

Semi-continuïteit: Theorie en Toepassingen

© P. H. M. v. Mouche

2005

Verbeterde versie 1.23 (juni 2019)

Voorwoord

Dit typoscript gaat over semi-continuïteit van reëelwaardige functies. Het is omlaag te laden op <http://pvmouche.deds.nl/manus.html> (indien die url nog geldig is).¹ Naast dat deze resultaten *an sich* interessant kunnen zijn, komen ze ook elders soms goed van pas. In het bijzonder komen aan de orde: het lemma van Weierstrass-Lebesgue en een dekpuntstelling voor semi-continue afbeeldingen. Voorkennis is vereist: wat dat dan wel is zal snel duidelijk worden bij het doorbladeren van het typoscript.

De auteur dankt Dr. W. Pijnappel voor zijn hulp en op- en aanmerkingen. Uiteraard houdt de auteur zich aanbevolen voor verdere op- en aanmerkingen die kunnen leiden tot verbeteringen.

Inhoudsopgave

1	Noties	2
2	Karakterisaties	2
3	Oud maakt nieuw	5
4	Rechts- en links-continuïteit	6
5	Maximaliseerders	7
6	Dekpuntstelling	8

¹Voor de vervaardiging ervan is het (idealistische) publieke-domein-tekstzetsysteem L^AT_EX gebruikt onder het (idealistische) besturingssysteem Linux.

1 Noties

Zij $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ een functie, waar X een topologische ruimte is, en zij $a \in X$. g heet continu in a als er voor elke $\epsilon > 0$ een omgeving V van a bestaat zodanig dat $|g(x) - g(a)| < \epsilon$ voor alle $x \in V$. En g heet continu als g continu in elk punt van X is. Omdat $|g(x) - g(a)| < \epsilon$ equivalent is met $g(a) - \epsilon < g(x) < g(a) + \epsilon$, kunnen we de definitie van continuïteit als volgt opsplitsen:

Definitie 1 Zij X een topologische ruimte, $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ een functie en $a \in X$.

1. g heet semi-continu naar beneden in a als er voor elke $\epsilon > 0$ een omgeving V van a bestaat zodanig dat $g(x) > g(a) - \epsilon$ voor alle $x \in V$. g heet semi-continu naar beneden als g in elk punt van X semi-continu naar beneden is.
2. g heet semi-continu naar boven in a als er voor elke $\epsilon > 0$ een omgeving V van a bestaat zodanig dat $g(x) < g(a) + \epsilon$ voor alle $x \in V$. g heet semi-continu naar boven als g in elk punt van X semi-continu naar boven is. \diamond

Dus

g is continu (in a) $\Leftrightarrow g$ is zowel semi-continu naar boven als naar beneden (in a).

Men zou kunnen zeggen: een functie die semi-continu naar beneden in a is, springt in de buurt van a niet snel naar beneden. En: een functie die semi-continu naar boven in a is, springt in de buurt van a niet snel naar boven. Verder is het evident dat:

g is semi-continu naar boven (in a) $\Leftrightarrow -g$ is semi-continu naar beneden (in a).

Deze laatste opmerking rechtvaardigt dat de auteur zich hieronder veelal (in definities, opmerkingen en bewijzen) zal beperken tot semi-continuïteit naar beneden (en in voetnoten eventueel de andere variant nog geef).

We weten dat continuïteit van g in a ook met behulp van limieten gedefinieerd kan worden. Voor de semicontinuiteitsnoties kan dat met behulp van boven- en benedenlimieten. Laten we dit even nader bekijken. Omdat we met limieten willen werken, veronderstellen we nu dat X (zelfs) een metrische ruimte is en a een verdichtingspunt is. Verder zij weer $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ een functie.

Propositie 1 Zij X een metrische ruimte, $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ een functie en $a \in X$ een verdichtingspunt.

