

# Proposition d'un algorithme d'évaluation global, des « bons tempéraments », et ceux « de Bach »

Broekaert Johan ; broekaert.devriendt(at)telenet.be

## Résumé

Une formule de mesure globale des impuretés de tempérament musical est élaborée. Elle semble conduire à des résultats significatifs concernant l'évaluation de tempéraments. En plus, les résultats de classement s'accordent très bien avec les recherches de pointe, historiques et musicologiques, du professeur H. Kellat, qui démontre quelles caractéristiques essentielles devraient être propres aux prétendus « tempéraments de Bach ».

## Mots Clés

Bon tempérament ; accord auditif ; clavier ; intervalle ; impureté, diatonique  
Well temperament ; circulating temperament ; evaluation ; auditory tuning ; keyboard ; interval ;  
impurity ; diatonic ; Bach

## 1 Historique Brève du Tempérament de Bach

Une historique brève du tempérament de Bach va nécessairement de pair avec une historique des bons tempéraments. Aux endroits significatifs, les bons tempéraments seront mentionnés brièvement.

1681 A. Werckmeister publie « Orgelprobe », et mentionne « wohl » et « temperiren » à la page titre, ce qui conduira plus tard au terme allemand « Wohltemperiert » (= bien tempéré). On peut supposer que les bons tempéraments existaient avant cette publication. Werckmeister utilise également les mêmes termes plus tard (1686, p. 118 (108) and 120 ; 1689 page titre et p. 61 ; 1698. p. 7).

1722 / 1740-1742 J. S. Bach publie “Das wohltemperirte Clavier” (WTC).

1771 J. Kirnberger, élève de Bach, publie « Die Kunst des reinen Satzes in der Musik », il prétend plus tard, qu'il reflète l'enseignement de Bach (1782 p. 3 et 5 ; Forkel, par. VII p. 41). Il explique son tempérament Kirnberger III en 1779, dans une lettre à Forkel (Kellat, 1980, p. 37 footnote 63 ; 1982, p. 140)

1776 F. Marpurg publie “Versuch über die musikalische Temperatur”. Il prétend (p. 212-213), se référant à Kirnberger, son professeur, que Bach aurait dû utiliser et enseigner l'utilisation du « Gleichschwebende Temperatur » [tempérament égal (= à battements d'harmoniques égaux) = 12TET]. Kirnberger nie très fermement, ce qui ressort clairement de ses lettres à Forkel (Kellat

1980, note de bas de page 20, p. 42), mais il préfère en outre garder son opinion privée (Kelletat 1980, note de bas de page 19, p. 42).

L'opinion de Marpurg concernant Bach et son application du 12TET est acceptée et copiée dans d'innombrables publications sur une période de deux siècles, de Forkel jusqu'à (Bosanquet)–Kelletat.

La période baroque a été une période très fertile dans l'histoire, et dans toute l'Europe, en ce qui concerne la création de bons tempéraments ; il suffit de penser à Vallotti, Mercadier, Neidhardt, Lambert, Sorge, etc...

1802 J. Forkel publie "Über Johan Sebastian Bach's Leben, Kunst und Kunstwerke". Forkel était ami des fils de Bach, Carl Philipp Emanuel et Wilhelm Friedemann, ainsi que de Kirnberger. Il témoigne (par. VII p. 41) que la publication de Kirnberger reflète en effet l'enseignement de Bach.

1876 R. Bosanquet publie "An elementary treatise on Musical Intervals and Temperament". Il doute fortement que Bach ait pu utiliser le 12TET (p. 29-30), mais à son époque son message n'est pas vraiment « saisi » comme révélateur.

1960 H. Kelletat publie "Zur musikalischen Temperatur". *Probablement la toute première publication après Bosanquet, exprimant de forts doutes que Bach ait pu utiliser le 12TET.* La publication s'appuie sur de nombreuses citations apportant des preuves historiques et musicologiques sur ce point. *Le tempérament Kirnberger III, ou quelque autre tempérament comparable, aurait été le tempérament appliqué par Bach* (Kelletat, 1982, p.141).

A partir de l'hypothèse ci-dessus « *Kirnberger III, ou quelque autre comparable* », la comparable doit probablement être préférée : le WTC de Bach est publié en 1722 / 1740-42, et les tempéraments Kirnberger (I, II, III) sont publiés en 1766, 1771 et 1779, bien plus tard que le WTC.

A ce stade, en raison des dates factuelles, on pourrait supposer, par exemple, que Kirnberger ait utilisé un autre tempérament avant 1766, probablement celui qu'il aurait pu utiliser avec Bach, –un tempérament qui aurait dû être simple à accorder (Forkel, par III, p.17)–, mais qu'il a peut-être cherché plus tard un autre tempérament de même qualité, mais plus facile encore à accorder que celui de Bach ?

Il faut admettre, qu'il n'existe aucune source écrite qui puisse confirmer cette hypothèse.

1966 H. Kelletat publie sa version du « tempérament Bach » (Kelletat, 1982, table 9, p. 155).

1977 H. Kellner ; 1979 B. Billeter ; 1979 J. Barnes : propositions de « tempérament Bach » ; voir la liste de références.

1980 H. Kelletat publie « Zur musikalischen Temperatur I. Johann Sebastian Bach und seine Zeit ». Même contenu que la publication de 1960.

1982 H. Kelletat publie "Zur musikalischen Temperatur II. Wiener Klassik". Un certain nombre de tempéraments reçoivent l'attribut de « tempérament Bach » : Kirnberger III, Kelletat, Kellner et Billeter, où l'on prétend qu'il est impossible de les distinguer les uns des autres à l'oreille (observation 3, p. 142)

Désormais de nombreux « Tempéraments Bach » sont proposés. La liste suivante n'est certainement pas complète.

