 1.50	– 1.50	– 1.50	– 1.50	– 1.50	– 1.50
	Δ pitches	– 0.03	0.00	– 0.06	0.00	– 0.02	0.09	0.10	0.00	0.06	0.00	0.13	0.11

Tableau 3 : Comparaison des tempéraments égaux TE et Fritz (pour A4 = 415) ;
notez le saut de facteur 2 pour le battement d'harmoniques, à la note F4

Un diapason baroque à A4 = 415 (A3 = 207.50), conduit à un battement d'harmoniques des quintes égal à − 0,75… battements/sec, dans l'échelle F3 − F4.

Il est clair que jusqu'à douze tempéraments différents à battement d'harmoniques égal peuvent être obtenus, en fonction de la note initiale choisie pour débuter l'échelle. ***Le battement d'harmoniques égal change également par un facteur deux, pour chaque pas d'octave,*** quelle que soit la note initiale ou le diapason choisi (voir la note F4 au tableau 3).

Les instructions d'accord pour un tempérament égal à battement d'harmoniques égal sont très simples : mettez toutes les quintes de F3 à F4 au battement d'harmoniques égal prescrit. Cependant, une précision d'accord très élevée est requise, afin d'obtenir une fermeture acceptable du cycle de quintes.

Les instructions d'accord auditif pour le TE sont plus élaborées en raison de douze battements d'harmoniques différents, où l'accord nécessite l'utilisation d'un monocorde ou instrument de mesure de fréquences, ce qui va de pair avec toutes les difficultés déjà mentionnées.

Les considérations ci-dessus, discutant l'accord basé sur des battements d'harmoniques égaux, pourraient mettre en doute que les tempéraments égaux anciennement installés correspondent au TE. Les différences auditives sont indiscernables. Le battement d'harmoniques moyen TE (dans la limite F3 − F4) est de − 0.78 ... battements/sec. ; ce qui n'est que légèrement plus élevé et presque identique aux − 0.75… battements/sec. du tempérament Fritz.

2.5 Le Tempérament Mésotonique

Les tierces majeures pures, rapport 5/4, sont en général appréciées et désirées par les musiciens et leurs auditeurs. La qualité des tierces majeures peut déterminer les différents caractères ou affections de tempéraments différents. Par conséquent, une grande importance est accordée aux tierces majeures. Les tierces majeures pures diffèrent des tierces Pythagoriciennes ayant un rapport 81/64. La différence est le comma syntonique, ayant un rapport 81/80. Les premières considérations sur l'importance des tierces majeures pures, peuvent entre autres, être attribuées à Ptolémée (env. 100 – env. 170).

Les tierces majeures pures sont devenues largement introduites et acceptées avec le tempérament mésotonique. Ce tempérament a été décrit en 1523 par P. Aaron, et par Salinas (1577) selon Zarlino. Ce tempérament mésotonique est basé sur une tierce majeure juste sur C, qui est divisée en quatre demi-tons égaux. Ce tempérament est donc appelé tempérament mésotonique au quart de comma (syntonique). Toutes les autres notes émanent des tierces majeures justes sur les notes E*b*, B*b*, F, (C), G, D, A, E. Ce tempérament mésotonique était probablement le tempérament "dominant" pour la musique baroque (environ 1600 à 1750).

Pour le tempérament mésotonique aussi, on peut se demander si la tierce majeure C − E doit être divisée en fonction de rapports, cents ou commas, comme il est d'usage en général, vraisemblablement au moyen d'un monocorde ou d'un instrument de mesure ?

Une division alternative hypothétique pourrait consister à construire la tierce majeure juste C − E, basée sur quatre quintes ayant un battement d'harmoniques égal (E − A, D − A, G − D, C − G), suivi de l'installation consécutive des sept tierces justes supplémentaires et souhaitées. Cette détermination des notes a également l'avantage qu'elle contient aussi un lien direct à la note A lors de l'initiation de l'accord, ou à la note C dans le cas où la note C serait choisie comme diapason. Par analogie au tableau 2, un ensemble d'équations applicables aux battements d'harmoniques des tierces majeures peut être mis en place. Voir le tableau 4.

$5F3 + p_F = 4A3$	$5C4 - 4E4 + p_C = 0$	$5G3 - 4B3 + p_G = 0$	$5D4 - 8F\#3 + p_D = 0$
$-4C\#4 + p_A = -5A3$	$5E4 - 8G\#3 + p_E = 0$	$5B3 - 4Eb4 + p_B = 0$	$5F\#3 - 4Bb3 + p_{F\#} = 0$
$5C\#4 - 8F3 + p_{C\#} = 0$	$5G\#3 - 4C4 + p_{G\#} = 0$	$5Eb4 - 8G3 + p_{Eb} = 0$	$5Bb3 - 4D4 + p_{Bb} = 0$

Tableau 4 : calcul du battement d'harmoniques des tierces majeures dans l'échelle F3 – F4

Le calcul des fréquences mésotoniques de note est facile, en sélectionnant pour le tableau 5 les formules applicables des tableaux 2 et 4.

$3C4 - 4G3 + Beat = 0$ $3G3 - 2D4 + Beat = 0$	$3D4 + Beat = 4A3$ $-2E4 + Beat = -3A3$	$5C4 - 4E4 = 0$
$5F3 - 4A3 = 0$ $5Bb3 - 4D4 = 0$ $5Eb4 - 8G3 = 0$	$5G3 - 4B3 = 0$ $5D4 - 8F\#3 = 0$	$-4C\#4 = -5A3$ $5E4 - 8G\#3 = 0$

Tableau 5 : Équations menant à un tempérament mésotonique à quatre quintes de battement égales et huit tierces justes :
Rangée supérieure : construction de la tierce majeure sur C
Rangée inférieure : extension contenant les tierces majeures pures requises

Les battements d'harmoniques des quatre quintes initiales s'élève à − 2.09... battements/sec.

Cet accord auditif alternatif proposé pouvait être installé très facilement par n'importe quel accordeur baroque, sans utilisation quelconque d'outil de mesure. Par conséquent, des doutes peuvent être exprimés sur l'installation effective pendant la période baroque, du tempérament mésotonique publié couramment aujourd'hui, sur base de calculs de rapports.

		C	C#	D	E*b*	E	F	F#	G	G#	A	B*b*	B
1/4 comma Meantone	Pitches	248.23	259.38	277.53	296.95	310.28	332.00	346.91	371.19	387.86	415.00	444.04	463.98
"Equal beat Meantone"	Pitches	248.17	259.38	277.36	296.96	310.21	332.00	346.70	371.21	387.76	415.00	443.78	464.01
	Δ–pitches	– 0.06	0.00	– 0.17	0.01	– 0.08	0.00	– 0.21	0.02	– 0.10	0.00	– 0.26	0.02
	Δ–cents	0.43	0.00	1.03	– 0.09	0.43	0.00	1.03	– 0.09	0.43	0.00	1.03	– 0.09

Tableau 6 : Comparaison entre le tempérament mésotonique "classique" 1/4 de comma et le tempérament mésotonique à "battement égal"

L'accord de précision de la division "classique" de la tierce juste C − E n'était possible qu'au moyen d'un monocorde, mais cela va de pair avec un travail assez intensif : pour un monocorde d'une longueur de 1000 mm accordé à la note C, le pont mobile doit être réglé à C# = 935.73 mm, D = 893.33 mm, E*b* = 835.90 mm, et E = 800.00 mm. Un écart de seulement 1 mm correspond déjà à un écart de fréquence de 2.16… cents. C'est plus du double des différences maximales affichées au tableau 6. Par conséquent, il n'y a en fait aucune raison pratique pour ne pas accorder auditivement. Les différences entre les deux versions ne se distinguent pratiquement pas.

2.6 Le bon tempérament

Il y a eu une quête générale et très active pour des bons tempéraments à l'époque baroque. La raison en est que le tempérament mésotonique ne permet pas une modulation musicale acceptable pour toutes les tonalités, à cause de la "quinte du loup" (généralement sur G#) et des quatre tierces majeures "dures" associées.

Veuillez noter :

TOUTES les tonalités autorisées du mésotonique* (B*b*, F, C, G, D, A,) *offrent une HARMONIE EXCELLENTE et IDENTIQUE, la seule différence entre les tonalités autorisées, consiste uniquement en une différence de la hauteur des notes.

Par conséquent, la modulation est totalement libre sur le plan musical, tant qu'elle ne sort pas des

tonalités autorisées.

Werckmeister fut, parmi d'autres, à l'origine du concept du bon tempérament, et son bon tempérament Werckmeister III (1691) devint célèbre. Il y a cependant des précédents, par exemple : la reconstruction de l'orgue de la Cathédrale de Lucca, Italie 1473 (Devie 1990, p. 55), témoigne de l'exigence d'un bon tempérament.

Une définition musicale des bons tempéraments, basée sur les critères de Werckmeister, a été élaborée par H. Kelletat[1] (1960 ; 1981, p. 9) :

> << "Un "bon tempérament" implique une division mathématico-acoustique et musico-pratique des tons d'une octave en douze parties, afin qu'il soit possible, sur base du système pur, d'obtenir un jeu irréprochable pour toutes les tonalités, tout en s'efforçant d'obtenir une pureté maximale des intervalles diatoniques.
> Ce tempérament se présente comme un lissage parcimonieux, lié à une relaxation et extension du système mésotonique, comme demi tons à battement inégal et comme tempérament égal." >>

Werckmeister est probablement aussi le premier à avoir utilisé le terme "wohltemperiert" (bien tempéré) par écrit. Voir les figures 2 (Norback, 2002, p 18), et 3 à 7.

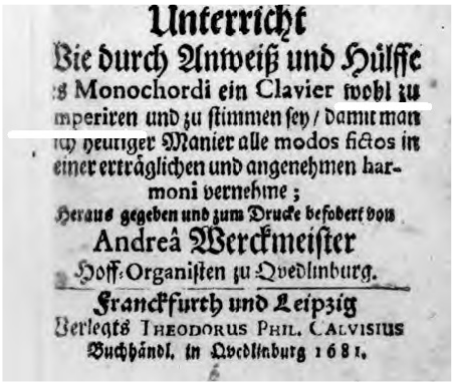

Unterricht
Wie durch Anweiß und Hülffe
s Monochordi ein Clavier wohl zu
mperiren und zu ſtimmen ſey / damit man
ch heutiger Manier alle modos ficos in
einer erträglichen und angenehmen har-
moni vernehme ;
Heraus gegeben und zum Drucke befodert von
Andreâ Werckmeiſter
Hoff-Organiſten zu Qvedlinburg.
Franckfurth und Leipzig
Verlegts THEODORUS PHIL. CALVISIUS
Buchhändl. in Qvedlinburg 1681.

Fig. 2 : Orgelprobe 1681, title page

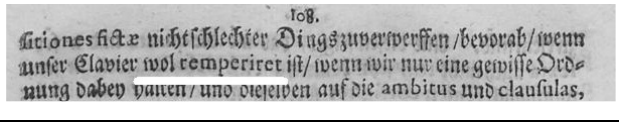

108.
ficiones fictæ nichtſchlechter Dings zuverwerffen / bevorab / wenn
unſer Clavier wol temperiret iſt / wenn wir nur eine gewiſſe Ord-
nung dabey halten / und dieſelben auf die ambitus und clauſulas,

Fig. 3 : Musicae Hodegus Curiosus , 1686, chapter 30 page 118 {erratically marked as 108)

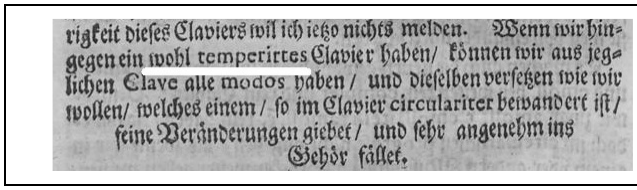

rigkeit dieſes Claviers wil ich ietzo nichts melden. Wenn wir hin-
gegen ein wohl temperirtes Clavier haben / können wir aus jeg-
lichen Clave alle modos haben / und dieſelben verſetzen wie wir
wollen / welches einem / ſo im Clavier circulariter bewandert iſt /
ſeine Veränderungen giebet / und ſehr angenehm ins
Gehör fället.

Fig. 4 : Musicae Hodegus Curiosus , 1686, p. 120, 16-th rule

Muſicaliſche Temperatur,
Oder
deutlicher und wahrer Mathematiſcher Unterricht /
Wie man durch Anweiſung des
MONOCHORDI
Ein Clavier / ſonderlich die Orgel-Wercke /
Poſitive, Regale, Spinetten / und dergleichen wol tempe-
riret ſtimmen könne / damit nach heutiger manier alle modi recti
in einer angenehm- und erträglichen Harmonia mögen
genommen werden /

Fig. 5 : Musicalische Temperatur, 1691, title page

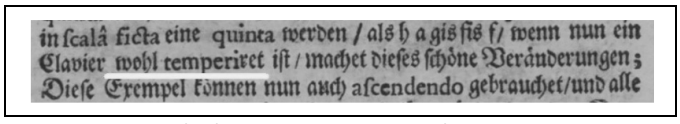

in ſcalâ ficta eine quinta werden / als h a gis fis f / wenn nun ein
Clavier wohl temperiret iſt / machet dieſes ſchöne Veränderungen ;
Dieſe Exempel können nun auch aſcendendo gebrauchet / und alle

Fig. 6 : Musicalische Temperatur, 1691, chapter 22, page 61, 7-th rule

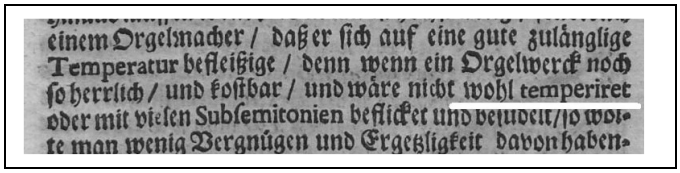

einem Orgelmacher / daß er ſich auf eine gute zulängliche
Temperatur befleißige / denn wenn ein Orgelwerck noch
ſo herrlich / und koſtbar / und wäre nicht wohl temperiret
oder mit vielen Subſemitonien beflicket und beſudelt / ſo wür-
te man wenig Vergnügen und Ergetzligkeit davon haben.

Fig. 7 : Orgelprobe 1698, p. 7

[1] "Wohltemperierung heißt mathematisch-akustische und praktisch-musikalischen Einrichtung von Tonmaterial innerhalb der zwölfstufigen Oktavskala zum einwandfreien Gebrauch in allen Tonarten auf der Grundlage des natürlich-harmonischen Systems mit Bestreben möglichster Reinerhaltung der diatonische Intervalle.
Sie tritt auf als proportionsgebundene, sparsam temperierende Lockerung und Dehnung des mitteltönigen Systems, als ungleichschwebende Semitonik und als gleichschwebende Temperatur."