1. g is continu in a dan en slechts dan als $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$.
2. g is semi-continu naar beneden in a dan en slechts dan als $\liminf_{x \rightarrow a} g(x) \geq g(a)$.
3. g is semi-continu naar beneden in a dan en slechts dan als $\limsup_{x \rightarrow a} g(x) \leq g(a)$. \diamond

Bewijs. — Zij d de metriek, geldt

Limiet: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = p$, waar $p \in \mathbb{R}$, betekent dat voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat voor $x \in X$ de implicatie $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(g(x), p) < \epsilon$ geldt.

Benedenlimiet: $\liminf_{x \rightarrow a} f(x) = \sup_{\epsilon > 0} \inf_{\substack{x \in A \\ 0 < d(x, a) < \epsilon}} f(x)$. Q.e.d.

Opmerking: er bestaat een variant voor bovenstaande noties in geval $g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

2 Karakterisaties

Gegeven een functie $g : C \rightarrow \mathbb{R}$ waar C een of andere verzameling is, definiëren we voor $\alpha \in \mathbb{R}$:

$\text{Niv}_{\alpha}^{\overline{}} := \{x \in C \mid g(x) = \alpha\}$ de niveaverzameling van g m.b.t. α ;

$\text{Niv}_{\alpha}^{\leq} := \{x \in C \mid g(x) \leq \alpha\}$ de benedenniveaverzameling van g m.b.t. α ;

$\text{Niv}_{\alpha}^{\geq} := \{x \in C \mid g(x) \geq \alpha\}$ de bovenniveauverzameling van g m.b.t. α ;

$\text{Niv}_{\alpha}^{<} := \{x \in C \mid g(x) < \alpha\}$ de strikte benedenniveaverzameling van g m.b.t. α ;

$\text{Niv}_{\alpha}^{>} := \{x \in C \mid g(x) > \alpha\}$ de strikte bovenniveauverzameling van g m.b.t. α .

Propositie 2 *Zij X een topologische ruimte. De volgende uitspraken voor een functie $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ zijn equivalent:²*

- a. g is semi-continu naar beneden;
- b. voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ is $\text{Niv}_\alpha^>$ open;
- c. voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ is Niv_α^\leq gesloten. \diamond

Bewijs. — “ $a \Rightarrow b$ ”: zij $a \in \text{Niv}_\alpha^>$. Omdat $g(a) > \alpha$ en g semi-continu naar beneden in a is, is er een omgeving van a zodanig dat $g(x) > \alpha$ ($x \in V$). Dus $V \in \text{Niv}_\alpha^>$.

“ $b \Rightarrow a$ ”: zij $a \in X$. We bewijzen dat g semi-continu naar beneden in a is. Daartoe zij $\epsilon > 0$. Omdat $V := \text{Niv}_{g(a)-\epsilon}^>$ open is en $a \in V$ is, is V een omgeving van a met $g(a) - \epsilon < g(x)$ ($x \in V$).

“ $b \Rightarrow c$ ”: omdat $\{x \in X \mid g(x) \leq \alpha\} = \{x \in X \mid g(x) > \alpha\}^c$ en het complement van een open verzameling gesloten is.

“ $c \Rightarrow b$ ”: omdat $\{x \in X \mid g(x) > \alpha\} = \{x \in X \mid g(x) \leq \alpha\}^c$ en het complement van een gesloten verzameling open is. Q.e.d.

Het is bekend dat continuïteit van een afbeelding tussen (semi-)metrische ruimten equivalent is met rijtjes-continuïteit van die afbeelding. Stelling 1 hieronder behelst de pendant daarvan voor semi-continuïteit gebruikmakend van boven en benedenlimieten.³

Om het bewijs van die stelling rond te krijgen is het goed even terug te gaan naar de volgende situatie van continue afbeeldingen:

Propositie 3 *Laat X een metrische ruimte zijn, $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ en $a \in S$. Dan zijn equivalent:*

1. g is continu te a .
2. Voor elke rij (a_n) uit X met $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) = g(a)$. \diamond

Bewijs. — “ $1 \Rightarrow 2$ ”: zij $\epsilon > 0$. omdat g continu te a is, bestaat er een omgeving V van a zodanig dat $|g(x) - g(a)| < \epsilon$ voor alle $x \in V$. Omdat $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, is $a_n \in V$ voor n groot genoeg. Voor die n geldt dus $|g(a_n) - g(a)| < \epsilon$. Dus $\lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) = g(a)$.