1994 M. Lindley: voir la liste de références.

1998 A. Sparschuh: "Stimm–Arithmetic des wohltemperierten Klaviers von J. S. Bach". C'est probablement la première approche de reconstruction d'un « Tempérament Bach » basé sur une figure à spirales, dessinée par J. S. Bach, au haut d'une partition de « Das wohltemperirte Clavier ». Des alternatives sont proposées ultérieurement.

- 2000 M. Jira: voir la liste de références  
 2001 M. Zapf: voir la liste de références. Il s'agit d'une variante de la proposition de Sparschuh.  
 2004 J. C. Francis: voir la liste de références. Inspiré par Sparschuh.  
 2005 B. Lehman: voir la liste de références. Inspiré par les spirales de Bach, mais différent des propositions de Sparschuh.  
 2005 P. Allain-Dupré: voir la liste de références  
 2005 E. Jobin: Une nouvelle interprétation des spirales de Bach, basé sur le mésotonique et des calculs en cents.  
 2006 J. O'Donnell ; 2006 M. Spanyi: voir la liste de références.  
 2007 G. Interbartolo, P. Venturino: voir la liste de références  
 2008 C. Di Veroli ; 2008 E. Amiot ; 2020 J. Broekaert : voir la liste de références

## 2 Evaluation des Bons Tempéraments

Il n'est pas facile de définir un algorithme globalisant pour l'évaluation de bons tempéraments (Hall D. ; p. 275-277). La plupart des recherches et des évaluations sur les caractéristiques des tempéraments sont basées sur l'évaluation des propriétés d'intervalles mesurées en proportions ou en cents. Certaines discussions musicales « subjectives » sur des caractéristiques particulières font très souvent partie d'une évaluation.

La mesure des proportions d'intervalle est une pratique musicologique courante depuis Pythagore au moins. Elle a été utilisée intensivement pendant la période baroque, basé sur des mesures sur monocordes, et plus tard les calculs sont facilités par l'introduction du cent, une mesure logarithmique des proportions.

Et pourtant, pour les musiciens et les accordeurs auditifs ces nombres sont plutôt abstraits, et ce sont principalement les battements perceptibles qui leur importent. Ces battements sont liés à la consonance et à la dissonance. Des recherches plus approfondies sur les propriétés des taux des battements d'harmoniques des intervalles pourraient donc être intéressantes, en ce qui concerne l'accordage auditif du clavier musical et les caractéristiques globales des tempérament.

### 2.1 Mesure de la Pureté des Intervalles

L'accord auditif d'un clavier musical est normalement basé sur l'évaluation des taux de battement des quintes et des tierces majeures, dans l'échelle chromatique de Fa2 à Fa3 (Calvet A.). Pour permettre l'accord auditif, il faut disposer d'un tableau répertoriant les taux de battement des quintes. Les taux de battement de certaines tierces majeures pourraient également importer. Les taux de battement des quintes et des tierces majeures sur les notes de la gamme chromatique Fa2–Fa3 peuvent être calculés au moyen des formules aux tableaux ci-dessous. Les symboles  $q_{\text{Note}}$  et  $p_{\text{Note}}$  représentent les taux de battement des quintes et des tierces majeures. Les formules pour  $q_{\text{Do}}$  et  $p_{\text{Do}}$  ont été appliquées par A. Kellner (1977), et il a également appliqué une formule similaire pour la tierce mineure sur Mi .

$q_{Fa} = 2Do3 - 3Fa2$	$q_{Do} = 4Sol2 - 3Do3$	$q_{Sol} = 2Ré3 - 3Sol2$	$q_{Ré} = 4La2 - 3Ré3$
$q_{La} = 2Mi3 - 3La2$	$q_{Mi} = 4Si2 - 3Mi3$	$q_{Si} = 4Fa\#2 - 3Si2$	$q_{Fa\#} = 2Do\#3 - 3Fa\#2$
$q_{Do\#} = 4Sol\#2 - 3Do\#3$	$q_{Sol\#} = 2Mib3 - 3Sol\#2$	$q_{Mib} = 4Sib2 - 3Mib3$	$q_{Sib} = 4Fa2 - 3Sib2$

Tableau 1 : calcul des taux de battements des quintes dans l'échelle Fa2 – Fa3

$p_{Fa} = 4La2 - 5Fa2$	$p_{Do} = 4Mi3 - 5Do3$	$p_{Sol} = 4Si2 - 5Sol2$	$p_{Ré} = 8Fa2 - 5Ré3$
$p_{La} = 4Do\#3 - 5La2$	$p_{Mi} = 8Sol\#2 - 5Mi3$	$p_{Si} = 4Mib3 - 5Si2$	$p_{Fa\#} = 4Sib2 - 5Fa\#2$
$p_{Do\#} = 8Fa2 - 5Do\#3$	$p_{Sol\#} = 2Do3 - 5Sol\#2$	$p_{Mib} = 8Sol2 - 5Mib3$	$p_{Sib} = 43D4 - 5Sib$

Tableau 2 : calcul des taux de battements des tierces majeures dans l'échelle Fa2 – Fa3

## 2.2 Les « Bons Tempéraments »

Une définition musicale possible du « Bon Tempérament » est donnée par Kelletat (1960 ; 1981, p. 9), basée sur Werckmeister (1681, 1689) :

*<< Un “bon tempérament” implique une division mathématico-acoustique et musico-pratique des tons d’une octave en douze parties, afin qu’il soit possible, sur base du système pur, d’obtenir un jeu irréprochable pour toutes les tonalités, tout en s’efforçant d’obtenir une pureté maximale des intervalles diatoniques.*

*Ce tempérament se présente comme un lissage parcimonieux, lié à une relaxation et extension du système mésotonique, comme demi tons à battement inégal et comme tempérament égal. >>*

## 2.3 Un Bon Tempérament Optimal

Une grande collection de bons tempéraments est disponible. On peut se demander lequel est le meilleur, sur la base de la définition ci-dessus. Il pourrait donc être utile de définir dans un premier temps une espèce de bon tempérament mathématique optimal, à des fins de comparaison. Une exigence majeure conformément à la définition du paragraphe 2.2 consiste à maintenir les intervalles diatoniques du système de tons naturels–harmoniques aussi purs que possible. L'accordeur auditif évaluera donc principalement les quintes diatoniques (sur Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La) et les tierces majeures (sur Fa, Do, Sol).