De nos jours à nouveau, les bons tempéraments (termes Anglais possibles : well temperament = circulating temperament = "tempérament circulant") sont devenus un sujet musical brûlant.

Il est fort probable que les publications de H. Kelletat (1956, 1960, 1981, 1982,) soient à l'origine de l'intérêt actuel. Une publication plus récente également, de A. Calvet (2020), propose une discussion en largeur et en profondeur sur le sujet de l'accord musical, soutenue par des aspects historiques et une explication approfondie sur comment et pourquoi les tempéraments musicaux, les intervalles et les battements d'harmoniques d'intervalles ont une importance particulière. Calvet a traité tous les aspects discutés dans le présent article, en particulier et approfondi également l'aspect du battement d'intervalle musical, et les battements d'harmoniques de nombreux tempéraments sont bien documentés. Il discute aussi l'importance des réajustements d'intervalle requis lors d'un accord de piano, en raison de l'inharmonicité des cordes et des corrections pour un meilleur traitement des battements (et ces corrections seraient la conséquence des améliorations auditives désirées qui conduisent aux écarts des fréquences publiées). Jobin aussi (2005) mentionne le besoin de corrections d'intervalles.

2.7 **Werckmeister** (1635 − 1706)

Werckmeister a publié ses instructions d'accord, basées sur des commas, voir le tableau 7 concernant Werckmeister III (1698, chap. 30, p. 78). Ce tempérament peut également être recalculé, en fonction du battement d'harmoniques, au moyen des équations du tableau 2, en définissant $q_C = q_D = q_G = q_B = \mathit{Beat}$, et tous les autres $q_{Note} = 0$. Le battement d'harmoniques des quintes sur C4, G3, D4, B3 est de − 2.35... Les différences entre les versions publiées et recalculées sont minimes et ne peuvent très probablement pas être distinguées sur le plan auditif (voir tableau 7).

		C	C#	D	E*b*	E	F	F#	G	G#	A	B*b*	B
Werckm. III	Pitches	248.44	261.73	277.61	294.45	311.25	331.25	348.97	371.40	392.59	415.00	441.67	466.88
	commas	− 1/4	0	− 1/4	0	0	0	0	− 1/4	0	0	0	− 1/4
beat rate Werckm.	Pitches	248.45	261.74	277.45	294.45	311.25	331.26	348.98	371.50	392.61	415.00	441.68	466.88
	Δ-pitches	0.01	0.01	− 0.16	0.01	0.00	0.01	0.01	0.10	0.01	0.00	0.01	0.00

Tableau 7 : Comparaison entre le Werckmeister III "classique", et le Werckmeister III à "battement égal"

2.8 **Vallotti** (1697 − 1780)

Le tempérament Vallotti est caractérisé par l'égalité des quintes diatoniques diminuées, toutes les autres quintes étant pures. Il fait partie de la quantité innombrable de bons tempéraments créés à l'époque baroque. Les quintes diminuées mènent à des tierces majeures diatoniques tant soit peu améliorées mais pas encore pures.

Pour Vallotti aussi, on peut faire une comparaison entre le tempérament basé sur l'égalité des quintes en cents, et celui basé sur l'égalité du battement d'harmoniques. Le Vallotti basé sur le "battement d'harmoniques" est facile à calculer à l'aide des équations au tableau 2, mettant $q_F = q_C = q_G = q_D = q_A = q_E = \mathit{Beat}$, et tous les autres $q_{Note} = 0$.

		C	C#	D	E*b*	E	F	F#	G	G#	A	B*b*	B
Vallotti	Pitches	247.60	261.43	277.29	294.11	310.55	330.88	348.58	370.56	392.15	415.00	441.17	464.77
Beat rate Vallotti	Pitches	247.53	261.56	277.17	294.26	310.50	331.04	348.75	370.55	392.35	415.00	441.39	465.00
	Δ-pitches	− 0.06	0.13	− 0.13	0.15	− 0.05	0.17	0.17	− 0.01	0.20	0.00	0.22	0.23

Tableau 8 : Comparaison entre le Vallotti "classique" et un Vallotti "à battement égal"

Les deux échelles fréquentielles de Vallotti sont presque identiques. Les différences entre les deux versions sont indiscernables sur le plan auditif.

Pour Vallotti également, la procédure d'accord basée sur des battements harmoniques égaux pour les quintes est beaucoup plus simple que celle basée sur les rapports. La fréquence de battement applicable pour les quintes est de − 1.50... (dans les limites F3 − F4).

2.9 Kirnberger III

Kirnberger III est un tempérament bien connu en général, et est probablement le plus célèbre des bons tempéraments.

Les tempéraments Kirnberger sont caractérisés par une tierce pure sur la note C obtenu grâce à un tempérament adéquat de quintes concernées. Toutes les autres quintes ensuite, sont pures, sauf celle sur F#, qu'il ne faut pas accorder, mais qui obtient ainsi un faible battement d'harmonique résiduel.

La version historique Kirnberger I (1766) tient une seule quinte diminuée sur la note D, ce qui mène à quatre tierces majeures pures ; celles sur F, C, G, D. Cette version fut rejetée à cause d'une diminution excessive de la quinte sur D. La version historique Kirnberger II (1771) tient une diminution de quintes partagée sur les notes D et A, ce qui mène encore toujours à trois tierces majeures pures, celles sur C, G, D, et qui elle aussi fut fortement critiquée pour sa diminution de quintes, encore toujours jugée trop grande.

Le Kirnberger III est caractérisé par une tierce majeure pure C − E, et toutes les quintes sont pures, sauf celles impliquées dans l'élaboration de la tierce C − E et celle sur la note F#. Deux versions alternatives existent : Kirnberger III et Kirnberger III inégal (= ungleich), (Kelletat, 1981, p. 158, tableau 12). La version Kirnberger III a ***une impureté égale, exprimée en rapports ou en cents***, pour les quintes sur C, G, D, A qui constituent la juste tierce majeure C – E. La version Kirnberger III inégal a pour ces quintes ***des rapports de quintes inégales, calculées en cents***, mais, étonnamment, celles-ci ont un battement d'harmoniques presqu'égal (d'après Kelletat), sauf pour la quinte sur C.

C'est cette observation qui a conduit à un nouveau calcul de Kirnberger III inégal, basé sur la façon classique d'accorder auditivement les battements d'harmoniques. Ce qui à son tour a conduit à un nouveau calcul alternatif du Bach Jobin (voir plus loin), ainsi qu'au présent article et à l'hypothèse concernant les battements d'harmoniques et leur importance pour la définition et le développement des tempéraments historiques.

Le tableau 9 contient les formules tirées des tableaux 2 et 4, nécessaires pour le nouveau calcul de Kirnberger III inégal. Il est à noter que ce calcul des notes C4, G2, D3, A2, E4 est identique à leur calcul pour le tempérament mésotonique à base de mesure de battements d'harmoniques (voir tableau 5) : − 2.09 ... battements/sec pour les quintes concernées. Les autres équations correspondent aux quintes pures souhaitées.

$3C4 - 4G3 + Beat = 0$ $3G3 - 2D4 + Beat = 0$	$3D4 + Beat = 4A3$ $-2E4 + Beat = -3A3$	$5C4 - 4E4 = 0$
$3E4 - 4B3 = 0$ $3B3 - 4F\#3 = 0$	$3F3 - 2C4 = 0$ $3Bb3 - 4F3 = 0$ $3Eb4 - 4Bb3 = 0$	$3G\#3 - 2Eb4 - 0$ $3C\#4 - 4G\#3 = 0$

Tableau 9 : Équations menant à quatre quintes égales et à sept quintes parfaites consécutives

Le tempérament proposé est comparé aux versions courantes de Kirnberger III, au tableau 10.
Les différences entre les versions sont probablement impossibles à distinguer sur le plan auditif.

		C	C#	D	E*b*	E	F	F#	G	G#	A	B*b*	B
Kirnberger III	Pitches 1	248.23	261.51	277.53	294.20	310.28	330.97	349.07	371.19	392.26	415.00	441.29	465.43
Kirnb. III ungl	Pitches 2	248.15	261.43	277.77	294.11	310.19	330.87	348.96	371.43	392.14	415.00	441.16	465.28
Beat rate Kirnberger III	Pitches	248.17	261.44	277.36	294.12	310.21	330.89	348.98	371.21	392.16	415.00	441.18	465.31
	Δ-cents 1	– 0.06	– 0.07	– 0.17	– 0.07	– 0.08	– 0.08	– 0.09	0.02	– 0.10	0.00	– 0.11	– 0.12
	Δ-cents 2	0.01	0.02	– 0.41	0.02	0.02	0.02	0.02	– 0.22	0.02	0.00	0.03	0.03

Tableau 10 : comparaison entre le Kirnberger III "classique », le Kirnberger III ungleich et le Kirnberger III recalculé

Les caractères consécutifs des tempéraments Kirnberger peut mener à supposer qu'ils sont le fruit d'un désir de suivre les recommandations de Bach (cfr. Kelletat et maintes autres sources) tout en maintenant une tierce majeure pure C–E, suivi d'une façon d'accorder rapide et facile. Le tempérament Kirnberger III ungleich est probablement celui qui est le plus facile à accorder en cas d'accord auditif bien tempéré : dès que la tierce majeure C – E est accordée, il suffit d'accorder encore sept quintes pures, la plus longue chaîne de quintes contenant seulement cinq d'entre elles (celles sur F, B*b*, E*b*, G# et C#).

2.10 Autres Bons Tempéraments Historiques

Plus de tempéraments historiques encore, peuvent être analysés, si des données historiques, adéquates et fiables sont disponibles, les baroques anciens étant les plus intéressants. Voir l'annexe A pour plus de détails sur les nouveaux calculs. La plupart des données consultées proviennent de De Bie (2001, basé sur Barbour).

Observations possibles concernant les résultats de l'annexe A :

- Toutes les valeurs de RMS−Δ−cent obtenues démontrent des correspondances très proches entre les fréquences du tempérament "classique" et celles calculées à base des battements d'harmoniques. Seuls trois tempéraments affichent une correspondance légèrement moindre.
- Stanhope est le seul à disposer d'une tierce majeure pure sur C ***et*** G, tout comme Jobin (voir tableau 14).

À part tous les tempéraments mentionnés ici jusqu'à présent, il y a une multitude d'autres tempéraments crées pendant la période Baroque. Probablement souvent en ligne d'une quête d'un bon tempérament.

3 Bach

Une quête est toujours courante, de ce qu'aurait pu être le tempérament appliqué par Bach, lors de l'accord d'un clavier. Cela aurait pu être n'importe quel tempérament, et la possibilité de ***quelconque bon tempérament*** se pose à coup sûr suite à sa visite à Buxtehude (1705). Un résultat possible et généralement reconnu pour cette quête de ce qui aurait pu être "son" bon tempérament, pourrait donc être d'une pertinence historique et musicologique.

Les discussions sur les tempéraments de Bach peuvent être controversées, du fait que J. S. Bach n'a laissé aucune instruction écrite sur la façon d'accorder un clavier. Bach ne s'intéressait pas au calcul des rapports intervalles (Forkel, p. 39). Il n'existe aucune certitude historique sur la façon dont il accordait son clavicorde, bien qu'il soit mentionné et généralement admis qu'il y était très doué et extrêmement rapide (Kelletat, 1981, p, 52, 53 ; Forkel, p. 17).

Il était certes très sensible aux affects musicaux : il avait mis en lumière les qualités des bons tempéraments au moyen de “Le clavier bien tempéré” (1722), mais il exprimait aussi l'horreur dans certaines parties de "La Passion selon St Matthieu" (1727), par l’application intentionnelle de tonalités "interdites" du mésotonique (E, B, F#, C#, G#, E*b*) sur des instruments accordés en mésotonique (Kelletat 1982, p. 20).

Remarque : "La passion selon St Matthieu" (1727), où le mésotonique peut avoir un impact majeur sur certains affects musicaux, est POSTÉRIEUR au “Clavier bien tempéré” (1722) basé sur un bon tempérament.

Des doutes sur l’application du tempérament égal (TE) par Bach furent déjà exprimés par Kirnberger (Kelletat, 1981, p. 40 – 42, lettres de Kirnberger à Forkel 1779 – 1780, rejetant l’avis de Marpurg, 1776). Néanmoins, l’opinion de Marpurg concernant l’application du TE par Bach a été largement acceptée et copiée sur une longue période, près de deux siècles, dans un nombre incalculable de publications.

Les doutes sur l'application du TE par Bach font à nouveau surface à l'époque moderne, probablement d’abord avec Bosanquet (1876, p. 28 – 30), puis Kelletat (1957, 1960, 1981, 1982), ce dernier étant probablement à l'origine de la percée actuelle, concernant ces doutes. Kelletat pense que le tempérament qui aurait été appliqué par Bach aurait pu être Kirnberger III, ***OU TOUT AUTRE SIMILAIRE***. Vu certaines dates il faut probablement préférer la dernière opinion : ***« ou tout autre similaire »***. En effet, « Das wohltemperirte Clavier » date de 1722, Kirnberger fut élève de Bach de 1739 à 1741, Bach est décédé en 1750, le tempérament Kirnberger I date de 1761, Kirnberger II date de 1771. Depuis les publications de Kelletat de nombreuses publications discutent d'éventuels schémas de l’accord de Bach, en commençant probablement par Kellner (1977).

Sparschuh (1999) a probablement été le premier à publier une hypothèse selon laquelle Bach a laissé un message d'instruction pour l’accord, basé sur les spirales dessinées au-dessus de la page de titre du “Clavier bien tempéré” ; voir fig. 8 (Amiot 2008, copie retouchée). Des interprétations alternatives ont été proposées plus tard (Zapf 2001, Lehman 2005, Jobin 2005, et bien d'autres), parmi lesquelles celle de Lehman est devenue largement observée et discutée.

Jobin (2005) a attribué des qualités d'impuretés spécifiques aux quintes en fonction du type de spirales, à base de la distribution musicale et normale des quintes figurantes à la fig. 8. Les quintes sur C, G, D, A, E devraient avoir une ***impureté égale***, de manière à ***construire une tierce majeure pure sur C*** ; de ce fait cette impureté tient la valeur d’un quart de comma syntonique. Les quintes sur G#, E*b*, B*b* devraient également avoir une ***impureté égale***, de sorte que toutes les quintes restantes soient pures. L'impureté égale proposée sur les quintes, conduit à une tierce pure sur G également, si le calcul se fait en rapports, tel que fut fait par Jobin. Sparschuh et Zapf ont fait des hypothèses similaires, mais en supposant des valeurs d'impureté à ***battements d’harmoniques prédéfinis***, ce qui mène à quelques incertitudes concernant les résultats.