“ $2 \Rightarrow 1$ ”: uit het ongerijmde. Stel dus dat g niet continu te a is. Dit impliceert de existentie van een $\epsilon > 0$ zodanig dat voor alle n er een $x_n \in B_{1/n}(a)$ (i.e. de open bol rond a met straal $1/n$) is met $|g(x_n) - g(a)| \geq \epsilon$. Nu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, maar $(g(a_n))$ convergeert niet naar $g(a)$. Q.e.d.

Stelling 1 *Zij X een metrische ruimte, $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ en $a \in X$. Dan zijn equivalent:⁴*

- a. g is semi-continu naar beneden in $a \in X$.
- b. Voor elke rij (a_n) uit X met $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ geldt $\liminf_{n \rightarrow \infty} g(a_n) \geq g(a)$. \diamond

Bewijs. — “ $a \Rightarrow b$ ”: zij $\epsilon > 0$. Omdat g semi-continu naar beneden te a is, bestaat er een omgeving V van a zodanig dat $g(x) > g(a) - \epsilon$ voor alle $x \in V$. Omdat $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, is $a_n \in V$ voor n groot genoeg. Voor die n geldt dus $g(a_n) > g(a) - \epsilon$. Dit impliceert $\liminf_{n \rightarrow \infty} g(a_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} (g(a) - \epsilon) = g(a) - \epsilon$. Omdat dit voor alle $\epsilon > 0$ geldt, volgt $\liminf_{n \rightarrow \infty} g(a_n) \geq g(a)$.

“ $b \Rightarrow a$ ”: uit het ongerijmde. Stel dus dat g niet semi-continu naar beneden te a is. Dit impliceert de existentie van een $\epsilon > 0$ zodanig dat voor alle n er een $x_n \in B_{1/n}(a)$ is met $g(x_n) \leq g(a) - \epsilon$. Nu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ en vandaar $\liminf_{n \rightarrow \infty} g(x_n) \geq g(a)$. Maar $\liminf_{n \rightarrow \infty} g(x_n) \leq g(a) - \epsilon$, een tegenspraak. Q.e.d.

²Hier is het “broertje” van deze propositie: g is semi-continu naar boven d.e.s.d.a. voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ is Niv_α^\leq open d.e.s.d.a. voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ is $\text{Niv}_\alpha^>$ gesloten.

³De auteur heeft ook over dat onderwerp een typoscript getiteld “Boven- en benedenlimieten” op zijn webpagina met typoscripten ter beschikking gesteld.

⁴Hier is het “broertje” van deze stelling: g is semi-continu naar boven in a dan en slechts dan als voor elke rij (a_n) uit X er geldt dat $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} g(a_n) \leq g(a)$.

Stelling 2 *Zij X een metrische ruimte, $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ een functie en $a \in X$ een verdichtingspunt. Dan zijn equivalent:*

1. g is semi-continu naar beneden in a .
2. $\liminf_{x \rightarrow a} g(x) \geq g(a)$. \diamond

Bewijs. — Oefening voor de lezer. Q.e.d.

Laat X en Y verzamelingen zijn en $g : X \rightarrow Y$ een afbeelding. Dan is de grafiek van g gedefinieerd door

$$\text{graph}(g) := \{(x, y) \mid x \in X, y = g(x)\} \subseteq X \times Y.$$

In het geval dat $Y \subseteq \mathbb{R}$ is ook haar epigrafiek

$$\text{epi}(g) := \{(x, y) \mid x \in X, y \geq g(x)\} \subseteq X \times \mathbb{R},$$

en haar hypografiek

$$\text{hypo}(g) := \{(x, y) \mid x \in X, y \leq g(x)\} \subseteq X \times \mathbb{R}$$

gedefinieerd. Dus, in dat geval, is de grafiek van g de doorsnede van haar epigrafiek en hypografiek.