Une approche intuitive de cette exigence pourrait être de calculer l'impureté la plus faible possible de ces intervalles. Mathématiquement cela correspond à la minimisation de la somme suivante :

$$p_{Do}^2 + p_{Ré}^2 + p_{Mi}^2 + p_{Fa}^2 + p_{Sol}^2 + p_{La}^2 + q_{Do}^2 + q_{Fa}^2 + q_{Sol}^2$$

Suite aux conseils du prof. E. Amiot, le minimum de cette somme peut être facilement déterminé par le calcul des dérivées partielles aux variables (les notes inconnues), mises à zéro, suivi de la résolution de l'ensemble des équations obtenues (voir annexe 1).

La procédure ci-dessus conduit à un tempérament tenant des taux de battement des quintes de  $-0,89$  à  $-3,16$  battements par seconde (bps.). Ceci n'est pas pratique pour un accordeur auditif. Il doit en effet connaître et fixer neuf taux de battements différents, ou, si ceux-ci ne sont pas connus, il doit mesurer chaque taux de battements, calculer leur somme et vérifier si cette somme obtenue peut d'avantage être minimisée. C'est un travail de précision très dur, itératif et difficile, et ce n'est certainement pas la pratique courante.

Mais il est facile, pour n'importe quel musicien ou accordeur, d'évaluer les égalités des taux de battements (= impureté) d'intervalle. L'obtention d'une meilleure égalité possible correspond à la minimisation de la somme de toutes les différences entre une seule impureté et la valeur moyenne de toutes les impuretés. Il y a 9 intervalles à définir, pour seulement 6 variables (les notes diatoniques sauf La). Il n'est normalement pas possible de résoudre un tel ensemble de conditions. On ne peut viser qu'un écart minimum (voir annexe 2).

Le taux de battement moyen obtenu, pour les quintes diatoniques majeures et les tierces majeures entre Fa2 et Fa3, est de  $-1,85 \dots$  bps., avec des écarts mineurs seulement par rapport à cette valeur ( $\leq 0,33$ ) ; voir tableau 4.

	Fa2	Fa#2	Sol2	Sol#2	La2	Sib2	Si2	Do3	Do#3	Ré3	Mib3	Mi3
$f_{Note}$	175.67	184.73	196.60	207.98	220.00	234.14	246.22	262.75	277.22	293.96	312.10	328.93
$q_{Note}$	-1.52	0.26	-1.89	0.26	-2.15	0.26	0.26	-1.83	0.26	-1.87	0.26	-1.89
$p_{Note}$	1.65	12.91	1.89	11.07	8.90	5.13	17.30	1.97	19.23	8.06	12.30	19.23
cents	12.28	-0.15	9.51	4.88	0.00	9.79	-2.62	10.31	2.48	2.18	7.44	-3.01

Tableau 4 : gamme avec égalité optimale du taux de battement des quintes et des tierces majeures dans le Do–majeur

Cette gamme peut être auditivement accordable, si l'on compte avec une légère diminution ou augmentation sur Fa2 et La2, mais il faut admettre que ce ne sera toujours pas facile. Heureusement, une alternative très proche et facilement accordable de façon auditive peut être envisagée : voir le « Mésotonique Bien Tempéré » ci-dessous.

## 2.4 Le Mésotonique Bien Tempéré

Inspiré par Jobin et la gamme auditivement accordable et optimale obtenue ci-dessus, un tempérament très pratique et pur peut être défini, contenant 5 quintes diatoniques et les trois tierces diatoniques tenant une *égalité mathématique exacte* de leurs taux de battements.

$$q_{Do} = q_{Sol} = q_{Ré} = q_{La} = -p_{Do} = -p_{Fa} = -p_{Sol} = q_{Mi}$$

Les équations ci-dessus sont un ensemble de sept équations contenant seulement six variables ; le plus souvent, de tels ensembles ne peuvent pas être résolus. Cet ensemble peut être résolu cependant, car il a été constaté que l'ensemble est redondant : l'une des exigences,  $q_{Mi}$  ou  $p_{Sol}$ , peut être supprimée.

La solution est très simple, et pourrait même, telle qu'elle est formulée ci-dessous, également paraître acceptable aux musicologues baroques, familiers aux proportions :

$$-q_{Note} = p_{Note} = \frac{La2}{113} = \frac{5Fa2}{451} = \frac{Do3}{135} = \frac{Sol2}{101} = \frac{Ré3}{151} = \frac{Mi3}{169} = \frac{2Si2}{253}$$

Dans la lignée de Jobin, et pour compléter la gamme, on peut aussi accorder trois quintes parfaites –facilement accordables– (sur Si, Fa#, Do#), et trois également et très légèrement augmentées (sur Lab, Mib, Sib) :

$$q_{Si} = q_{Fa\#} = q_{Do\#} = 0 \quad \text{and} \quad q_{Lab} = q_{Mib} = q_{Sib}$$

L'ensemble des solutions conduit à l'échelle suivante, tableau 5 :

	Fa2	Fa#2	Sol2	Sol#2	La2	Sib2	Si2	Do3	Do#3	Ré3	Mib3	Mi3
$f_{Note}$	175.61	184.71	196.64	207.80	220.00	234.02	246.28	262.83	277.07	293.98	311.90	329.03
$q_{Note}$	-1.17	0.00	-1.95	0.39	-1.95	0.39	0.00	-1.95	0.00	-1.95	0.39	-1.95
$p_{Note}$	1.95	12.51	1.95	12.32	8.27	5.84	16.17	1.95	19.54	7.79	13.62	17.28
cents	9.85	-2.67	5.64	1.24	0.00	6.94	-4.62	7.96	-0.71	1.87	4.27	-3.16

Tableau 5 : Le Mésotonique Bien Tempéré

L'accord auditif de ce tempérament est facile : il détient huit taux de battements égaux ; voir les intervalles avec une marque « = » sur la fig. 1. Les quintes restantes sauf celle sur Fa sont parfaites (marquées 0), ou presque parfaites (marquées -); la quinte sur Fa (ligne pointillée) est « schismatique » (« résiduelle »).