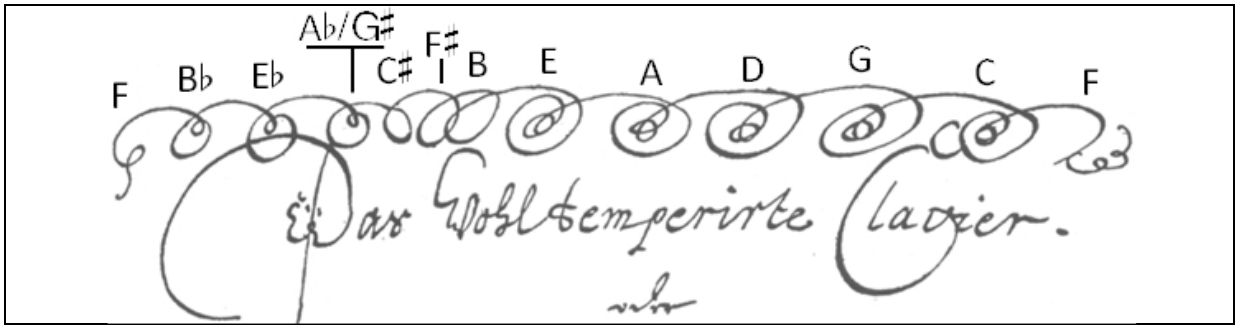


Fig. 8 : Spirales sur la partition de “Le clavier bien tempéré”

3.1 Calcul de tempérament "Bach", à base d'évaluation de battement d'harmoniques

Pour Jobin également, il est facile de recalculer une alternative à base du battement d'harmoniques, dans laquelle les impuretés égales ne signifient pas l'égalité de l'écart en rapports ou cents ou commas, mais bien une égalité des battements d'harmoniques : voir le tableau 11, contenant les équations applicables sélectionnées des tableaux 2 et 4.

$3C4 - 4G3 + Beat1 = 0$ $3G3 - 2D4 + Beat1 = 0$	$-2E4 + Beat1 = -3A3$ $3D4 + Beat1 = 4A3$		$3E4 - 4B3 + Beat1 = 0$ $5C4 - 4E4 = 0$
$3F3 - 2C4 = 0$	$3B3 - 4F\#3 = 0$	$3F\#3 - 2C\#4 = 0$	$3C\#4 - 4G\#3 = 0$
$3G\#3 - 2Eb4 + Beat2 = 0$	$3Eb4 - 4Bb3 + Beat2 = 0$		$3Bb3 - 4F3 + Beat2 = 0$

Tableau 11 : Calcul de Bach–C : Première rangée : Exigences pour les quintes pour construire une tierce majeure pure sur C
Deuxième rangée : Exigences pour les quintes parfaites
Troisième ligne : Exigences pour les quintes restantes

Les résultats obtenus sont :

$$\frac{-Beat1}{4} = \frac{C4}{476} = \frac{D4}{532} = \frac{E4}{595} = \frac{G3}{356} = \frac{A3}{383}$$

Les battements d'harmoniques obtenus sont : *Beat1* = − 2.05, *Beat*2 = 0.26

L'échelle obtenue, appelée ici Bach−C, suite à la tierce pure sur C, est comparée à Jobin au tableau 14. Pour être en accord avec les calculs précédents de tempérament baroque, la comparaison est établie pour un diapason de A = 415. La comparaison des échelles démontre une très bonne similitude avec la proposition de Jobin.

3.2 *Bach, avec des tierces majeures pures sur C et G*

Une analyse plus approfondie est nécessaire : ***de TOUTES les propositions déjà publiées sur le "tempérament de Bach", AUCUNE n'a encore été généralement acceptée***. Jobin donne une forte justification musicale de ses hypothèses, basée sur de nombreux arguments, parmi lesquels une relation au mésotonique, tempérament accepté et familier à Bach ; voir ci-dessus, ainsi que Kelletat (1981, p. 21, lignes 3 à 9). Le mésotonique, Kirnberger III et Jobin tiennent une division identique en quatre demi-tons pour la tierce majeure sur C.

Les hypothèses de Jobin conduisent également à une tierce pure sur G, du fait des calculs à base de rapports. Des alternatives basées sur le battement d'harmoniques incluant une tierce majeure pure sur G pourraient donc être intéressantes. Deux alternatives avec une tierce majeure juste sur C et G sont élaborées : une avec un battement d'harmoniques légèrement différent pour la quinte sur C (Bach−dC) et une avec battement d'harmoniques légèrement différent pour la quinte sur E (Bach−dE), voir les tableaux 12 et 13.

$5G3 - 4B3 = 0$ $3G3 - 2D4 + Beat1 = 0$	$-2E4 + Beat1 = -3A3$ $3D4 + Beat1 = 4A3$	$3E4 - 4B3 + Beat1 = 0$ $5C4 - 4E4 = 0$

Tableau 12 : Bach–dC : Exigences sur les intervalles pour une tierce majeure pure sur C et G, et déviation de la quinte sur C
Conditions additionnelles : voir rangée 2 and 3 au tableau 11

$3C4 - 4G3 + Beat1 = 0$ $5G3 - 4B3 = 0$	$-2E4 + Beat1 = -3A3$ $3D4 + Beat1 = 4A3$	$3E4 - 4B3 + Beat1 = 0$ $5C4 - 4E4 = 0$

Tableau 13 : Bach–dE : Exigences sur les intervalles pour une tierce majeure pure sur C et G, et déviation de la quinte sur E
Conditions additionnelles : voir rangée 2 and 3 au tableau 11

Les équations affichées aux tableaux 12 et 13 doivent être complétées par celles aux rangées 2 et 3 du tableau 11.

Les solutions obtenues sont :

Bach–dC : $$\frac{-Beat1}{5} = \frac{D4}{635} = \frac{E4}{710} = \frac{G3}{425} = \frac{A3}{475}$$

Avec battement d'harmoniques : *Beat1* = − 2.18 *Beat2* = 0.28 *déviation sur C4* = − 1.75

Bach–dE : $$\frac{-Beat1}{4} = \frac{C4}{476} = \frac{D4}{532} = \frac{G3}{356} = \frac{A3}{383}$$

Avec battement d'harmoniques : *Beat1* = − 2.09 *Beat2* = 0.39 *déviation sur E4* = − 2.61

Le tableau 14 affiche les fréquences obtenues pour les tempéraments de Bach.

		C	C#	D	E*b*	E	F	F#	G	G#	A	B*b*	B
Jobin Bach	Pitches	248.23	260.99	277.53	293.81	310.28	330.97	347.99	371.19	391.49	415.00	441.00	463.98
Bach–C	Pitches	248.17	261.15	277.36	293.92	310.21	330.89	348.20	371.21	391.73	415.00	441.01	464.27
	Δ-pitches	– 0.06	0.16	– 0.17	0.11	– 0.08	– 0.08	0.21	0.02	0.24	0.00	0.01	0.28
Bach–dC	Pitches	248.13	261.08	277.39	293.86	310.16	330.84	348.11	371.32	391.62	415.00	440.93	464.14
	Δ-pitches	– 0.10	0.09	– 0.13	0.05	– 0.13	– 0.14	0.12	0.13	0.14	0.00	– 0.08	0.16
Bach–dE	Pitches	248.17	261.00	277.36	293.82	310.21	330.89	348.01	371.21	391.51	415.00	440.93	464.01
	Δ-pitches	– 0.06	0.01	– 0.17	0.01	– 0.08	– 0.08	0.02	0.02	0.02	0.00	– 0.08	0.02

Tableau 14 : Comparaison entre le Bach "Jobin » et les Bach calculés à base de battement d'harmoniques.

Toutes les notes diatoniques du C-majeur pour le Bach–dE, sauf la note F, tiennent la même fréquence que les notes correspondantes du tempérament Mésotonique.

Le tableau 15 affiche les battements d'harmoniques des variantes "Bach" obtenues, classés selon la séquence des quintes aux spirales de la figure 8.

	F3	B*b*3	E*b*3	A*b*3	C#4	F#3	B3	E4	A3	D4	G3	C4	F4
Jobin Bach	2,57	7.60	15,71	14,20	18,93	12,04	15,27	14,52	6,46	4,32	0,00	0,00	5,15
	0.00	0.44	0.58	0.39	0.00	0.00	0.00	– 2.89	– 1.93	– 2.58	– 1.73	– 2.31	0.00
	– 14.20	– 18.05	– 22.91	– 14.50	– 14.52	– 6.46	– 4.32	– 5.77	– 3.86	– 10.31	– 11.05	– 20.32	– 28.39
Bach–C	2.78	6.92	15.21	13.35	17.80	11.52	15.02	15.87	7.10	6.00	0.52	0.00	5.56
	0.00	0.26	0.26	0.26	0.00	0.00	0.00	– 2.09	– 2.09	– 2.09	– 2.09	– 2.09	0.00
	– 13.35	– 17.28	– 22.53	– 14.51	– 15.87	– 7.10	– 6.00	– 5.21	– 4.17	– 9.73	– 11.09	– 19.38	– 26.70
Bach–dC	2.91	7.26	15.98	13.45	17.93	11.58	15.07	15.70	6.83	5.46	0.00	0.00	5.82
	0.00	0.28	0.28	0.28	0.00	0.00	0.00	– 2.18	– 2.18	– 2.18	– 2.18	– 1.75	0.00
	– 13.45	– 17.37	– 22.60	– 14.50	– 15.70	– 6.83	– 5.46	– 4.37	– 4.37	– 10.19	– 11.63	– 19.47	– 26.90
Bach–dE	2.78	7.13	15.71	13.90	18.53	11.84	15.27	14.99	6.52	5.21	0.00	0.00	5.56
	0.00	0.39	0.39	0.39	0.00	0.00	0.00	– 2.61	– 2.09	– 2.09	– 2.09	– 2.09	0.00
	– 13.90	– 17.76	– 22.91	– 14.50	– 14.99	– 6.52	– 5.21	– 5.21	– 4.17	– 9.73	– 11.30	– 19.88	– 27.79

Tableau 15 : battements harmoniques ; de haut en bas par tempérament : tierces majeures, quintes, tierces mineures

On peut aussi imaginer un grand nombre d'alternatives entre ces deux cas particuliers : voir aussi l'appendice B–B1. Une exigence pour une égalité aussi poussée que possible des cinq quintes C, G, D, A, E est développée mathématiquement sous l'appendice B–B1 de ce texte. Les différences avec les versions obtenues au tableaux 14 et 15 sont minimes (voir aussi : « cervoreille » ; Calvet 2020).

On peut aussi envisager une version dans laquelle on établit une égalité ***des impuretés des tierces "et" celles des quintes*** ; voir l'appendice B–B2. La même version est calculée aussi à base des rapports, à l'appendice C–C1

Une présentation graphique des battements d'harmoniques des tierces et quintes des différents "tempéraments Bach" est présentée à la fig. 9, ainsi que des tracés pour les quintes mésotoniques et les intervalles Kirnberger III.

Il est clair que les tierces majeures forment le facteur déterminant pour la caractérisation des tempéraments. Des changements légers pour les caractéristiques des quintes induisent des changements remarquables pour les caractéristiques des tierces majeures. Il s'ensuit que l'égalité stricte et mathématique du battement harmonique des quintes n'est probablement pas ce qui importe ; ce qui pourrait vraiment importer, c'est très probablement l'accord des tierces majeures sur C et G. De plus : la pureté des deux tierces majeures sur C et G peut très probablement être ***"LE" point de contrôle précis et important pour l'accordeur***, lors de la mise en œuvre de ce tempérament.

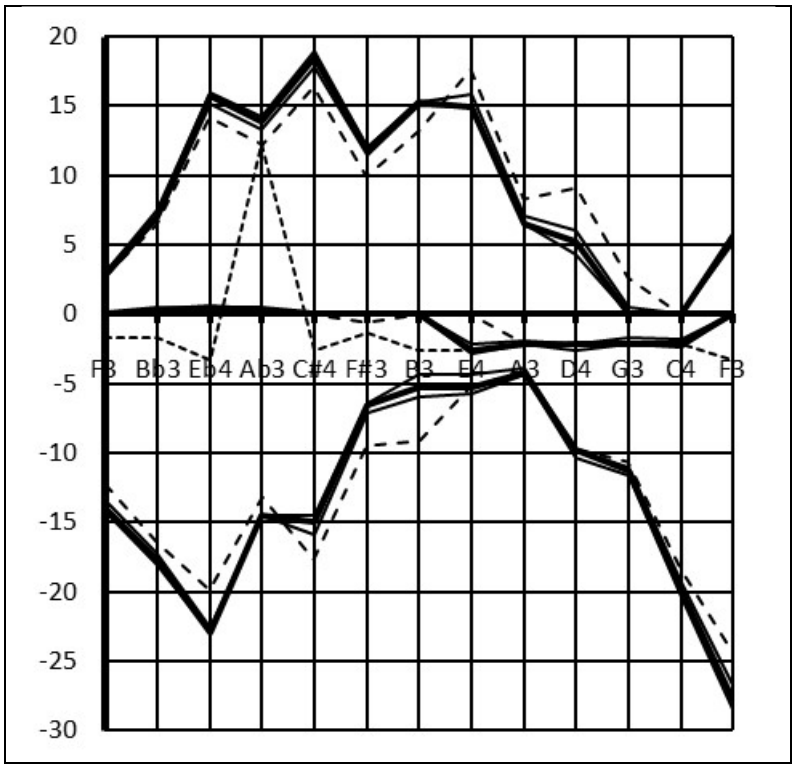


Fig 9 : Battement des quintes et tierces ***(dans l'échelle F3– F4)***
Traits fins : minima et maxima des battements harmoniques ;
Traits gras : Bach– dE

Cette image des tempéraments de Bach affichés est remarquable.

Il semble que leur accord soit dérivé du mésotonique, en conservant deux tierces majeures justes, de sorte que les quintes diminuées sur E*b*, B*b*, F, B, F #, C # et la quinte du "loup" sur G# (A*b*) du mésotonique, soient améliorées afin de devenir quasi pures. Cela n'a rien d'étonnant : le tempérament mésotonique était celui qui dominait au début du baroque, et l'éducation musicale de Bach était basée sur le mésotonique (Kelletat, 1981 p. 21, lignes 3 à 9).

Ceci est aussi conforme à la définition des bons tempéraments définie par Kelletat / Werckmeister : "...*Ce tempérament se présente comme un lissage parcimonieux, lié à une relaxation et extension du système mésotonique*…", et aux commentaires historiques selon lesquels Bach a recommandé que les (un certain nombre de) tierces majeures soient plutôt dissonantes (Kelletat 1981 p.51, note 69).