Als X en Y topologische ruimten zijn, dan heeft het, cartesische producten steeds van de producttopologie voorzien, zin te spreken van dingen als dat $\text{graph}(g)$ gesloten is. Dat betekent dan dus dat $\text{graph}(g)$ een gesloten deel van $X \times Y$ is.

Stelling 3 *Zij X een metrische ruimte. De volgende uitspraken voor een functie $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ zijn equivalent:*⁵

- a. g is semi-continu naar beneden;
- b. $\text{epi}(g)$ is gesloten.⁶ \diamond

Bewijs. — “ $a \Rightarrow b$ ”: zij $((x_n, y_n))$ een rij uit $\text{epi}(g)$ die convergeert naar $(x, y) \in X \times \mathbb{R}$; dus $g(x_n) \leq y_n$ voor alle n , (x_n) convergeert naar x en (y_n) convergeert naar y . Met Stelling 1 volgt $g(x) = g(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} g(x_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Dus $(x, y) \in \text{epi}(g)$, zoals gewenst.

“ $b \Rightarrow a$ ”: stel $\text{epi}(g)$ is gesloten. Om te bewijzen dat g semi-continu naar beneden is bewijzen we dat voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ de benedenniveaoverzameling van g met betrekking tot α gesloten is (en kunnen dan Propositie 2 toepassen). Daartoe zij (x_n) een rij uit $\{x \in X \mid g(x) \leq \alpha\}$ die convergeert naar, zeg, y . We zijn klaar als we laten zien dat $g(y) \leq \alpha$. Omdat $g(x_n) \leq \alpha$, is (x_n, α) een rij uit $\text{epi}(g)$. Deze rij convergeert naar (y, α) . Omdat $\text{epi}(g)$ gesloten is, is $(y, \alpha) \in \text{epi}(g)$, dus $g(y) \leq \alpha$. Q.e.d.

Een toepassinkje van Stelling 3 is het volgende: als X een metrische ruimte is en $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ een continue afbeelding, dan is de grafiek van g gesloten. Inderdaad: omdat g zowel semi-continu naar beneden als naar boven is, is zowel de epigrafiek als de hypografiek van g gesloten. De grafiek van g is, zijnde een doorsnede van die grafieken, weer gesloten.⁷

Stelling 4 *Zij X een topologische ruimte, Y een hausdorfs topologische ruimte en $g : X \rightarrow Y$ een afbeelding. Dan:*

1. g is continu \Rightarrow $\text{graph}(g)$ is gesloten.
2. Als Y compact is, dan geldt: g is continu \Leftrightarrow $\text{graph}(g)$ is gesloten. \diamond

⁵Hier is het “broertje”: g is semi-continu naar boven d.e.s.d.a. $\text{hypo}(g)$ is gesloten deel van $X \times \mathbb{R}$.

⁶En hier is het “broertje”: g is semi-continu naar boven d.e.s.d.a. $\text{hypo}(g)$ is gesloten.

⁷Maar in feite geldt iets veel sterkers (zie het typoscript “Parameterafhankelijkheid van Oplossingen van Vergelijkingen” van de auteur) de grafiek van een continue afbeelding $g : X \rightarrow Y$, waar X en Y topologische ruimten zijn met Y hausdorfs, is een gesloten deel van $X \times Y$.