Kelletat insiste dans ses quatre livres (1960, 1980, 1982, 1994), sur l'importance de la grandeur des intervalles de demi-tons naturels et chromatiques. Une certaine similitude avec les demi-tons mésotoniques est requise, et à son avis, les demi-tons de Kirnberger III sont satisfaisants pour la musique de Bach et pour les « Liedern » de Schubert.

Les caractéristiques des demi-tons sont représentées graphiquement à la fig. 2.

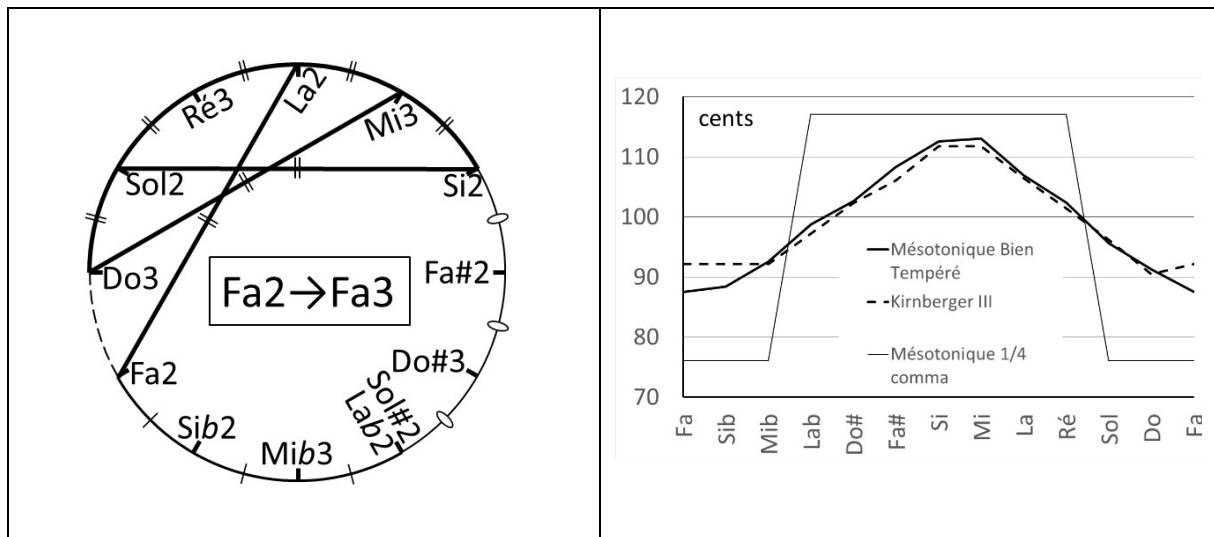


Fig 1: Le Mésotonique Bien Tempéré ; Cycle des quintes

Fig. 2: Le Mésotonique Bien Tempéré ; Caractéristiques des demi tons

### 3 Évaluation des Tempéraments

#### 3.1 Évaluation Numérique

Les tempéraments peuvent être évalués sur la base de la somme quadratique des différences d'impuretés (voir annexe 2). La moyenne quadratique de cette somme donne l'étalement des écarts d'impureté par rapport à l'impureté moyenne, exprimé en bps. Pour normaliser le résultat, nous multiplions la moyenne quadratique par  $440/La3$ ,  $La3$  étant la hauteur du diapason utilisé. Cela conduit à la définition d'impureté diatonique suivante (voir la définition de la somme à l'annexe 2) :

$$= \frac{440}{La3} \times \sqrt{\frac{\sum \Delta_{Qui\ et\ Ti.Notes\ diatoniques}^2}{9}}$$

De nombreux tempéraments présentent une très bonne pureté diatonique, mais beaucoup d'entre eux ne satisfont pas à certaines conditions de pureté « auxiliaires » pour un bon tempérament. Par conséquent, les conditions suivantes ont été sélectionnées pour éliminer les tempéraments non bien tempérés :

1. Augmentation des quintes : les quintes augmentées ne sont normalement pas acceptées. Pour limiter l'augmentation autorisée, nous prenons en compte l'augmentations totale des quintes obtenues pour l'optimum calculé (tableau 4 ; = 3,7 cents) ; ceci correspond à la condition selon laquelle cette augmentation complète n'est fixée que sur une quinte. Cela conduit à une valeur arrondie égale à la somme d'une quinte parfaite plus ladite augmentation totale : c'est-à-dire  $702.0 + 3.7 = 706.0$  cents.
2. Diminution de quintes: le tempérament Kirnberger II a été rejeté, en raison d'une diminution excessive des quintes (Kelletat 1980, p. 47). La plus petite quinte Kirnberger II mesure 691.2 cents. Comme limite à la diminution des quintes, une valeur minimale de 692,0 cents a été fixée

Sur une collection de 125 tempéraments historiques, plus de 70 tempéraments ont dû être écartés en raison des conditions ci-dessus. Certains tempéraments du tableau 6 sont marqués par « bps » : ce sont des tempéraments recalculés, basés sur une division égale de la fréquence de battement du

comma. Le classement dans le tableau 6 a été obtenu, pour les tempéraments retenus, ceux qui sont donc censés être un bon tempérament :