La figure 9 affiche également le Kirnberger III calculé à base du battement d'harmoniques. Cela illustre l'opinion de Kelletat selon laquelle Bach a peut-être appliqué Kirnberger III ***ou tout autre tempérament similaire***. Nous pourrions voir Kirnberger III ici, comme étant assez similaire, la différence se produisant principalement à partir d'une quinte pure sur E, induisant à son tour une différence remarquable pour les tierces majeures sur G et D.

Après avoir accordé les tierces majeures et les quintes pures, ce type d'accord de Bach ne nécessite rien de plus que la distribution d'une très petite impureté sur trois des quintes restantes : G#, E*b*, B*b*.

Le choix de l'un des tempéraments de Bach comparés, ne semble donc pas importer beaucoup.

4 Le Mésotonique Tempéré de Bach

4.1 Détermination de la gamme diatonique en C–majeur

Une ultime observation des spirales Bach peut élever des doutes quant à l'hypothèse que les quintes sur F soient pures. En effet, ces quintes aussi sont associées à des spirales. La note F à gauche n'en contient qu'une, celle de droite en contient plusieurs, ce qui pourrait signifier que les quintes sur F ne soient pas pures.

Cette image pourrait suggérer en plus que l'accord se fera sur une échelle de F à F (de F3 à F4), les différences en boucles suggérant que la note F à droite est la note la plus haute, ayant donc plus de vibratos que la note à gauche, ce qui est tout à fait normal vu l'intervalle d'un octave.

Reste à savoir quelle propriété associer à la note F ou à sa quinte. En ligne avec l'hypothèse Jobin, tenant deux tierces majeures pures, C et G, il semble logique de supposer que la note F tienne une tierce majeure pure aussi.

Une tierce majeure pure sur F, combinée aux propriétés des quintes C, G, D, A, E (selon le modèle Bach–dE), donne l'échelle affichée au tableau 16.

		C	C#	D	E*b*	E	F	F#	G	G#	A	B*b*	B
Bach =FCG=	Pitches	248,17	261,00	277,36	294,21	310,21	332,00	348,01	371,21	391,51	415,00	441,89	464,01

Tableau 16 : Bach =FCG= à quasi égalité de battement harmonique des quintes diatoniques

Toutes les notes diatoniques du C–majeur ont exactement la même fréquence que les notes correspondantes du tempérament Mésotonique.

Les battements d'harmoniques sont affichés au tableau 17.

	F3	B*b*3	E*b*3	A*b*3	C#4	F#3	B3	E4	A3	D4	G3	C4	F4
T. maj.	0,00	4,71	13,78	13,90	22,98	13,77	16,82	14,99	6,52	5,21	0,00	0,00	0,00
Qui.	– 1,67	1,16	1,16	1,16	0,00	0,00	0,00	– 2,61	– 2,09	– 2,09	– 2,09	– 2,09	– 3,34
T. min.	– 17,23	– 20,66	– 25,23	– 14,50	– 14,99	– 6,52	– 5,21	– 5,21	– 4,17	– 4,17	– 8,88	– 17,95	– 34,47

Tableau 17 : Échelle BACH=FCG= ; battements harmoniques

L'introduction d'une tierce majeure pure sur F3 donne en plus une substantielle diminution de l'impureté de la tierce mineure sur D4, à un niveau comparable, même meilleur, que celle des trois autres tierces mineures de la gamme en C–majeur (sur les notes E4, A3, B3).

Le tracé du battement harmonique des quintes est très remarquable et ***correspond à cent pour cent aux hypothèses formulées en accord avec les spirales*** ; voir les figure 8 et 10. Même plus : les quintes tiennent aussi les propriétés préconisées par Sparschuh et Zapf, à condition d'accepter en effet, que les quintes sur B*b*3, E*b*3 et A*b*3 puissent tenir un battement harmonique positif, plutôt que négatif.

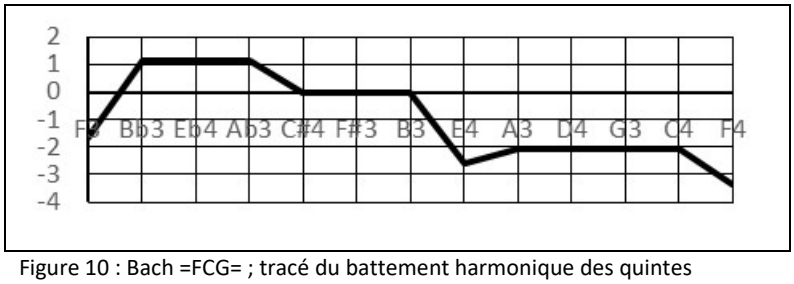


Figure 10 : Bach =FCG= ; tracé du battement harmonique des quintes

Le tracé des battements harmoniques des tierces et quintes est affiché à la figure 11 (traits fins).

Deux alternatives tenant cinq ou six quintes diatoniques du C–majeur les plus égales que possible sont aussi élaborées mathématiquement au appendices B–B3 et B–B4 (voir aussi : « cervoreille »,

Calvet 2020). Les fréquences des notes sont quasi identiques à celles obtenues ici, ce qui signifie que le présent modèle est très proche d'un idéal mathématique.

On peut aussi envisager une version dans laquelle on cherche un équilibre ou une pureté aussi poussée que possible ***des impuretés des quintes "et" celles des tierces*** ; voir appendices B5 et B6. Ces versions mènent à une assez forte réduction de l'augmentation des quintes sur A*b*, E*b*, B*b*.

Un calcul des fréquences de notes pour ce modèle, ***basé sur les rapports d'intervalle***, le modèle calculé de façon « classique » donc, est présenté aux appendices C2 à C4, aussi bien pour tierces pures que pour tierces à pureté égale á celle des quintes.

Les appendices B7 et C5 présentent une version avec un minimum mathématique des impuretés, en battement d'harmoniques et en cents.

On peut observer quelques alternatives remarquables parmi toutes celles obtenues.
Les alternative B5 et B6 attirent l'attention (voir le tracé gras pour B5 à la figure 11). ***La version B5 tient une égalité très remarquable : égale à 1.8362831858… battements / sec***. La version B6 tient une égalité très légèrement moins marquante, mais quasi est quasi identique à la version B5.
On pourrait attribuer le prérogative de « battement égal » aux versions B5 et B6.

Se pourrait-t-il que ce soient ces caractéristiques de B5 et B6, de battement quasi égal des trois tierces majeures et de six quintes de la gamme diatonique en C– majeur, qui soient à la base d'une confusion qui à longtemps régné entre le concept « bon tempérament » et le concept « tempérament égal » (c.a.d. la confusion entre « wohltemperiert » et « gleichschwebend ») ?

Se pourrait-t-il pour le « bon tempérament » de Bach, qu'il y a eu question donc, du « battement égal » discuté ici, plutôt que du battement égal de toutes le quintes du cycle de quintes ?

Kellner (1977) fut probablement parmi les premiers à travailler mathématiquement le battement égal d'harmoniques de tierces et quintes

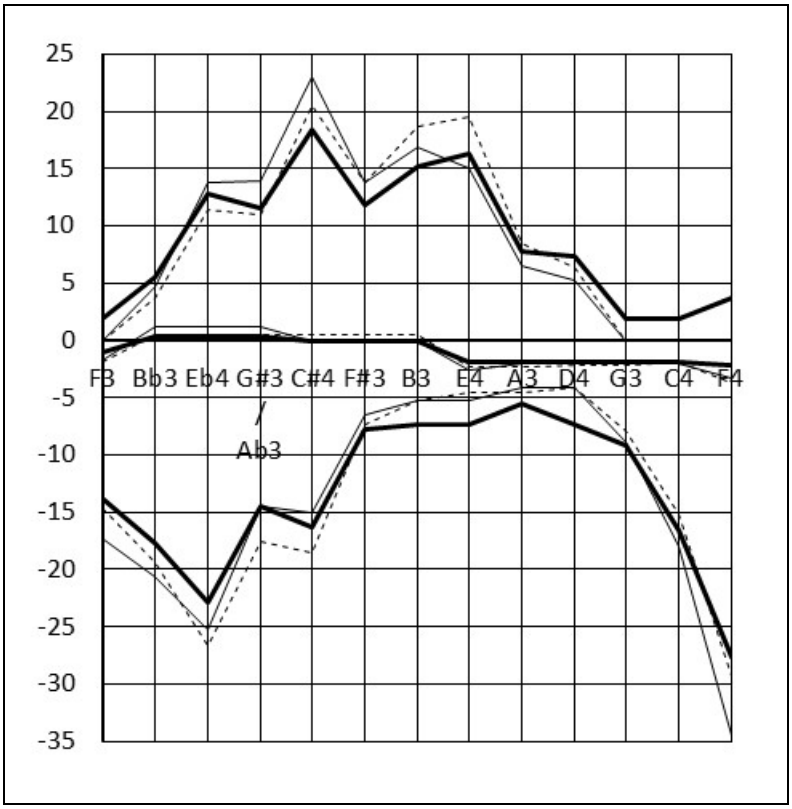


Figure 11 : Bach–2T≈5Q : traits gras : versions de l'appendice B5
Bach–=FCG= : traits fins
Traits pointillés : distribution égale de l'impureté des quintes de B*b*3 à B3

Le tableau 18 recapitule toutes les alternatives étudiées dans ce texte :

Jobin	2 tierce majeure pure (TMP) : cinq quintes égales (calcul en cent)	Jobin
C	1 TMP : sur C ; pareil au mésotonique	Par. 3.1
dC	2 TMP : sur C et G ; quinte sur C différente	Par. 3.2
dE	2 TMP : sur C et G ; quinte sur E différente (=mésotonique)	Par. 3.2
2TP / 5Q≈	2 TMP : sur C et G ; cinq quintes aussi égales que possible	Appendice B–B1
2T = 5Q	Impuretés de 5 quintes et 2 tierces égales	Appendice B–B2
2T = 5Q / cent	Impuretés de 5 quintes et deux tierces égales (en cent)	Appendice C–C1
=FCG=	3 TMP : sur F, C, G ; pareil au mésotonique	Par. 4.1
3TP / 5Q≈	3 TMP : sur F, C, G ; cinq quintes aussi égales que possible	Appendice B–B3
3TP / 6Q≈	3 TMP : sur F, C, G ; six quintes aussi égales que possible	Appendice B–B4
3T ≈ 5Q	**Impuretés de 5 quintes et 3 tierces égales**	**Appendice B–B5**
3T ≈ 6Q	**Impuretés de 6 quintes et 3 tierces aussi égales que possible**	**Appendice B–B6**
minimum	Impuretés de 6 quintes et 3 tierces aussi minimales que possible	Appendice B–B7
3T / 5Q≈/cent	3 TMP : sur F, C, G ; et 5 quintes à impureté égale (en cent), s	Appendice C-C2
3TP /cent	Impuretés de 5 quintes et trois tierces égales (en cent)	Appendice C-C3
3T = 6Q/cent	Impuretés de 6 quintes et 3 tierces aussi égales que possible (en cent)	Appendice C-C4
Minimum / cent	Impureté minimale des quintes et tierces majeures diatoniques/cent	Appendice C-C5

Tableau 18 : Aperçu de toutes les alternatives Bach présentées (tous les noms sont précédés de BACH–)

4.2 Détermination des quintes sur les notes altérées et la note B

Proposer une hypothèse sur ce sujet peut être controversé aussi. La possibilité pour une autre et meilleure explication alternative, objective et rationnelle ne peut pas être exclue.

Le modèle Bach de Jobin et ceux proposés dans ce texte exigent ***qu'il y ait AU MOINS UNE quinte augmentée sur une des notes altérées ou sur la note B*** (la valeur moyenne de leur proportion dépasse la proportion d'une quinte pure)***. Une extension vers encore plus de quintes diminuées en plus des cinq ou six déjà obtenues est donc à éviter,*** parce que ceci mènerait pour les quintes restantes à une augmentation supplémentaire, ce qui mènerait à son tour à des caractéristiques mésotoniques « à éviter » : des quintes trop augmentées et des tierces majeures trop dures.

Une distribution égale des impuretés de quintes sur les notes altérées et B, mène à des battements d'harmoniques des intervalles tel que tracé en traits pointillés à la figures 11. Ce tracé correspond à des moins bonnes tierces majeures sur D4, A3, E4, B3, mais aussi des meilleures tierces majeures sur B*b*3, E*b*4 et A*b*3. Il apparait que l'opposé soit voulu. Une analyse s'impose.

À base de la figure 11, on pourrait calculer une pureté optimale pour les 3 tierces majeures sur A3, E4 et B*b*3, combiné à une pureté optimale pour les quintes B3, et F#3 à B*b*3. Le résultat mathématique mène à trois tierces majeures pures supplémentaires, celles sur A3, E4 et B*b*3. Ce résultat n'est donc pas acceptable : ***les quintes concernées aussi diminuent, et de ce fait les quintes ainsi que les tierces restantes augmentent en trop.***

Une approche alternative peut se faire par la recherche d'une distribution optimale des impuretés des quintes, ***les quintes devant donc toujours être pures ou augmentées***. Pour ce faire les six quintes sur B3, et F#3 à B*b*3, sont calculées au moyen des équations du tableau 2. Le calcul est fait pour toutes les combinaisons possibles de la valeur « *nq* » avec *n* = « zéro » ou « un » pour q_{B3}, et $q_{F\#3}$ à q_{Bb3}, sauf la combinaison à six zéros ; on a donc 63 combinaisons possibles (= $2^6 - 1$). Les impuretés des tierces majeures des tonalités admises en mésotonique sont aussi calculées (celles sur B*b*3, E*b*3, E4, A3, D4). Les résultats obtenus sont affichés à l'appendice D.

Plusieurs analyses et tris aux tableaux de l'appendice D sont possibles. On peut constater qu'un tri selon la valeur de la somme d'une impureté de quintes et des impuretés des tierces

majeures sur A3, E4 et B*b*3 donne un résultat minimum absolu (minimum / minimorum) pour la combinaison 111000 pour « n » pour $q_{Bb3,Eb4,Ab3,C\#4,F\#3,B3}$. Voir le résultat au tableau 19, et à la première rangée du tableau D3 (en appendice D).

Nombre d'augmentations	Séquence des augmentations : B*b*3, E*b*4, A*b*3, C#4, F#3, B	battement d'harmoniques des quintes « q »	battement d'harmoniques des tierces majeures			$q+p_{E4}+p_{A3}+p_{D4}$
			p_{E4}	p_{A3}	p_{D4}	
3	111000	1.16	14.99	6.52	5.21	27.88

Tableau 19 : résultats obtenu par un seul tri, pour un minimum de la somme q + E4 + A3 + D4

L'hypothèse avancée ici parait donc plausible, mais laisse un espace ouvert au discussions.