3 Oud maakt nieuw

Propositie 4 *Zij X een topologische ruimte en $a \in X$. Als $f_1, f_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ functies zijn die semi-continu naar beneden zijn in a . Dan:*

1. voor $\lambda > 0$ is de functie λf_1 semi-continu naar beneden in a .
2. voor $\lambda < 0$ is de functie λf_1 semi-continu naar boven in a .
3. de functie $f_1 + f_2$ is semi-continu naar beneden in a . \diamond

Bewijs. — 1. Zij $\epsilon > 0$.

Omdat f_1 semi-continu naar beneden in a is, bestaat er een omgeving V van a zodanig dat $f_1(x) < f_1(a) + \epsilon/\lambda$ ($x \in V$). Er volgt dat $(\lambda f_1)(x) < (\lambda f_1)(a) + \epsilon$ voor alle $x \in V$.

2. Dat volgt uit deel 1.

3. Omdat f_i semi-continu naar beneden in a is, bestaat er een omgeving V_i van a zodanig dat $f_i(x) < f_i(a) + \epsilon/2$ ($x \in V_i$). Er volgt dat $V_1 \cap V_2$ een omgeving van a is en dat $(f_1 + f_2)(x) < (f_1 + f_2)(a) + \epsilon$ voor alle $x \in V_1 \cap V_2$. Q.e.d.

Propositie 5 *Zij X een topologische ruimte en $a \in X$.*

1. Stel $(g_i)_{i \in I} : X \rightarrow \mathbb{R}$ is een familie van functies zodanig dat $g(x) := \sup_{i \in I} g_i(x) \in \mathbb{R}$ ($x \in X$).⁸ Als elke g_i semi-continu naar beneden in a is, dan is de functie $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ ook semi-continu naar beneden in a .
2. Als $g_1, \dots, g_m : X \rightarrow \mathbb{R}$ functies zijn die semi-continu naar beneden in a zijn, dan is $g := \min(g_1, \dots, g_m)$ ook semi-continu naar beneden in a . \diamond

Bewijs. — 1. Zij $\epsilon > 0$. Er is een $i \in I$ zodanig dat $g_i(a) > g(a) - \frac{\epsilon}{2}$. Omdat g_i semi-continu naar boven in a is, is er een omgeving V van a zodanig dat $g(x) > g_i(a) - \frac{\epsilon}{2}$ ($x \in V$). Voor $x \in V$ geldt dus $g(x) > g(a) - \epsilon$.

2. Zij $\epsilon > 0$. Er is een omgeving V_i van a zodanig dat $g_i(x) > g_i(a) - \epsilon$ ($x \in V_i$). $V := \bigcap_{i=1}^m V_i$ is een omgeving van a waarvoor voor alle i geldt $g_i(x) > g_i(a) - \epsilon$ ($x \in V$). Daaruit volgt voor alle $x \in V$ dat $g(x) = \min(g_1(x), \dots, g_m(x)) > \min(g_1(a), \dots, g_m(a)) - \epsilon = g(a) - \epsilon$. Q.e.d.

Propositie 6 *Zij X een topologische ruimte. Als $f_1, f_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ positieve functies zijn die semi-continu naar beneden zijn, dan is ook de functie $f_1 f_2$ semi-continu naar beneden. \diamond*

Bewijs. — Zij $\lambda \in \mathbb{R}$. We bewijzen dat $\{x \in X \mid (f_1 f_2)(x) > \lambda\}$ open is. Omdat $f_1 f_2 > 0$ is, mogen we $\lambda > 0$ veronderstellen. Nu opmerkend dat

$$\{x \in X \mid (f_1 f_2)(x) > \lambda\} = \bigcup_{\alpha > 0} (\{x \in X \mid f_1(x) > \alpha\} \cap \{x \in X \mid f_2(x) > \lambda/\alpha\})$$

een vereniging van open verzamelingen is en dus open is. Q.e.d.