Optimal beating equality	0.170	Stanhope bps	1.562	Neidhardt 2 bps	2.356
Well Tempered Meantone	0.245	Mercadier bps	1.567	Sorge 1758 bps	2.379
Sievers	0.952	Neidhardt-4	1.568	Sorge 1744 bps	2.400
Vallotti - Tartini	1.021	Stanhope	1.589	Bendeler III bps	2.410
Vallotti bps	1.094	Neidhardt 1 bps	1.589	Neidhardt-3	2.426
<b>Kirnberger III bps</b>	1.171	Barnes	1.641	Sorge1728	2.426
Jobin	1.217	Lehman_1_6_Pyth	1.641	Sorge1744	2.441
<b>Kirnberger III</b>	1.235	Werckmeister III bps	1.652	Bendeler-III	2.542
<b>Kirnberger III ungleich</b>	1.246	Neidhardt-1	1.663	Bendeler-I	2.542
<b>Kelletat</b>	1.298	Lehman bps	1.694	Bendeler-II	2.592
<b>Kellner bps</b>	1.303	Werckmeister III	1.737	Werckmeister II	3.054
<b>Billeter</b>	1.349	Lambert 1774	1.755	Romieu -1/9 sc	3.059
<b>Kellner</b>	1.353	Weingarten / Gabler	1.834	Meantone -1/9 c	3.059
Young 1800	1.426	Barca (Asselin)	1.838	Romieu -1/10 sc	3.386
Barca (Devie)	1.445	Young / Van Biezen	2.074	"Barthold Fritz"	3.510
Mercadier	1.502	Neidhardt-2	2.274	<b>12-TET</b>	3.653
Neidhardt 4 bps	1.547	Asselin	2.321		

Tableau 6 : Bons tempéraments classés selon leur pureté diatonique

Il est très remarquable que sur les 13 premiers de la liste, on trouve 7 tempéraments marqués **gras-italique** qui ont reçu le prédicat « Bach » de Kelletat (1982, p. 141-142) ; Kelletat prétend que les différences entre ces tempéraments ne peuvent pas être perceptibles à l'oreille (observation 3, p. 142).

Kelletat (1960, 1966, 1980, 1982) a provoqué une percée historique qui a conduit à de nombreuses propositions supplémentaires de « Tempérament Bach » (voir l'historique brève), *suite à sa très forte démonstration historique et musicologique que le tempérament Kirnberger III ou tout autre comparable aurait été utilisé par J. S. Bach, et non le 12 TET, comme on l'a supposé pendant près de deux siècles.*

Le **12 TET**, très remarquablement, est classé tout à la fin de la liste.

La tête du classement des tempéraments écartés pourrait aussi être intéressante :

Vogel (Norden)	0.425	Silbermann	1.021	Schlick ~ Husmann/Lange/Ratte	1.156
Mésotonique 1/5 c.s.	0.567	Mésotonique bps	1.077	Mésotonique 1/4 comma	1.156
Louet	0.567	Geib / Neu-Bamberg	1.107	Rameau in F	1.156
Vogel (Stade)	0.608	Lambert / Chaumont	1.156	Rameau sec. TLA	1.156
Gabler	0.680	Corrette	1.156	Marpurg	1.156
Vogel bps	0.724	Schlick / Dupont	1.156	Rameau	1.156

Table 7 : Tempéraments « pas bons ». classés selon leur pureté diatonique (tête de liste seulement)

La très grande pureté des six premiers tempéraments est remarquable.

Les fameux tempéraments Silbermann et mésotonique ont une position favorable.

Très remarquable est la position du Meantone  $-1/5$  s. c (mésotonique  $-1/5$  c. s.). Ce tempérament a été discuté par L Rossi (1666) et J. Sauveur (1701). Les propriétés diatoniques de la tonalité en C-majeur sont très proches de celles du « Mésotonique Bien Tempéré » (Well Tempered Meantone) et du tempérament à « égalité de battement optimale » (Optimal beating equality).

Il n'est pas impossible qu'une espèce de mésotonique bien tempéré ait pu dériver du Mésotonique  $-1/5$  c. s., mais aucun document écrit sur cette hypothèse n'a encore été trouvé ou discuté.

### 3.2 Évaluation Graphique

Les bons tempéraments ont un tracé assez caractéristique de quintes, surtout aussi de tierces. La figure 3 présente les tracés des 13 premiers tempéraments du tableau 6. On constate que la « bande passante » dans laquelle se déroulent les tracés est assez restreinte.

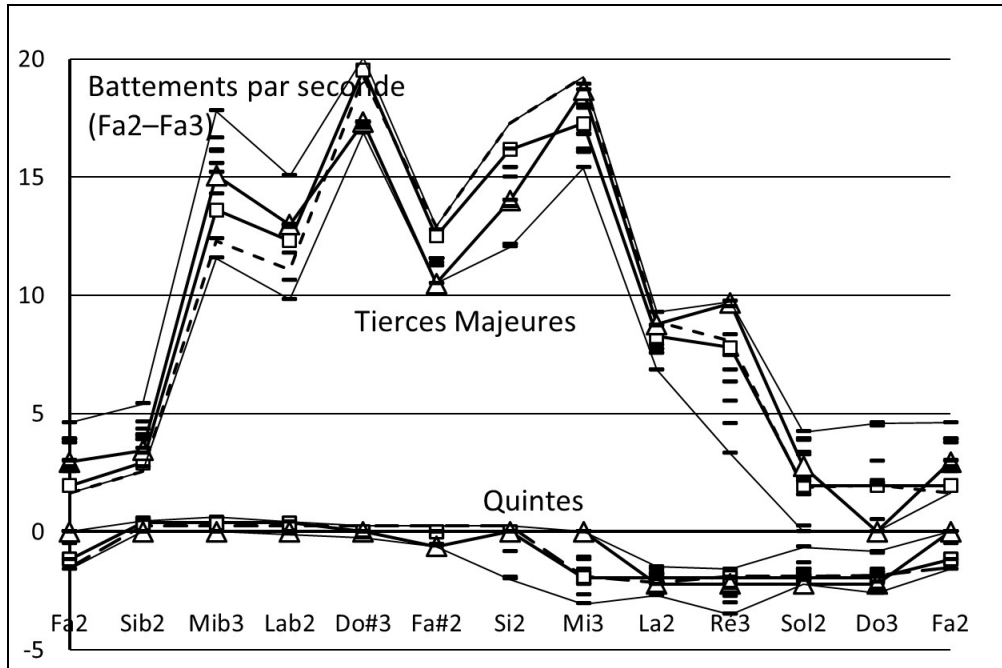


Figure 3: Tempéraments Bien Tempérés (selection Bach)

Depuis Sparschuh, un certain nombre d'hypothèses ont été formulées, basées sur l'appariement des caractéristiques des quintes avec les caractéristiques graphiques des boucles sur la partition WTC de Bach, voir figure 4 ci-dessous.