L'hypothèse supporte mathématiquement le concept pour lequel, après avoir obtenu les sept notes naturelles du mésotonique, une pureté optimale pour les tonalités mésotoniques permises à dièzes est recherchée (G–, D–, A–majeur) par l'installation de quintes pures sur C#4, F#3 et G#3 (A*b*3), suivi de l'optimalisation des trois quintes restantes.

Il est à noter qu'il y a pas mal de tempéraments dérivés du mésotonique qui répondent à un schéma à deux quintes agrandies, E*b*4 et A*b*3. Entre autres et pas pour le moins Rameau (1726), mais aussi quelques autres, comme Marpurg (1752), Louet (1797), de Béthisy (1764), Vogel (1985), d'Alembert (1752), Legros (1972/75). Si on n'agrandit que deux quintes, on peut obtenir une meilleure tierce majeure sur B*b*3.

Le constat concernant la définition des notes F#3, C#4, A*b*3, Eb4, B*b*3 fait ici, importe somme toute probablement relativement peu, dans l'ensemble des schémas d'accord Bach proposés.
Ce sont surtout les trois tierces majeures du C–majeur qui importent, tel que déjà discuté plus haut.

4.3 Conclusion concernant les hypothèses Bach

On peut définir les différentes alternatives Bach comme des tempéraments qui sont de toute évidence dérivés du mésotonique, –toutes les notes diatoniques du C majeur sont en effet égales, ou quasi identiques–, et pour lequel les tierces majeures des tonalités permises et à dièses sont les meilleures possibles, le tout combiné à une optimalisation de l'impureté des trois quintes résiduelles.

La définition ci–dessus a comme conséquence ***non déterminante*** que l'on peut observer une quasi égalité pour les battements d'harmoniques des quintes et des tierces majeures diatoniques, et une égalité parfaite pour les quintes non pures sur B*b*3, E*b*4, A*b*3.

5 Postambule

Des tempéraments historiques célèbres ont été définis à base du battement d'harmoniques d'intervalles au lieu de l'application plus courante des rapports d'intervalle, ou des écarts en rapports, cents ou en commas. Il est devenu clair que tous ces tempéraments :

- sont quasi identiques à leurs homologues, généralement basés sur des rapports, des rapports, cents ou commas.
- ne nécessitent qu'un diapason, parfois peut–être un métronome, pour un accord facile.

Il n'est pas déraisonnable de supposer que les tempéraments baroques ont été conçus, basés sur des observations auditives de musiciens interprètes et d'accordeurs, et auraient donc pu être basés sur l'optimalisation des battements d'harmoniques d'intervalle.

Les mesures exécutées après coup par monocorde à l'époque baroque auraient pu à ce moment-là conduire aux définitions communément connues de nos jours, basées sur des cents, des

rapports ou des commas, légèrement différentes de celles basées sur le battement d'harmoniques réel installé, en raison de l'inobservation (inobservable à ce moment là !) des erreurs de mesure très mineures. Des petites erreurs minimes de mesure en cents sont presque inévitables, et la légère structure inharmonique des véritables corps vibratoires physiques des instruments de musique contribuent également à ces incertitudes de mesure.

Toutes les observations ci–dessus sont valables en particulier, pour l'accord Bach selon la proposition Jobin, et quelques hypothèses rajoutées.

La dextérité et la rapidité exceptionnelles avec lesquelles Bach pouvait accorder un clavicorde (Kelletat, 1981, p. 52, 53; Forkel, p. 17) permettent de supposer qu'il n'a accordé qu'auditivement, probablement en se basant sur le battement d'harmoniques observables. Bach ne s'intéressait pas au calcul des rapports intervalles (Forkel, p. 39).

Basé sur tous les arguments ci–dessus, il semble raisonnable de supposer que les spirales sur la partition du "Clavier bien tempéré" peuvent être associées aux exigences d'impureté concernant les battements ou le battement d'harmoniques de quintes, en effet, associé à ceux des tierces majeures sur C et G, et F également, et cela reste toujours encore à l'appui de l'hypothèse de Jobin basée sur la signification de quintes mesurées sur la base couramment utilisée d'égalité des rapports, mais à l'appui aussi des alternatives Bach élaborées ici.

CE N'EST DONC PAS L'EXACTITUDE MATHEMATIQUE ET PRÉCISE DES QUINTES QUI PRÉVAUT pour le TEMPÉRAMENT « BACH »,… mais ce qui prévaut en effet, c'est le "JUGEMENT AUDITIF D'ÉGALITÉ" des musiciens interprètes et des accordeurs, leur « cervoreille », menant aux BONNES OU PURES TIERCES MAJEURES sur C et G et F aussi.

Conclusions

- Ce sont les battements des harmoniques des intervalles qui importent aux musiciens interprètes et aux accordeurs.
- Les caractéristiques de battements d'harmoniques des tempéraments historiques sont probablement leur facteur déterminant.
- Les caractéristiques des battements des harmoniques devraient probablement mériter beaucoup plus d'attention en musicologie et pour le calcul des tempéraments, en particulier pour la période baroque.
- Compte tenu des précisions d'accord réalisables, il faut voir comme une quasi–certitude que Jobin et les tempéraments de Bach proposés ici, et presque équivalents, soient des hypothèses valables.

Dédicace

Cet article est dédié à tous les musiciens classiques et accordeurs.
Leurs oreilles musicales sensibles offrent à notre monde le meilleur de la plus universelle et la plus belle de toutes les langues : ***LA MUSIQUE***.

Remerciements

Je tiens à exprimer mes sentiments de gratitude les plus sincères envers Amiot E, Calvet A, Jobin E et Paintoux T.
Leur attitude ouverte a permis un échange d'idées assez intense, ce qui a permis une meilleure compréhension et une évolution d'idées concernant le tempérament musical et les questions d'accord, permettant le développement des idées et des concepts exprimés dans ce texte.

Remerciements à ma fille Hilde : c'est elle qui m'a incité à rechercher ce que veulent les musiciens, plutôt que de faire la recherche de ce que pourrait bien être le tempérament préféré d'une personnalité.

Broekaert Johan
Ingénieur Civil, Electromécanique, option Électronique, Université Catholique de Louvain, 1967
Nieuwelei, 52
B 2640 Mortsel
Belgique

Tel. 00 32 3 455 09 85
broekaert.devriendt@gmail.com

Références (les liaisons internet peuvent changer !)

Amiot E. 2008 : “Discrete Fourier Transform and Bach’s Good Temperament”
https://mtosmt.org/issues/mto.09.15.2/mto.09.15.2.amiot.html

Barbour J. M. 1951 : “Tuning and Temperament : A Historical Survey”

Bosanquet H. 1876 : “An elementary treatise on musical intervals and temperament”
https://en.xen.wiki/images/a/a7/Bosanquet_–_An_elementary_treatise_on_musical_intervals.pdf

Calvet A. 2020 : "Le Clavier Bien Obtempéré"
http://www.andrecalvet.com/v3/index.php

De Bie J. 2001 : “Stemtoon en stemmingsstelsels”, private edition, most data originate from
Barbour J. 1951 : “Tuning and Temperament : A Historical Survey”

Devie D. 1990 : "Le Tempérament Musical : philosophie, histoire, théorie et pratique"

Forkel J. N, 1802 : "Ueber Johann Sebastian Bachs Leben, Kunst und Kunstwerke."
https://reader.digitale-sammlungen.de/de/fs1/object/display/bsb10528130_00009.html

Fritz B. 1756 : "Anweisung, wie man Claviere ... in allen zwölf Tönen gleich rein stimmen könne …“
https://gdz.sub.uni–goettingen.de/id/PPN630630391

Jedrzejewski F. 2002 : "*Mathématiques des systèmes acoustiques, Tempéraments et modèles contemporains.*" L’Harmattan, Paris, 2002.

Jobin E. 2005 : "BACH et le Clavier bien Tempéré" ;
https://www.clavecin–en–france.org/spip.php?article52.

Kelletat H. 1957 : “Ein Beitrag zur Orgelbeweging. Vom Klangerlebnis in nichtgleichswebenden Temperaturen“

Kelletat H. 1960 : “Zur musikalischen Temperatur”

Kelletat H. 1981 : “Zur musikalischen Temperatur ; Band I. Johann Sebastian Bach und seine Zeit“

Kelletat H. 1982 : “Zur musikalischen Temperatur ; Band II. Wiener Klassik“

Kelletat H. 1993 : “Zur musikalischen Temperatur ; Band III. Franz Schubert“

Kellner H. 1977 : “Eine Rekonstruktion der wohltemperierten Stimmung von Johann Sebastian Bach“

Kroesbergen W. 2013 : “18th Century Quotes on J.S. Bach’s Temperament” see :
https://www.academia.edu/5210832/18th_Century_Quotations_Relating_to_J.S._Bach_s_Temperament

Lehman B. 2005 : “Bach’s extraordinary temperament : our Rosetta Stone – 1 ; – 2” ; Early Music

Marpurg :1776 : “Versuch über die musikalische Temperatur“
http://www.deutschestextarchiv.de/book/view/marpurg_versuch_1776?p=5

Napier J. 1614 : “Mirifici logarithmorum canonis descriptio"

Norback J. 2002 : “A Passable and Good Temperament ; A New Methodology for Studying Tuning and Temperament in Organ Music”, https://core.ac.uk/download/pdf/16320601.pdf

Pitiscus B. 1603 : "Thesaurus mathematicus"

Railsback O. 1938 : “Scale temperament as applied to piano tuning” J. Acoust. Soc. Am. 9(3), p. 274 (1938)

Rameau J.– P. 1726 : Nouveau système de musique théorique

Rheticus G. 1542 : "De lateribus et angulis triangulorum (with Copernicus ; 1542)"

Salinas F. 1577 : “De musica libra septem”
https://reader.digitale–sammlungen.de//resolve/display/bsb10138098.html

Sparschuh A. 1999 : “Stimm–Arithmetic des wohltemperierten Klaviers von J. S. Bach (TU Darmstadt)

Stevin S. ca. 1586 : “De Thiende” (Le Décime / The Tenth)

Stevin S. ca. 1605 : “Vande Spiegheling der Singconst” (Considérations concernant l’art du chant / Considerations on the art of singing)
https://adcs.home.xs3all.nl/stevin/singconst/singconst.html

Werckmeister A. 1681 : “Orgelprobe”

Werckmeister A. 1686 : “Musicae Hodegus Curiosus”
http://digitale.bibliothek.uni–halle.de/vd17/content/titleinfo/5173512

Werckmeister A. 1689 : “Orgelprobe”
https://reader.digitale–sammlungen.de/de/fs1/object/display/bsb10527831_00007.html

Werckmeister A. 1691 : “Musicalische Temperatur”
https://www.deutsche–digitale–bibliothek.de/item/VPHYMD3QYBZNQL2UAK3Q2O35GBSVAIEL

Zapf 2001 : informal publication

Appendice A Nouveau calcul de certains tempéraments historiques, basé sur leurs battements d'harmoniques

Le tableau A1 affiche les fréquences de notes obtenues par application des formules aux tableaux 2 et 4.
Le tableau A2 affiche les divisions de commas appliqués (q/n) et les battements d'harmoniques obtenus. Il affiche également le RMS−Δ−cent, l'écart de fréquence moyen par rapport au tempérament "classique" calculé en unités cent. Voir aussi : Calvet 2020 .

	C	C#	D	E*b*	E	F	F#	G	G#	A	B*b*	B
Bendeler III 1690	247.60	261.73	276.67	293.45	311.25	330.13	348.97	370.14	392.59	415.00	440.17	465.30
	247.71	261.97	276.67	293.58	311.25	330.27	349.30	370.41	392.96	415.00	440.36	465.73
Kellner 1976	247.93	261.20	277.42	293.85	310.41	330.58	348.26	370.89	391.80	415.00	440.77	465.61
	247.89	261.16	277.28	293.80	310.33	330.53	348.21	370.93	391.73	415.00	440.70	465.50
Lehman 2005	247.60	262.02	277.29	294.11	310.55	330.88	349.37	370.56	392.59	415.00	440.67	465.82
	247.27	262.09	277.09	294.30	310.62	330.54	349.45	370.28	392.82	415.00	441.13	465.93
Mercadier 1788	247.60	261.36	277.29	293.78	310.55	330.50	348.78	370.56	391.71	415.00	440.67	465.43
	247.52	261.34	277.16	293.80	310.51	330.53	348.83	370.54	391.74	415.00	440.70	465.48
Neidhardt 1 1732	247.60	261.43	277.29	293.78	310.55	330.13	348.58	370.56	392.15	415.00	440.17	465.30
	247.61	261.44	277.19	293.73	310.47	330,15	348,59	370,63	392,16	415,00	440,20	465,31
Neidhardt 2 1732	247.60	261.73	277.29	294.11	310.90	330.50	349.37	370.56	392.15	415.00	441.17	466.35
	247.50	261.67	277.16	294.10	310.88	330.49	349.38	370.52	392.13	415.00	441.15	466.32
Neidhardt 3 1723	247.60	261.73	277.29	294.11	310.90	330.13	349.37	370.56	392.15	415.00	440.67	466.35
	247.58	261.62	277.18	294.03	310.86	330.11	349.34	370.60	392.04	415.00	440.66	466.30
Neidhardt 4 1732	247.60	261.43	277.61	293.78	310.20	330.13	348.58	370.98	391.71	415.00	440.67	465.30
	247.55	261.35	277.44	293.74	310.10	350.33	348.47	370.94	391.65	415.00	440.60	465.14
Sorge 1744	247.60	261.43	277.29	294.11	311.25	330.13	348.97	370.56	392.15	415.00	440.67	465.82
	247.65	261.46	277.20	294.14	311.25	330.21	349.15	370.68	392.19	415.00	440.81	466.07
Sorge 1758	247.60	261.73	277.29	294.11	310.90	330.13	349.37	370.56	392.59	415.00	440.67	466.35
	247.58	261.62	277.18	294.03	310.86	330.11	349.34	370.60	392.04	415.00	440.66	466.30
Stanhope 1806	247.97	261.38	277.81	294.06	309.96	330.63	348.51	371.96	392.08	415.00	440.84	464.95
	247.92	261.32	277.56	293.98	309.90	330.56	348.42	371.88	391.97	415.00	440.75	464.85
Vogel 1975	248.05	261.97	277.67	293.98	310.48	331.55	348.42	371.15	391.97	415.00	440.97	464.56
	248.04	262.22	277.32	294.26	310.27	332.02	348.31	371.07	392.35	415.00	441.39	464.42
Werckmeister VI	247.84	261.10	276.13	294.30	311.25	330.45	349.48	371.04	391.64	415.00	441.45	466.88
	247.91	261.12	276.30	294.30	311.25	330.54	349.61	371.32	391.67	415.00	441.45	466.88

Tableau A1 : Comparaison des fréquences de tempérament : les rangées inférieures sont les versions calculées sur la base du battement d'harmoniques d'intervalles.