Propositie 7 *Stel $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.*

1. Als f_1 continu in $a \in \mathbb{R}$ is en f_2 semi-continu naar beneden in $f_1(a)$ is, dan is $f_2 \circ f_1$ semi-continu naar beneden in a .
2. Als f_1 continu is en f_2 semi-continu naar beneden is, dan is $f_2 \circ f_1$ semi-continu naar beneden. \diamond

⁸Merk op dat de auteur in dit typoscript niet met functies werkt die de waarde $+\infty$ of $-\infty$ aannemen kunnen.

Bewijs. — 1. Zij $\epsilon > 0$. Omdat f_2 semi-continu naar beneden in $f_1(a)$ is, is er een $\xi > 0$ zodanig dat voor alle $y \in \mathbb{R}$

$$|y - f_1(a)| < \xi \Rightarrow f_2(y) < f_2(f_1(a)) + \epsilon.$$

Omdat f_1 continu in a is, is er een $\delta > 0$ zodanig dat voor alle $x \in \mathbb{R}$

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f_1(x) - f_1(a)| < \xi.$$

Nu volgt, zoals gewenst, voor alle $x \in \mathbb{R}$

$$|x - a| < \delta \Rightarrow f_2(f_1(x)) < f_2(f_1(a)) + \epsilon.$$

2. Uit 1. Q.e.d.

Propositie 8 *Stel $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ en $f \upharpoonright [0, 1[$ is semi-continu naar beneden.*

1. *f is dalend dan en slechts dan als $f \upharpoonright [0, 1[$ dalend is.*
2. *f is strikt dalend dan en slechts dan als $f \upharpoonright [0, 1[$ strikt dalend is. \diamond*

Bewijs. — Alleen de “als-beweringen” zijn niet evident. Deze bewijzen we uit het ongerijmde.

1. Stel dus, dat $f \upharpoonright [0, 1[$ dalend is en dat f niet dalend is. Fixeer $x_1, x_2 \in [0, 1]$ met $x_1 < x_2$ en $f(x_1) (\leq) < f(x_2)$. Omdat $f \upharpoonright [0, 1[$ dalend is volgt $x_2 = 1$. Zij $\epsilon > 0$ zodanig dat $f(x_1) < f(x_2) - \epsilon$. Omdat f semi-continu naar beneden in x_2 is, is er een $x_2' \in]x_1, x_2[$ met $f(x_2') > f(x_2) - \epsilon$. Nu $x_1 < x_2'$, $x_1, \in x_2' \in [0, 1[$ en $f(x_2') > f(x_1)$, een tegenspraak met de dalendheid van $f \upharpoonright [0, 1[$.

2. Stel dus dat $f \upharpoonright [0, 1[$ strikt dalend is en dat f niet strikt dalend is. Fixeer $x_1, x_2 \in [0, 1]$ met $x_1 < x_2$ en $f(x_1) \leq f(x_2)$. Omdat $f \upharpoonright [0, 1[$ strikt dalend is volgt $x_2 = 1$. Fixeer $x_1' \in]x_1, x_2[$ met $f(x_1') < f(x_1)$. Omdat $f(x_1') < f(x_2)$ is er een $\epsilon > 0$ zodanig dat $f(x_1') < f(x_2) - \epsilon$. Omdat f semi-continu naar beneden in x_2 is, is er een $x_2' \in]x_1', x_2[$ met $f(x_2') > f(x_2) - \epsilon$. Nu $x_1' < x_2'$, $x_1', \in x_2' \in [0, 1[$ en $f(x_2') > f(x_1')$, een tegenspraak met de dalendheid van $f \upharpoonright [0, 1[$. Q.e.d.

4 Rechts- en links-continuïteit

We hebben gezien dat de semi-continuïteitsnoties zich op natuurlijke wijze voordoen door een opsplitsing van de continuïteitsnotie. In het bijzonder zijn semi-continuïteitsnoties gedefinieerd voor functies in geval het domein een deelverzameling van \mathbb{R} is. Voor dergelijke functies zijn ook de noties van rechts- en linkscontinuïteit gedefinieerd, hetgeen in dat geval een alternatieve opsplitsing van de continuïteitsnotie betreft. Men verwarre deze noties niet. We bekijken dit hier nader.