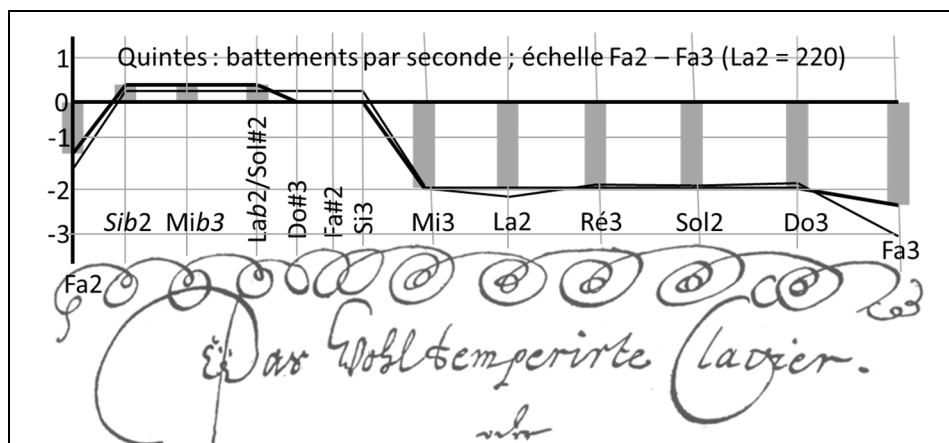


Figure 4 : Le Mésotone Bien Tempéré

Tracé des impuretés de quintes, en bps., Tracé gras / barres grises

Tracé fin : tempérament auditif « optimal » (tableau 5)

Il n'est pas facile de se fier uniquement à ce type d'analyse pour démontrer une sorte de preuve que le tempérament comparé peut être lié à Bach.

Dans le tableau 6 par exemple, il y a une certaine distance entre l'hypothèse de Jobin (classé en position 7/52 avec une impureté de 1,217) et Lehman (en position 24/52 avec une impureté de 1,641), alors que les deux seraient un « tempérament Bach », basé sur la perception des boucles. Les



hypothèses de Sparschuh et Zapf ont subi un certain nombre de révisions, et il reste difficile de les faire correspondre avec un diapason historique plausible.

Néanmoins, il vaut la peine de faire cette comparaison pour le Mésotonique Bien Tempéré également, voir fig. 4. On peut constater qu'il épouse très bien les boucles, tout comme pour Jobin (non dessiné sur la figure) dont il s'est inspiré, et l'échelle optimale (trait fin) convient assez bien également.

## Conclusion

Sur la base du classement au tableau 6 et des preuves historiques et musicologiques solides publiées. évaluées et fournies par Kelletat, on peut supposer que :

- La mesure des impuretés proposée au paragraphe 3 peut être utilisée pour une évaluation globale des bons tempéraments, en classant les tempéraments en fonction des chiffres d'impuretés obtenus.  
Cette mesure d'impureté est facile à calculer.
- Ce classement conduit à l'observation d'une forte concordance avec les investigations et hypothèses de Kelletat, en particulier en ce qui concerne les possibles candidats comme « Tempéraments Bach ».
- Le Mésotonique Bien Tempéré du tableau 5 semble un candidat très plausible comme « Tempérament Bach » :
  - Il est comparable à Kirnberger III, également en ce qui concerne les demi-tons
  - Son accordage auditif est aisé (égalité des taux de battements)
  - Il a les meilleures qualités d'impureté
  - Ses caractéristiques de quintes s'accordent également bien avec les spirales sur une partition du WTC de J. S. Bach

## Remerciements

Je tiens à exprimer mes sentiments de gratitude les plus sincères envers Amiot E., Calvet A., Jobin E. et Paintoux T., mais aussi Baroin G. pour la compilation d'une vidéo intéressante sur ce sujet. Leur attitude ouverte a permis un échange d'idées assez intense, ce qui a permis une meilleure compréhension et une évolution d'idées concernant le tempérament musical et les questions de l'accord, permettant le développement des idées et des concepts exprimés dans ce texte.

Remerciements à ma fille Hilde : c'est elle qui m'a incité à rechercher ce que veulent les musiciens, plutôt que de faire la recherche de ce que pourrait bien être le tempérament préféré d'une personnalité.

---

## Références

- Allain-Dupré P. 2005: "Justesses et Tempéraments" (academia.edu) variation of Lehman's proposal.  
Amiot E. 2008: "Discrete Fourier Transform and Bach's Good Temperament"  
Barnes J. 1979: "Bach's Keyboard Temperament: Internal Evidence from the Well-tempered clavier"  
Billeter B. 1979: "Anweisung zum Stimmen von Tasteninstrumenten in verschiedenen Temperaturen" (ISBN 3-87537-160-7).