	Instructions d'accord auditif (chiffres en battements/sec.)	RMS Δ– cent
Bendeler III 1690	q/3 = − 1.14 sur C, G, E, G#	1.09
Kellner 1976	q/5 = − 0.92 sur C, G, D, A, B	0.37
Lehman 2005	q/6 = − 0.63 sur F, C, G, D, A | q/12 = − 0.31 sur C#, G#, E*b*, B*d*	1.22
Mercadier 1788	q/16 = − 0.28 sur E, B, F#, C# | q/12 = −0.37 sur F | q/6 = − 0.74 sur C, G, D, A	0.31
Neidhardt 1 1732	q/6 = − 0.78 sur C, G, D, A | q/12 = − 0.39 sur E, B, G#, E*b*	0.27
Neidhardt 2 1732	q/6 = − 0.73 sur C, G, D | q/12 = − 0.37 sur F, A, B, F#, C#, B*b*	0.34
Neidhardt 3 1723	q/6 = − 0.77 sur C, G, D | q/12 = − 0.39 sur A, B, F#, C#, E*b*, B*b*	0.37
Neidhardt 4 1732	q/3 = − 1.15 sur D, A | q/6 = − 0.77 sur G | q/12 = − 0.38 sur C, B, B*b*, C#	0.48
Sorge 1744	q/6 = − 0.81 sur C, G, D, E | q/12 = − 0.40 sur B, F#, E*b*, B*b*	0.50
Sorge 1758	q/6 = − 0.77 sur C, G, D | q/12= − 0.39 sur A, B, F#, C#, E*b*, B*b*	0.78
Stanhope 1806	(synt. comma)/3 = − 1.35 sur G, D, A | (schism. comma) = − 0.22 sur B, E*b*	0.57
Vogel 1975	q/7 = − 0.98 sur F, C, G, A, D, E, C# | q/7 = 0.98 sur F#, B*b*	1.41
Werckmeister VI 1691	4q/7 = − 2.18 sur G | 2q/7 = − 1.09 sur F# | q/7 = − 0.55 sur C, B, B*b* | q/7 = + 0.55 sur D, G#	0.56

Tableau A2 : Instructions d'accord et écart moyen de fréquence de note en Δ – cent RMS, par rapport aux valeurs conventionnelles

Probablement beaucoup plus de tempéraments pourraient être recalculés ;
(voir par exemple aussi : Calvet 2020, Jedrzejewski F. 2002).

Appendice B Minimalisation de la différence des impuretés d'intervalles. Le « Cervoreille » (Calvet 2020)

Une égalité d'impureté d'intervalles est en général possible à réaliser auditivement pour tout accordeur auditif professionnel. Cette égalité stricte d'impureté d'intervalles, tel que calculé pour plusieurs tempéraments historiques, n'est cependant pas toujours facile ou possible.

Ce problème se présente, par exemple, pour l'accord du groupe de quintes constituant plus qu'une tierce pure, tel que rencontré pour les hypothèses Bach. Une égalité mathématique et parfaite n'est pas possible dans ce cas. L'expérience et le professionnalisme de l'accordeur sont d'une importance fondamentale, pour ces cas en particulier. À part l'oreille fine de l'accordeur ou du musicien, intervient de façon fondamentale aussi son jugement mental (musical) de l'accord : ***son « cervoreille »***.

Une optimalisation de l'impureté d'intervalles, peut se calculer par une détermination du ***minimum des différences d'impureté*** des intervalles, plutôt que l'égalité absolue et mathématique.

Le battement harmonique moyen de m tierces majeures et de n quintes, ***calculé à base de leurs valeurs absolues*** (positives donc) égale (q_{Note} et p_{Note} : voir les tableaux 2 et 4) :

$bat_{moyen} = \sum \frac{-q_n + p_m}{m+n}$; la déviation de la moyenne de l'impureté sur note égale donc :

$\Delta q_{Note} = q_{Note} + \sum \frac{-q_n + p_m}{m+n}$ pour les quintes ; et

$\Delta p_{Note} = -p_{Note} + \sum \frac{-q_n + p_m}{m+n}$ pour les tierces

Il s'agit donc de minimaliser : $S_n = \sum [(\Delta q_{Note})^2 + (\Delta p_{Note})^2]$

Pour le cas ou on veut optimaliser les quintes seulement, le développement de cette expression, , démontre que cette somme est proportionnelle à :

$$S_n \propto \frac{n-1}{2} \sum_{m=1}^{n} q_m^2 - \sum_{(a;b)=(1\to n)}^{a\neq b} q_a q_b$$

La minimalisation de cette expression s'obtient en calculant ses dérivées partielles remises à zéro, suivi de la solution des équations ainsi obtenues.
Pour le cas ou on veut optimaliser les quintes ***et*** les tierces il faut faire le calcul complet au détail.

Il faut de toutes façons, ***que toutes les impuretés soient indépendantes les unes des autres***. Il faut donc aussi et d'abord substituer les différentes impuretés par leurs expressions en fonction des notes (voir les tableau 2 et 4).

Appendice B1 Tierces majeures pures sur C et G, combiné à une égalisation optimale des quintes concernées sur C, G, D, A, E

Afin de répondre aux conditions des tierces majeures pures sur C4 et G3 il faut substituer la note E4 par la valeur 5C4/4 et la note B3 par la valeur 5G3/4. Il en résulte que la somme des déviations des quintes sur C, G, D, A, E ne dépend plus que de trois notes : C, G, D. On obtient :

$$\sum \Delta q_{notes}^2 \propto 64.25C_4^2 + 107G_3^2 + 32D_4^2 + 62A_3^2 - 128.25C_4G_3 - 4.25C_4D_4 - 33.25C_4A_3 - 24G_3D_4 - 6G_3A_3 - 59D_4A_3$$

Les dérivées partielles mises à zéro donnent comme équations :

	C4	G3	D4	=	A3
C4	128.5	– 128.25	– 4.25	=	33.25
G3	– 128.25	214	– 24	=	6
D4	– 4.25	– 24	64	=	59

Tableau B1: Équations déterminant les notes

Les notes E4 et B3 se calculent à base de tierces majeures pures sur C4 et G3
Les notes F#3, C#4, G#3 / A*b*3 se calculent à base de quintes pures sur B3 ; F3 comme quinte sous C4.
Les notes B*b*3, E*b*4 se calculent à base de quintes à battement égal entre A*b*3 et F3.
Solutions obtenues :

	C	C#	D	E*b*	E	F	F#	G	G#	A	B*b*	B
Bach =CG=	248.14	261.05	277.38	293.84	310.18	330.86	348.07	371.27	391.58	415.00	440.93	464.09

Tableau B2 : Échelle BACH–2TP / 5Q≈ ;
hauteur des notes pour une inégalité optimalisée du battement harmonique des quintes

Les battements d'harmoniques sont affichés au tableau B3.

	F3	B*b*3	E*b*3	A*b*3	C#4	F#3	B3	E4	A3	D4	G3	C4	F4
T. maj.	2.86	7.21	15.88	13.62	18.16	11.68	15.15	15.43	6.71	5.37	0.00	0.00	5.72
Qui.	0.00	0.32	0.32	0.32	0.00	0.00	0.00	– 2.35	– 2.15	– 2.14	– 2.15	– 1.88	0.00
T. min.	– 13.62	– 17.52	– 22.72	– 14.50	– 15.43	– 6.71	– 5.37	– 4.69	– 4.29	– 10.01	– 11.51	– 19.63	– 27.24

Tableau B3 : Échelle BACH–2TP / 5Q≈ ; battements d'harmoniques

Appendice B2 Égalité des impuretés des tierces majeures sur C et G, et celle des quintes sur C, G, D, A, E

Une égalisation du battement d'harmoniques est possible, pour les quintes sur Do, Sol, Ré, La, et la tierce majeure sur Do. On obtient en effet cinq équations linéaires à cinq inconnues : les inconnues Do, Sol, Ré, Mi, et « $Battement1$ », le battement égal des intervalles concernés.
Les équations requises pour obtenir cette égalisation, sont (voir tableaux 2 et 3) :

$$Battement1 = 3G3 - 2C4 = 3D4 - 4G3 = 3A3 - 2D4 = 3E4 - 4A3 = 5C4 - 4E4$$

On peut rajouter une sixième condition menant à la cinquième note inconnue $Si2$, basé sur un même battement égal pour la quinte sur E : $Battement1 = 3B3 - 2E4$

On peut vérifier, qu'un hasard mathématique veut que l'on obtient ainsi, SANS PLUS, aussi une tierce majeure à battement égal sur Sol2, ce qui fait qu'un rajout d'une septième équation pour satisfaire cette condition n'est pas nécessaire.

Appliquant les solutions obtenues, la note Fa2 en finale, peut être calculée à base d'une quinte pure sous C : $3F3 - 2C4 = 0$. Toutes les conditions ci–dessus mènent à :

$$Battement1 = \frac{C4}{135} = \frac{D4}{151} = \frac{E4}{169} = \frac{3 \times F3}{270} = \frac{G3}{101} = \frac{A3}{113} = \frac{2 \times B3}{253}$$

Les notes Fa#2, Do#3, Sol#2/La*b*2 se calculent ensuite à base de quintes justes :

$$0 = 3B3 - 4F\#3 = 3F\#3 - 2C\#4 = 3C\#4 - 4G\#3$$

Les notes E*b*4 et B*b*3 se calculent pour un battement égal des quintes sur A*b*3, E*b*4, B*b*3 :

$$Battement2 = 3Ab3 - 2Eb4 = 3Eb4 - 4Bb3 = 3SB3 - 4F3$$

Solutions obtenues :

		C	C#	D	E*b*	E	F	F#	G	G#	A	B*b*	B
Bach =CG=	Pitches	247.90	261.33	277.28	293.92	310.33	330.53	348.43	370.93	391.99	415.00	440.81	464.58

Tableau B5 : Échelle BACH–2T ≈ 5Q ;
hauteur des notes pour une inégalité optimalisée du battement harmonique des quintes et tierces concernées

Les battements harmoniques sont affichés au tableau B6.

	F3	B*b*3	E*b*3	A*b*3	C#4	F#3	B3	E4	A3	D4	G3	C4	F4
T. maj.	3.67	7.10	14.12	11.62	15.49	10.52	14.23	16.30	7.80	7.35	1.84	1.84	7.35
Qui.	0.00	– 0.15	– 0.15	– 0.15	0.00	0.00	0.00	– 1.84	– 1.84	– 1.84	– 1.84	– 1.84	0.00
T. min.	– 11.62	– 15.79	– 21.34	– 14.52	– 16.30	– 7.80	– 7.35	– 7.35	– 5.51	– 11.02	– 10.77	– 17.80	– 23.24

Tableau B6 : Échelle BACH–2T ≈ 5Q ; battements d'harmoniques

Appendice B3 Tierces majeures pures sur F, C et G, et une égalisation optimale des quintes concernées sur C, G, D, A, E

Il suffit de reprendre la solution de l'appendice B1, mais de calculer une tierce majeure pure sur F, plutôt qu'une quinte pure. Solutions obtenues :

		C	C#	D	E*b*	E	F	F#	G	G#	A	B*b*	B
3TP / 5Q≈	Pitches	248.14	261.05	277.38	294.24	310.18	332.00	348.07	371.27	391.58	415.00	441.92	464.09

Tableau B7 : Échelle BACH–3TP / 5Q≈ ; hauteur des notes pour une inégalité optimalisée du battement harmonique des quintes

Les battements d'harmoniques sont affichés au tableau B8.

	F3	B*b*3	E*b*3	A*b*3	C#4	F#3	B3	E4	A3	D4	G3	C4	F4
T. maj.	0.00	4.72	13.88	13.62	22.74	13.67	16.74	15.43	6.71	5.37	0.00	0.00	0.00
Qui.	– 1.72	1.12	1.12	1.12	0.00	0.00	0.00	– 2.35	– 2.15	– 2.14	– 2.15	– 1.88	– 3.43
T. min.	– 17.06	– 20.51	– 25.11	– 14.50	– 15.43	– 6.71	– 5.37	– 4.69	– 4.29	– 4.29	– 9.02	– 17.64	– 34.11

Tableau B8 : Échelle BACH–3TP / 5Q≈ ; battements d'harmoniques

Appendice B4 Tierces majeures pures sur F, C et G, combiné à une égalisation optimale des quintes concernées sur F, C, G, D, A, E

Par l'application du même procédé que pour l'appendice B1, on obtient comme somme :

$$97.40625C_4^2 + 132G_3^2 + 38.5D_4^2 + 91.3A_3^2 - 171C_4G_3 - 2.25C_4D_4 - 76.95C_4A_3 + 8.4G_3A_3 - 73.4D_4A_3$$

Ce qui donne comme équations :

	C4	G3	D4	=	A3
C4	194.8125	– 171	– 2.25	=	76.95
G3	– 171	264	– 30	=	– 8.4
D4	– 2.25	– 30	77	=	73.4

Tableau B9: Équations déterminant les notes

Avec comme solutions :

		C	C#	D	E*b*	E	F	F#	G	G#	A	B*b*	B
Bach ≈6Q≈	Pitches	248.09	261.01	277.36	294.21	310.11	332.00	348.01	371.22	391.52	415.00	441.90	464.02

Tableau B10 : Échelle Bach–3TP / 6Q : à quasi égalité de battement harmonique des SIX quintes optimalisée

Battements d'harmoniques obtenus :

	F3	B*b*3	E*b*3	A*b*3	C#4	F#3	B3	E4	A3	D4	G3	C4	F4
T. maj.	0.00	4.71	13.79	13.55	22.94	13.76	16.81	15.53	6.54	5.25	0.00	0.00	0.00
Qui.	– 1.83	1.15	1.15	1.15	0.00	0.00	0.00	– 2.28	– 2.29	– 2.09	– 2.10	– 1.82	– 3.66
T. min.	– 17.21	– 20.64	– 25.21	– 14.50	– 15.53	– 6.54	– 5.25	– 4.56	– 4.57	– 4.18	– 8.90	– 17.44	– 34.42

Tableau B11 : Échelle Bach–3TP / 6Q ; battements harmoniques

Appendice B5 Égalité des impuretés des tierces majeures sur F, C et G, et des quintes sur C, G, D, A, E