Zij $g : X \rightarrow \mathbb{R}$, waar X een deelverzameling van \mathbb{R} is, en $a \in X$. g heet rechts-continu in a als er voor elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat $|g(x) - g(a)| < \epsilon$ voor alle $x \in X$ met $a \leq x < a + \delta$. g heet links-continu in a als er voor elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat $|g(x) - g(a)| < \epsilon$ voor alle $x \in X$ met $a - \delta < x \leq a$. g heet links-continu als g links-continu in elk punt van X is en g heet rechts-continu als g rechts-continu in elk punt van X is

Natuurlijk geldt:

$$g \text{ is continu (in } a) \Leftrightarrow g \text{ is zowel rechts- als links-continu (in } a).$$

Propositie 9 *Zij $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ stijgend, waar X een deelverzameling van \mathbb{R} is, en $a \in X$. Dan:*

1. *g is semi-continu naar boven in $a \Leftrightarrow g$ is rechts-continu in a .*
2. *g is semi-continu naar beneden in $a \Leftrightarrow g$ is links-continu in a . \diamond*

Bewijs. — 1. “ \Rightarrow ”: zij $\epsilon > 0$. Omdat g semi-continu naar boven in a is, is er een $\delta > 0$ zodanig dat $g(x) < g(a) + \epsilon$ voor alle $x \in X$ met $|x - a| < \delta$. In het bijzonder $g(x) - g(a) < \epsilon$ voor alle $x \in X$ met $a \leq x < a + \delta$. Omdat g stijgend is volgt hieruit dat $0 \leq g(x) - g(a) < \epsilon$ voor alle $x \in X$ met $a \leq x < a + \delta$ en dus dat $|g(x) - g(a)| < \epsilon$ voor alle $x \in X$ met $a \leq x < a + \delta$. Dus g is rechts-continu in a .

“ \Leftarrow ”: zij $\epsilon > 0$. Omdat g rechts-continu in a is, is er een $\delta > 0$ zodanig dat $|g(x) - g(a)| < +\epsilon$ voor alle $x \in X$ met $a \leq x < a + \delta$. In het bijzonder $g(x) < g(a) + \epsilon$ voor alle $x \in X$ met $a \leq x < a + \delta$. Omdat g stijgend is volgt hieruit dat $g(x) < g(a) + \epsilon$ voor alle $x \in X$ met $a - \delta < x < a + \delta$ en dus dat $g(x) < g(a) + \epsilon$ voor alle $x \in X$ met $|x - a| < \delta$. Dus g is semi-continu naar boven in a .

2. Analoog aan 1. Q.e.d.

Dit alles geziend hebbende, zij het duidelijk dat men ook op voor de hand liggende wijze de noties van links semi-continu naar beneden, rechts semi-continu naar beneden, links semi-continu naar boven en rechts semi-continu naar boven invoeren kan:

Definitie 2 Zij X een deelverzameling van \mathbb{R} , $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ een functie en $a \in X$.

1. g heet links semi-continu naar boven in a als er voor elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat $g(x) < g(a) + \epsilon$ voor alle $x \in]a - \delta, a]$.

g heet links semi-continu naar boven als g in elk punt van X links semi-continu naar boven is.

g heet rechts semi-continu naar boven in a als er voor elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat $g(x) < g(a) + \epsilon$ voor alle $x \in [a, a + \delta[$.

g heet rechts semi-continu naar boven als g in elk punt van X rechts semi-continu naar boven is.

2. g heet links semi-continu naar beneden in a als er voor elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat $g(a) - \epsilon < g(x)$ voor alle $x \in]a - \delta, a]$.

g heet links semi-continu naar beneden als g in elk punt van X links semi-continu naar beneden is.

g heet rechts semi-continu naar beneden in a als er voor elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat $g(a) - \epsilon < g(x)$ voor alle $x \in [a, a + \delta[$.

g heet rechts semi-continu naar beneden als g in elk punt van X rechts semi-continu naar beneden is.