- Billeter B. 2008: "Zur 'Wohltemperirten' Stimmung von Johann Sebastian Bach: Wie hat Bach seine Cembali gestimmt?" ; (Ars Organi Zeitschrift, 2008-3, p. 18-21)
- Bosanquet R. 1876 : "An elementary treatise on Musical Intervals and Temperament".
- Broekaert J. 2020: "Le Mésotonique Tempéré de Bach" (Pianistik No 111, dec. 2020, p. 4-19)
- Calvet André, 2020 : "Le Clavier Bien Obtempéré"
- Di Veroli C. 2008: "Unequal Temperaments: Theory, History and Practice" (e-book)
- Forkel J. 1802 : "Über Johan Sebastian Bach's Leben, Kunst und Kunstwerke".
- Francis J. C. 2004: "The Keyboard Temperament of J. S. Bach" (Eunomios).
- Francis J. C. 2005-2: "Te Esoteric Keyboard Temperaments of J. S. Bach"
- Francis J. C. 2005-7: "Das Wohltemperirte Clavier, Pitch, Tuning and Temperament Design"
- Hall D., 1973 : "The Objective Measurement of Goodness-of-Fit for Tunings and Temperaments", Journal of Music Theory, Vol. 17. No. 2. (Autumn 1973)
- Interbartolo G., Venturino P 2007: Bach 1722 "Il temperamento de Dio". {ISBN A000068628}.
- Jira M. 2000: "Musikalische Temperaturen und Musikalischer Satz in der Klaviermusik von J. S. Bach" (2000, Hans Schneider – Tutzing}. ISBN 3-79521-004-6).
- Jobin E. 2005 : "BACH et le Clavier bien Tempéré" ; (website of "Clavecin en France").
- Kelletat H. 1960 : "Zur musikalischen Temperatur"
- Kelletat H. 1981 : "Zur musikalischen Temperatur"; Band I. Johann Sebastian Bach und seine Zeit"
- Kelletat H. 1982": "Zur musikalischen Temperatur" ; Band II. Wiener Klassik"
- Kelletat H. 1994 : "Zur musikalischen Temperatur" ; Band III. Franz Schubert
- Kellner H. 1977: "Eine Rekonstruktion der wohltemperierten Stimmung von Johann Sebastian Bach"
- Kirnberger J. 1771 : "Die Kunst des reinen Satzes in der Musik",
- Kirnberger J. 1782 : "Gedanken über die verschiedenen Lehrarten in der Komposition".
- Lehman B. 2005: "Bach's extraordinary temperament: our Rosetta Stone – 1 ; – 2" (Early Music, vol. 33, No 1, feb 2005, p.3-23 ; vol. 33, No 2, may 2005 p. 211-231).  
Reaction: a number of letters are addressed to "Early Music": Jencka D. (2005–8, p. 545) ; Maunder R. (2005–8, p. 545–546) ; Mobbs K., MacKenzie A. (2005–8, p. 546–547),
- Lehman B. (2006–4) : "Bach's Art of Temperament" ; (Website of Microstick)
- Lindley M. 1994: "A Quest for Bach's Ideal Style of Organ Temperament" (M. Lustig, ed., Stimmungen im 17. und 18. Jahrhundert, Michaelstein, 1997).
- Lindley M., Orgies I. (2006-11) : "Bach style keyboard tuning" ; (Early Music, 2006-11, p. 613-623).
- Marpurg F. 1776 : "Versuch über die musikalische Temperatur".
- O'Donnell J. 2006: : "Bach's temperament, Occam's razor, and the Neidhardt factor" (Early Music, 2006–11, p. 625-633)
- Rossi L, 1666 : "Sistema musico, ouero Musica speculativa doue SI spiegano i più celebri sistemi di tutti i tre generi"
- Sauveur J. 1701 : "Principes d'acoustique et de musique, ou système général des intervalles des sons".
- Spanyi M. 2006: "Kirnberger's Temperament and its Use in Today's Musical Praxis" (Clavichord international – 11 (2007-5), 1, Seite 15-22).
- Sparschuh A. 1999 : "Stimm– Arithmetic des wohltemperierten Klaviers von J. S. Bach" (Deutsche Mathematiker Vereinigung, Jahrestagung 1999, Mainz, S. 154–155).
- Werckmeister A. 1681 : "Orgelprobe"
- Werckmeister A. 1686 : "Musicae Hodegus Curiosus"
- Werckmeister A. 1689 : "Musikalische Temperatur"
- Werckmeister A. 1698 : "Orgelprobe"

Zapf M. 2001: "Handing down the Tradition: The survival of Bach's Finger Technique in an Obscure Nineteenth-Century Clavier Tutor". (De Clavicordio V, sept. 2001, p. 39-44)

## Annexe 1 Le Bonn Tempérament tenant la meilleure pureté diatonique possible

La somme suivante doit être minimisée :

$$\text{Somme Quadratique} = p_{Do}^2 + p_{Ré}^2 + p_{Mi}^2 + p_{Fa}^2 + p_{Sol}^2 + p_{La}^2 + q_{Do}^2 + q_{Fa}^2 + q_{Sol}^2$$

Elaboré en fonction des notes, on obtient:

$$\begin{aligned} \text{Somme Quadratique} = & 34Fa_2^2 + 38Do_3^2 + 50Sol_2^2 + 13Ré_3^2 + 41La_2^2 + 29Mi_3^2 + 32Si_2^2 \\ & -12Fa_2Do_3 - 40Fa_2La_2 - 24Do_3Sol_2 - 40Do_3Mi_3 - 12Sol_2Ré_3 - 40Sol_2Si_2 \\ & -24Ré_3La_2 - 12La_2Mi_3 - 24Mi_3Si_2 \end{aligned}$$

Les coefficients des dérivées partielles mises à zéro, sont donnés au tableau ci-dessous:

N	Fa2	Do3	Sol2	Ré3	Mi3	Si2	=	La2
$\partial/\partial Fa_2$	34	-6	0	0	0	0	=	20
$\partial/\partial Do_3$	-3	19	-6	0	-10	0	=	0
$\partial/\partial Sol_2$	0	-6	25	-3	0	-10	=	0
$\partial/\partial Ré_3$	0	0	-6	13	0	0	=	12
$\partial/\partial Mi_3$	0	-20	0	0	29	-12	=	6
$\partial/\partial Si_2$	0	0	-10	0	-6	16	=	0