On peut reprendre la solution de l'appendice B–B2, sauf que la note F3 se calcule comme note de base de la tierce F3–A3, plutôt que comme base d'une quinte pure F3–C4. On obtient ainsi comme battement égal :

$$Battement1 = \frac{C4}{135} = \frac{D4}{151} = \frac{E4}{169} = \frac{5 \times F3}{451} = \frac{G3}{101} = \frac{A3}{113} = \frac{2 \times B3}{253}$$

Les fréquences obtenues sont :

C4	C#4	D4	Eb4	E4	F4	F#4	G4	G#4	A4	Bb4	B4
247.90	261.33	277.28	294.17	310.33	331.27	348.43	370.93	391.99	415.00	441.44	464.58

Tableau B13: Échelle BACH–3T ≈5Q≈ ;
hauteur des notes pour une inégalité optimalisée du battement harmonique des quintes et tierces concernées

Battements d'harmoniques obtenus :

	F3	Bb3	Eb4	G#3	C#4	F#3	B3	E4	A3	D4	G3	C4	F4
Major Thirds	1.84	5.51	12.85	11.62	18.43	11.80	15.25	16.30	7.80	7.35	1.84	1.84	1.84
Fifths	– 1.10	0.37	0.37	0.37	0.00	0.00	0.00	– 1.84	– 1.84	– 1.84	– 1.84	– 1.84	– 1.10
Minor thirds	– 13.82	– 17.70	– 22.87	– 14.52	– 16.30	– 7.80	– 7.35	– 7.35	– 5.51	– 7.35	– 9.18	– 16.52	– 13.82

Tableau B14 : Échelle BACH–3T ≈5Q ; battements d'harmoniques

Appendice B6 Égalisation maximale des impuretés des tierces majeures sur F, C et G, et des quintes sur F, C, G, D, A, E

La somme des carrés des différences d'impureté correspond à :

$$\begin{aligned} 81 \times \sum \Delta^2 = {} & 2718F_3^2 + 2934C_4^2 + 3726G_3^2 + 1044D_4^2 + 3240A_3^2 + 2124E_4^2 + 2592B_3^2 \\ & -1116F_3C_4 - 216F_3G_3 + 36F_3D_4 - 3132F_3A_3 + 180F_3E_4 \\ & -2376C_4G_3 + 72C_4D_4 + 216C_4A_3 - 2880C_4E_4 \\ & -864G_3D_4 + 324G_3A_3 + 540G_3E_4 - 3240G_3B_3 \\ & -1998D_4A_3 - 90D_4E_4 \quad - 1242A_3E_4 \quad - 1944E_4B_3 \end{aligned}$$

Les dérivées partielles remises `zéro donnent les équations au tableau B15 :

	F3	C4	G3	D4	E4	B3	=	A3
F3	5436	– 1116	– 216	36	180	0	=	3132
C4	– 1116	5868	– 2376	72	– 2880	0	=	– 216
G3	– 216	– 2376	7452	– 864	540	– 3240	=	– 324
D4	36	72	– 864	2088	– 90	0	=	1998
E4	180	-2880	540	-90	4248	-1944	=	1242
B3	0	0	– 3240	0	– 1944	5184	=	0

Tableau B15: définition des notes diatoniques

À base des solutions obtenues les notes F#3, C#4, G#3/A*b*3, se calculent formant des quintes justes:

$$0 = 3B3 - 4F\#3 = 3F\#3 - 2C\#4 = 3C\#4 - 4G\#3$$

Pour les notes Eb4 and Bb3 le calcul est fait pour un battement égal des quintes sur A*b*3, E*b*3, B*b*3 :

$$Battement = 3Ab3 - 2Eb4 = 3Eb4 - 4Bb3 = 3Bb3 - 4F3$$

Les fréquences des notes obtenues sont:

C4	C#4	D4	Eb4	E4	F4	F#4	G4	G#4	A4	Bb4	B4
247,82	261,26	277,26	294,17	310,24	331,38	348,35	370,86	391,89	415,00	441,50	464,47

Tableau B16: Échelle BACH–3T ≈6Q≈ ;
hauteur des notes pour une inégalité optimalisée du battement harmonique des quintes et tierces concernées

Battements obtenues :

	F3	Bb3	Eb4	G#3	C#4	F#3	B3	E4	A3	D4	G3	C4	F4
Major Thirds	1,56	5,27	12,60	11,54	19,20	12,13	15,51	16,39	7,55	7,12	1,78	1,86	3,11
Fifths	– 1,43	0,50	0,50	0,50	0,00	0,00	0,00	– 1,78	– 2,03	– 1,77	– 1,78	– 1,73	– 2,86
Minor thirds	– 14,40	– 18,20	– 23,27	– 14,51	– 16,39	– 7,55	– 7,12	– 7,12	– 5,92	– 6,65	– 8,82	– 16,06	– 28,80

Tableau B17 : Échelle BACH–3T ≈6Q ; battements d'harmoniques

Appendice B7 Minimalisation des impuretés des tierces majeures sur F, C et G, et des quintes sur F, C, G, D, A, E

Une minimalisation des impuretés des tierces majeures sur F, C et G, et des quintes sur F, C, G, D, A, E s'obtient par le calcul du minimum de la somme des carrés de leurs impuretés, définis à base des équations aux tableaux 2 et 4. Les équations obtenues en mettant à zéro les dérivées partielles de cette somme, sont affichées au tableau B18 :

	F3	C4	G3	D4	E4	B3	=	A3
F3	68	-12	0	0	0	0	=	40
C4	-12	76	-24	0	-40	0	=	0
G3	0	-24	100	-12	0	-40	=	0
D4	0	0	-12	26	0	0	=	24
E4	0	-40	0	0	58	-24	=	12
B3	68	-12	0	0	0	0	=	40

Tableau B18 : Calcul des notes menant à une impureté minimale des tierces majeures et quintes du C–majeur diatonique

Les fréquences obtenues des notes sont:

C4	C#4	D4	Eb4	E4	F4	F#4	G4	G#4	A4	Bb4	B4
248.23	261.63	277.33	294.54	310.36	331.73	348.84	371.76	392.44	415.00	442.03	465.12

Tableau B19: Échelle BACH –minimum;
hauteur des notes pour une impureté minimale des tierces majeures et quintes du C–majeur diatonique

Battements obtenus :

	F3	Bb3	Eb4	G#3	C#4	F#3	B3	E4	A3	D4	G3	C4	F4
Major Thirds	0.68	4.25	14.32	11.83	18.77	11.95	15.38	17.98	9.02	8.71	0.84	0.26	1.35
Fifths	– 1.13	0.42	0.42	0.42	0.00	0.00	0.00	– 0.84	– 1.78	– 1.99	– 2.98	– 1.19	– 2.25
Minor thirds	– 14.08	– 17.33	– 23.07	– 14.53	– 17.98	– 9.02	– 8.71	– 3.36	– 3.83	– 5.32	– 10.21	– 16.69	– 28.16

Tableau B20 : Échelle BACH–minimum ; battements d'harmoniques

Appendice C Calculs à base de rapports

Appendice C1 Hypothèse Bach basé sur le calcul en rapports, tenant deux tierces majeures optimalisées, avec égalité des impuretés des tierces majeures et quintes diatoniques

L'échelle comprend cinq quintes réduites pour former deux tierces majeures légèrement et également impures, et quatre quintes pures.

Soit « R » la valeur en rapport, de l'impureté égale des quintes et tierces.

Le rapport ramené à l'octave de quatre quintes menant à une tierce impure vaut: $\left(\frac{3}{2}R\right)^4 \times \frac{1}{4}$

Le rapport d'une tierce majeure impure correspondante vaut: $\frac{5}{4 \times R}$

L'égalité des deux expressions mène à : $R = \sqrt[5]{\left(\frac{5 \times 16}{81}\right)} = 0.99752 \ldots$

On peut de la même façon, définir l'impureté « S » des quintes égales entre Ab et F : $S = \frac{2}{3} \times \sqrt[3]{\frac{4F}{Ab}}$

On obtient ainsi les fréquences suivantes :

C	C#	D	E*b*	E	F	F#	G	G#	A	B*b*	B
247.77	261.32	277.35	293.87	310.48	330.35	348.42	370.73	391.97	415.00	440.64	464.56

Tableau C1 : Échelle Bach–2T = 5Q / cent ;

On a comme battement d'harmoniques :

	F3	Bb3	Eb4	G#3	C#4	F#3	B3	E4	A3	D4	G3	C4	F4
Tierces majeures	4.11	7.82	13.56	11.13	14.84	10.22	14.08	15.50	7.76	6.91	2.31	3.08	8.23
Quintes	0.00	– 0.25	– 0.33	– 0.22	0.00	0.00	0.00	– 2.31	– 1.54	– 2.06	– 1.38	– 1.84	0.00
Tierces mineures	– 11.13	– 15.34	– 21.11	– 14.52	– 15.50	– 7.76	– 6.91	– 9.23	– 6.17	– 12.36	– 10.58	– 17.25	– 22.26

Tableau C2 : Échelle Bach–2T = 5Q / cent ; battements d'harmoniques

Observation : l'égalité d'impuretés en cent ne se reflète pas en une égalité de battements.
L'installation de cette échelle nécessite l'emploi d'un outil de mesure.

Appendice C2 Hypothèse Bach, à tierces majeure pure sur F, C, G et cinq quintes à impuretés égales, basé sur le calcul en rapports

Cette version égale la version C1, pour laquelle on installe une tierce majeure pure sur F, plutôt qu'une quinte pure. On obtient les fréquences suivantes :

C	C#	D	E*b*	E	F	F#	G	G#	A	B*b*	B
247.77	261.32	277.35	294.36	310.48	332.00	348.42	370.73	391.97	415.00	442.10	464.56

Tableau C3 : Échelle BACH–1TP 2T = 5Q/cent ;

On a comme battement d'harmoniques :

	F3	Bb3	Eb4	G#3	C#4	F#3	B3	E4	A3	D4	G3	C4	F4
Tierces majeures	0.00	4.17	11.12	11.13	21.42	13.15	16.02	15.50	7.76	6.91	2.31	3.08	0.00
Quintes	– 2.47	0.85	1.13	0.75	0.00	0.00	0.00	– 2.31	– 1.54	– 2.06	– 1.38	– 1.84	– 4.94
Tierces mineures	– 16.07	– 19.72	– 24.04	– 14.52	– 15.50	– 7.76	– 6.91	– 9.23	– 6.17	– 4.13	– 6.93	– 14.81	– 32.13

Tableau C4 : BACH–1TP 2T = 5Q/cent ; battements d'harmoniques

Appendice C3 Hypothèse Bach, à trois tierces majeures pures et six quintes de pureté égale, basé sur le calcul en rapports

Les formules pour tierces majeures et quintes tenant une impureté égale sont les mêmes que pour l'appendice C1. On obtient les fréquences suivantes :

C	C#	D	E*b*	E	F	F#	G	G#	A	B*b*	B
248.23	260.99	277.53	294.11	310.28	332.00	347.99	371.19	391.49	415.00	441.92	463.98

Tableau C5 : Échelle BACH–3TP / 6Q/cent ;

On a comme battement d'harmoniques :

	F3	Bb3	Eb4	G#3	C#4	F#3	B3	E4	A3	D4	G3	C4	F4
Tierces majeures	0.00	5.32	14.19	14.20	23.04	13.86	16.49	14.52	6.46	4.32	0.00	0.00	0.00
Quintes	– 1.54	1.12	1.50	1.00	0.00	0.00	0.00	– 2.89	– 1.93	– 2.58	– 1.73	– 2.31	– 3.09
Tierces mineures	– 17.28	– 20.80	– 24.74	– 14.50	– 14.52	– 6.46	– 4.32	– 5.77	– 3.86	– 5.16	– 8.77	– 18.80	– 34.57

Tableau C6 : BACH– 3TP / 6Q/cent ; battements d'harmoniques

Appendice C4 Hypothèse Bach, à trois tierces majeures et six quintes, tous de pureté égale, basé sur le calcul en rapports

Les formules pour tierces majeures et quintes tenant une impureté égale sont les mêmes que pour l'appendice C1. On obtient les fréquences suivantes :

C	C#	D	E*b*	E	F	F#	G	G#	A	B*b*	B
247.77	261.32	277.35	294.11	310.48	331.18	348.42	370.73	391.97	415.00	441.37	464.56

Tableau C7 : Échelle BACH– 3T = 6Q/cent;

On a comme battement d'harmoniques :

	F3	Bb3	Eb4	G#3	C#4	F#3	B3	E4	A3	D4	G3	C4	F4
Tierces majeures	2.06	6.00	12.34	11.13	18.13	11.69	15.05	15.50	7.76	6.91	2.31	3.08	4.12
Quintes	– 1.23	0.30	0.40	0.27	0.00	0.00	0.00	– 2.31	– 1.54	– 2.06	– 1.38	– 1.84	– 2.47
Tierces mineures	– 13.60	– 17.53	– 22.57	– 14.52	– 15.50	– 7.76	– 6.91	– 9.23	– 6.17	– 8.25	– 8.76	– 16.03	– 27.19

Tableau C8 : BACH– 3T = 6Q/cent; battements d'harmoniques

Appendice C5 Minimalisation des impuretés des tierces majeures sur F, C et G, et des quintes sur F, C, G, D, A, E, calculé à base de cents

Une minimalisation des impuretés des tierces majeures sur F, C et G, et des quintes sur F, C, G, D, A, E s'obtient par le calcul du minimum de la somme de leurs carrés, définis à base de leurs valeurs en cent. Les équations obtenues en mettant à zéro les dérivées partielles de cette somme, sont affichées au tableau C9 :

	logF3	logC4	logG3	logD4	logE4	logB3	=	
logF3	2	-1	0	0	0	0	=	logA3+3+log3-log5+
logC4	-1	3	-1	0	-1	0	=	3-log5
logG3	0	-1	3	-1	0	-1	=	1-log5
logD4	0	0	-1	2	0	0	=	logA3+1
logE4	0	-1	0	0	3	-1	=	logA3-1+log5
logB3	0	0	-1	0	-1	2	=	-4+log3+log5

Tableau C9 : Calcul des notes menant à une impureté minimale des tierces majeures et quintes du C–majeur diatonique

Les fréquences obtenues des notes sont:

C4	C#4	D4	Eb4	E4	F4	F#4	G4	G#4	A4	Bb4	B4
248.27	261.66	277.68	294.47	310.57	331.52	348.88	371.59	392.49	415.00	441.86	465.17

Tableau C10 : Échelle BACH–minimum/cent ;
hauteur des notes pour une impureté minimale des tierces majeures et quintes du C–majeur diatonique

Battements obtenus :

	F3	Bb3	Eb4	G#3	C#4	F#3	B3	E4	A3	D4	G3	C4	F4
Major Thirds	1.21	6.06	14.02	11.87	17.76	11.53	14.95	17.11	9.14	7.12	1.36	0.91	2.42
Fifths	– 0.73	0.24	0.31	0.21	0.00	0.00	0.00	– 1.36	– 1.36	– 3.04	– 2.03	– 1.63	– 1.45
Minor thirds	– 13.32	– 17.29	– 22.43	– 14.54	– 17.11	– 9.14	– 7.12	– 5.44	– 3.63	– 8.50	– 10.12	– 17.28	– 26.65

Tableau C11 : Échelle BACH– ; battements d'harmoniques

Appendice D Battements d'harmoniques des tierces normalement pures, dans le tempérament mésotonique, en fonction de la distribution des impuretés des quintes sur les notes altérées et la note B.