Les hauteurs obtenues de Si et de Fa (= comme solution des équations de la matrice ci-dessus ; voir plus loin le tableau ci-dessous) imposent que les six quintes restantes doivent être légèrement augmentées. Ceci peut être exprimé mathématiquement par :

$$\frac{Si_2}{Fa_2} \times (\text{quinte})^6 \times 2^n = \frac{246.57}{175.86} \times (\text{quinte})^6 \times 2^{-4} = 1 \quad \text{et donc} \quad \text{quinte} = 1.500457 \dots$$

Le rapport ci-dessus est légèrement au-dessus de celui de la quinte parfaite, mais si peu que telle quinte peut toujours être acceptable dans un bon tempérament. La création supplémentaire d'un bon tempérament "optimal" à cet effet, ne permet qu'une distribution uniforme sur les six quintes restantes, de cette minime augmentation obligatoire des quintes.

$$q_{\text{Note}} = q_{Si} = q_{Fa\#} = q_{Do\#} = q_{Sol\#} = q_{Mi\flat} = q_{Si\flat}$$

L'ensemble des solutions conduit à l'échelle suivante:

	Fa2	Fa#2	Sol2	Sol#2	La2	Sib2	Si2	Do3	Do#3	Ré3	Mib3	Mi3
$f_{\text{Note}}$	175.86	184.98	197.08	208.24	220.00	234.40	246.57	263.19	277.58	294.04	312.47	329.06
$q_{\text{Note}}$	-1.19	0.22	-3.16	0.22	-1.89	0.22	0.22	-1.26	0.22	-2.11	0.22	-0.89
$p_{\text{Note}}$	0.72	12.71	0.89	11.56	10.32	4.12	17.02	0.28	18.96	9.67	14.29	20.63

## Annexe 2 Bon tempérament accordé auditivement pour une pureté diatonique optimale

Les battements sont normalement négatifs sur les quintes (trop petites) et positifs sur les tierces (trop grandes). Normalement, le taux de battement moyen absolu « M » est donc :

$$M = \frac{-q_{Fa} - q_{Do} - q_{Sol} - q_{Ré} - q_{La} - q_{Mi} + p_{Fa} + p_{Do} + p_{Sol}}{9}$$

Compte tenu des signes, les écarts de taux de battements simples par rapport au taux de battements moyen sont :

$$\text{Quintes : } \Delta_{Qui;Note} = -q_{Note} - M \quad \text{Tierces Majeures : } \Delta_{Ti;Note} = p_{Note} - M$$

La somme appropriée des carrés des écarts devient

$$\begin{aligned} \sum \Delta_{Qui \text{ et } Ti;Note}^2 &= \Delta_{Qui;Fa}^2 + \Delta_{Qui;Do}^2 + \Delta_{Qui;Sol}^2 + \Delta_{Qui;Ré}^2 + \Delta_{Qui;La}^2 + \Delta_{Qui;MiE}^2 \\ &\quad + \Delta_{Ti;Fa}^2 + \Delta_{Ti;Do}^2 + \Delta_{Ti;Sol}^2 \end{aligned}$$

L'élaboration de cette somme en fonction des notes conduit à

$$\begin{aligned} 81 \times \sum \Delta_{Qui \text{ et } Ti;Note}^2 &= \\ &2718Fa_2^2 + 2934Do_3^2 + 3726Sol_2^2 + 1044Ré_3^2 + 3240La_2^2 + 2124Mi_3^2 + 2592Si_2^2 \\ &- 1116Fa_2Do_3 - 216Fa_2Sol_2 + 36Fa_2Ré_3 - 3132Fa_2La_2 + 180Fa_2Mi_3 \\ &- 2376Do_3Sol_2 + 72Do_3Ré_3 + 216Do_3La_2 - 2880Do_3Mi_3 \\ &- 864Sol_2Ré_3 + 324Sol_2La_2 + 540Sol_2Mi_3 - 3240Sol_2Si_2 \\ &- 1998Ré_3La_2 - 90Ré_3Mi_3 - 1242La_2Mi_3 - 1944Mi_3Si_2 \end{aligned}$$

Le tableau ci-dessous présente les coefficients simplifiés des équations obtenues à partir des dérivées partielles aux notes :

	Fa2	Do3	Sol2	Ré3	Mi3	Si2	=	La2
$\partial/\partial Fa_2$	151	-31	-6	1	5	0	=	87
$\partial/\partial Do_3$	-31	163	-66	2	-80	0	=	-6
$\partial/\partial Sol_2$	-2	-22	69	-8	5	-30	=	-3
$\partial/\partial Ré_3$	2	4	-48	116	-5	0	=	111
$\partial/\partial Mi_3$	10	-160	30	-5	236	-108	=	69
$\partial/\partial Si_2$	0	0	-5	0	-3	8	=	0

Calcul des notes diatoniques pour le Do – majeur

Les hauteurs obtenues de Si et de Fa (= comme solution des équations de la matrice ci-dessus ; voir le tableau 4 du texte principal) imposent que les six quintes restantes doivent être légèrement augmentées. Ceci peut être exprimé mathématiquement par :

$$\frac{Si_2}{Fa_2} \times (\text{quinte})^6 \times 2^n = \frac{246.22}{175.67} \times (\text{quinte})^6 \times 2^{-4} = 1 \quad \text{et donc} \quad \text{quinte} = 1.500545 \dots$$

Le rapport ci-dessus est légèrement au-dessus de celui de la quinte parfaite, mais si peu que telle quinte peut toujours être acceptable dans un bon tempérament. La création supplémentaire d'un bon tempérament "optimal" à cet effet, ne permet qu'une distribution uniforme sur les six quintes restantes, de cette minute augmentation obligatoire des quintes.

$$q_{Note} = q_{Si} = q_{Fa\#} = q_{Do\#} = q_{Sol\#} = q_{Mi\flat} = q_{Si\flat}$$

L'ensemble des solutions conduit à l'échelle, affichée dans le texte principal, par. 2.3, tableau 4.