B*b*3	E*b*4	A*b*3	C#4	F#3	B	q	p_{Bb3}	p_{Eb4}	p_{E4}	p_{A3}	p_{D4}	$q + p_{E4} + p_{A3} + p_{D4}$
0	0	1	0	0	0	2.96	2,78	9,27	14,99	6,52	5,21	29,68
1	0	0	0	0	0	3.33	8,34	16,68	14,99	6,52	5,21	30,05
0	1	0	0	0	0	4.44	2,78	16,68	14,99	6,52	5,21	31,16
0	0	0	1	0	0	3.95	2,78	9,27	22,89	6,52	5,21	38,57
0	0	0	0	1	0	2.63	2,78	9,27	22,89	11,78	5,21	42,52
0	0	0	0	0	1	3.51	2,78	9,27	22,89	11,78	12,24	50,42

Tableau D1 : Résultats pour une quinte agrandie ; tri pour la meilleure valeur de $q + p_{E4} + p_{A3} + p_{D4}$

B*b*3	E*b*4	A*b*3	C#4	F#3	B	q	p_{Bb3}	p_{Eb4}	p_{E4}	p_{A3}	p_{D4}	$q + p_{E4} + p_{A3} + p_{D4}$
1	0	1	0	0	0	1,57	5,39	12,75	14,99	6,52	5,21	28,29
0	1	1	0	0	0	1,78	2,78	12,23	14,99	6,52	5,21	28,50
1	1	0	0	0	0	1,90	5,95	16,68	14,99	6,52	5,21	28,62
0	0	1	1	0	0	1,69	2,78	9,27	18,37	6,52	5,21	31,80
1	0	0	1	0	0	1,81	5,79	13,29	18,60	6,52	5,21	32,14
0	1	0	1	0	0	2,09	2,78	12,75	19,17	6,52	5,21	32,99
0	0	1	0	1	0	1,39	2,78	9,27	19,17	9,31	5,21	35,08
1	0	0	0	1	0	1,47	5,23	12,54	19,40	9,46	5,21	35,55
0	1	0	0	1	0	1,65	2,78	12,02	19,95	9,82	5,21	36,64
0	0	1	0	0	1	1,61	2,78	9,27	18,60	8,93	8,43	37,57
1	0	0	0	0	1	1,71	5,63	13,07	18,84	9,08	8,63	38,26
0	0	0	1	1	0	1,58	2,78	9,27	22,89	9,68	5,21	39,36
0	1	0	0	0	1	1,96	2,78	12,54	19,40	9,46	9,14	39,96
0	0	0	1	0	1	1,86	2,78	9,27	22,89	9,31	8,93	42,99
0	0	0	0	1	1	1,50	2,78	9,27	22,89	11,78	8,22	44,40

Tableau D2 : Résultats pour deux quintes agrandies ; tri pour la meilleure valeur de $q + p_{E4} + p_{A3} + p_{D4}$

B*b*3	E*b*4	A*b*3	C#4	F#3	B	q	p_{Bb3}	p_{Eb4}	p_{E4}	p_{A3}	p_{D4}	$q + p_{E4} + p_{A3} + p_{D4}$
1	1	1	0	0	0	1,16	4,71	13,78	14,99	6,52	5,21	27,88
1	1	0	1	0	0	1,12	4,65	11,76	17,23	6,52	5,21	30,09
1	0	1	1	0	0	1,23	2,78	11,31	17,44	6,52	5,21	30,40
0	1	1	1	0	0	1,29	4,92	14,27	17,56	6,52	5,21	30,57
1	1	0	0	1	0	0,98	4,42	11,45	17,94	8,48	5,21	32,62
1	0	1	0	1	0	1,06	2,78	11,04	18,17	8,64	5,21	33,09
0	1	1	0	1	0	1,11	4,62	13,57	18,30	8,73	5,21	33,35
1	0	0	1	1	0	1,08	4,59	11,68	17,43	8,14	7,38	34,04
0	1	0	1	1	0	1,18	2,78	11,24	17,64	8,29	7,57	34,69
0	0	1	1	1	0	1,03	2,78	9,27	20,14	8,58	5,21	34,96
1	1	0	0	0	1	1,23	4,84	14,07	17,77	8,37	7,68	35,05
1	0	1	0	0	1	1,07	4,57	11,65	20,35	8,66	5,21	35,29
0	1	1	0	0	1	1,17	2,78	11,21	20,82	8,85	5,21	36,04
1	0	0	1	0	1	1,14	2,78	9,27	19,84	8,23	7,50	36,71
0	1	0	1	0	1	1,19	4,77	11,92	20,06	8,31	7,60	37,16
0	0	1	1	0	1	1,31	2,78	11,45	20,56	8,48	7,83	38,19
1	0	0	0	1	1	1,00	2,78	9,27	20,23	10,01	7,21	38,45
0	1	0	0	1	1	1,04	4,51	11,57	20,43	10,15	7,29	38,90
0	0	1	0	1	1	1,12	2,78	11,14	20,89	10,45	7,46	39,93
0	0	0	1	1	1	1,09	2,78	9,27	22,89	10,33	7,39	41,70

Tableau D3 : Résultats pour trois quintes agrandies ; tri pour la meilleure valeur de $q + p_{E4} + p_{A3} + p_{D4}$

B*b*3	E*b*4	A*b*3	C#4	F#3	B	q	p_{Bb3}	p_{Eb4}	p_{E4}	p_{A3}	p_{D4}	$q + p_{E4} + p_{A3} + p_{D4}$
1	1	1	1	0	0	0,90	4,27	12,75	16,78	6,52	5,21	29,41
1	1	1	0	1	0	0,80	4,12	12,40	17,40	8,13	5,21	31,55
1	1	1	0	0	1	0,87	4,23	12,66	16,95	7,82	6,96	32,60
1	0	1	1	1	0	0,79	4,09	11,02	18,92	8,09	5,21	33,02
0	1	1	1	1	0	0,84	2,78	10,66	19,17	8,19	5,21	33,41
1	1	0	1	1	0	0,86	4,22	12,63	19,31	8,24	5,21	33,63
1	0	1	1	0	1	0,85	4,20	11,16	18,60	7,79	6,91	34,16
0	1	1	1	0	1	0,91	2,78	10,78	18,85	7,88	7,03	34,67
1	1	0	1	0	1	0,94	4,35	12,93	18,99	7,93	7,10	34,95
1	0	1	0	1	1	0,77	4,06	10,98	19,02	9,20	6,75	35,74
0	1	1	0	1	1	0,81	2,78	10,63	19,27	9,37	6,84	36,30
1	1	0	0	1	1	0,84	4,18	12,54	19,40	9,46	6,89	36,60
0	0	1	1	1	1	0,80	2,78	9,27	20,76	9,31	6,81	37,67
1	0	0	1	1	1	0,82	4,15	11,09	20,94	9,39	6,86	38,01
0	1	0	1	1	1	0,88	2,78	10,73	21,33	9,58	6,96	38,75

Tableau D4 : Résultats pour quatre quintes agrandies ; tri pour la meilleure valeur de $q + p_{E4} + p_{A3} + p_{D4}$

B*b*3	E*b*4	A*b*3	C#4	F#3	B	q	p_{Bb3}	p_{Eb4}	p_{E4}	p_{A3}	p_{D4}	$q + p_{E4} + p_{A3} + p_{D4}$
1	1	1	1	1	0	0,67	3,90	11,87	18,33	7,85	5,21	32,07
1	1	1	1	0	1	0,71	3,97	12,05	18,02	7,59	6,64	32,97
1	1	1	0	1	1	0,65	3,87	11,82	18,43	8,81	6,52	34,41
1	0	1	1	1	1	0,64	3,85	10,70	19,65	8,77	6,50	35,56
0	1	1	1	1	1	0,68	2,78	10,39	19,89	8,88	6,56	36,01
1	1	0	1	1	1	0,69	3,94	11,96	20,01	8,94	6,60	36,25

Tableau D5 : Résultats pour cinq quintes agrandies ; tri pour la meilleure valeur de $q + p_{E4} + p_{A3} + p_{D4}$

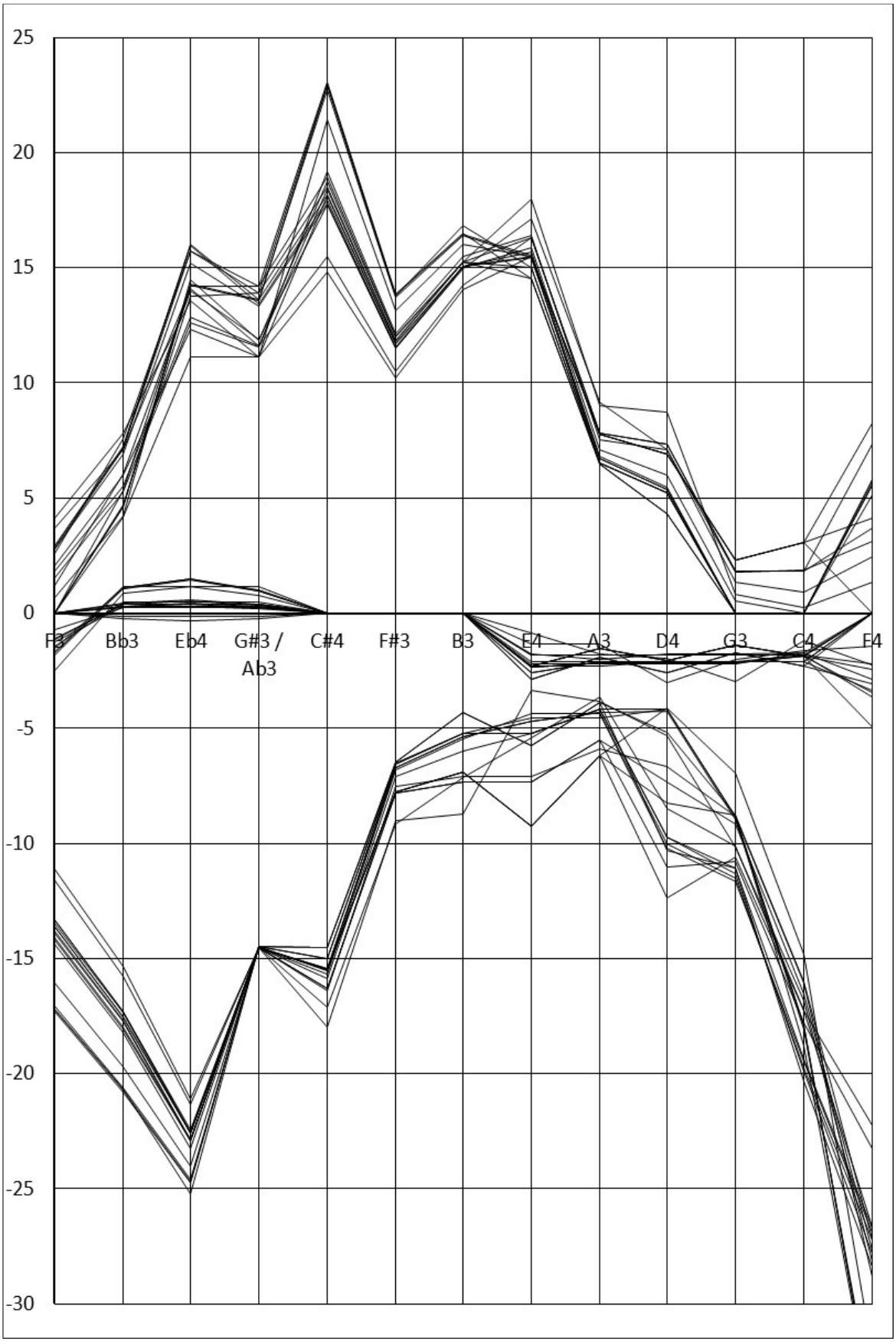
B*b*3	Eb*4*	A*b*3	C#4	F#3	B	q	p_{Bb3}	p_{Eb4}	p_{E4}	p_{A3}	p_{D4}	$q + p_{E4} + p_{A3} + p_{D4}$
1	1	1	1	1	1	0,56	3,72	11,45	19,06	8,48	6,34	34,44

Tableau D6 : Résultats pour six quintes agrandies

Appendice E Tableaux d'accord (pour A4 = 440 ; ***donc : <u>non pas</u>* <u>415</u> !)**

A3=220	3 tierces et 5 quintes égales		
Partition F3 F4	Batte-ments	tierces majeures	Batte-ments
A4 A3	0.0	F3 A3	1.9
A3 D4	1.9	F3 A3	12.5
D4 G3	-1.9	G3 B3	1.9
G3 C4	1.9	G#3 C4	12.3
C4 F3	-1.2	A3 C#4	8.3
F3 F4	0.0	A3 D4	5.8
F4 A3	0.4	B3 D#4	16.2
A3 D#4	-0.4	C4 E4	1.9
D#4 G#3	0.4	C#4 F4	19.5
G#3 C#4	0.0	F4 A4	3.9
C#4 F3	0.0		
F3 B3	0.0		
B3 E4	1.9		
E4 A3	-1.9		
E4 A4	-3.9		

A3=220	3 tierces et 6 quintes quasi égales		
Partition F3 F4	Batte-ments	tierces majeures	Batte-ments
A4 A3	0.0	F3 A3	1.7
A3 D4	1.9	F3 A3	12.9
D4 G3	-1.9	G3 B3	1.9
G3 C4	1.8	G#3 C4	12.2
C4 F3	-1.5	A3 C#4	8.0
F3 F4	0.0	A3 D4	5.6
F4 A3	0.5	B3 D#4	16.4
A3 D#4	-0.5	C4 E4	2.0
D#4 G#3	0.5	C#4 F4	20.4
G#3 C#4	0.0	F4 A4	3.3
C#4 F3	0.0		
F3 B3	0.0		
B3 E4	1.9		
E4 A3	-2.1		
E4 A4	-4.3		



Aperçu des tracés des battements d'intervalles, de toutes les alternatives « Bach » présentées.