5 Maximaliseerders

Het bewijs van de volgende stelling berust op toepassing van de volgende variant (in termen van gesloten deelverzamelingen) voor de definitie van quasi-compactheid: een topologische ruimte X is quasi-compact⁹ d.e.s.d.a. voor elke familie $(F_i)_{i \in I}$ van gesloten delen van X waarvoor elke eindige doorsnede niet-leeg is, de doorsnede $\bigcap_{i \in I} F_i$ niet-leeg is.

Stelling 5 (*Lemma van Weierstrass-Lebesgue.*) Zij X een niet-lege compacte metrische ruimte en $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ semi-continu naar boven. Dan heeft g een maximaliseerder en de verzameling der maximaliseerders van g is compact.¹⁰ \diamond

Bewijs. — Zij $\alpha := \sup g$. Dan $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Zij M de verzameling der maximaliseerders van g . Er geldt dat $M = \bigcap_{\lambda < \alpha} \{x \in X \mid g(x) \geq \lambda\} = \bigcap_{\lambda < \alpha} \text{Niv}_{\lambda}^{\geq}$. Omdat g semi-continu naar boven is,

⁹Om misverstanden te voorkomen: een topologische ruimte is compact als ze quasi-compact en hausdorffs is.

¹⁰Hier is het “broertje”: zij X een niet-lege compacte metrische ruimte en $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ semi-continu naar beneden. Dan heeft g een minimaliseerder en de verzameling der minimaliseerders van g is compact.

is vanwege Propositie 2, elke Niv_λ^\geq gesloten. Omdat M een doorsnede van gesloten verzamelingen is, is ook M gesloten. M is zelfs quasi-compact omdat een gesloten deel van een quasi-compacte verzameling quasi-compact is. En omdat X hausdorffs is, is M zelfs compact.

Resteert te bewijzen dat er een maximaliseerder bestaat. Daartoe merken we op dat voor elke $\lambda < \alpha$, Niv_λ^\geq , niet-leeg is. En dat $\text{Niv}_{\lambda_1}^\geq \supseteq \text{Niv}_{\lambda_2}^\geq$ ($\lambda_1 \leq \lambda_2$). Het boven de stelling genoemde resultaat garandeert daarom dat $\bigcap_{\lambda < \alpha} \text{Niv}_\lambda^\geq \neq \emptyset$. Q.e.d.

Hier is een variant van bovenstaande stelling voor coërcieve functies.

Propositie 10 *Zij X een niet-leeg gesloten deel van \mathbb{R}^n en $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ semi-continu naar beneden en coërcief.¹¹ Dan heeft g een minimaliseerder en de verzameling der minimaliseerders van g is compact. \diamond*

Bewijs. — Zij $\alpha := \inf g$. Dan $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Zij M de verzameling der minimaliseerders van g . Er geldt dat $M = \bigcap_{\lambda > \alpha} \{x \in X \mid g(x) \leq \lambda\} = \bigcap_{\lambda > \alpha} \text{Niv}_\lambda^\leq$. Omdat g semi-continu naar beneden is, is vanwege Propositie 2, elke Niv_λ^\leq gesloten. Omdat M een doorsnede van gesloten verzamelingen is, is ook M gesloten. M is ook begrensd, want anders zou er een rij (z_n) uit M zijn met $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n\| = \infty$ en dan zou $\lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) = \infty$. Er volgt dat M compact is.

Fixeer een rij (z_n) in X met $\lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) = \alpha$. De coërciviteit van g impliceert dat (z_n) begrensd is. Bolzano-Weierstrass garandeert dat (z_n) een limietpunt heeft; zij (y_n) een deelrij van (z_n) met limiet, zeg, y . Omdat X gesloten is, is $y \in X$. Omdat g semi-continu naar beneden is, garandeert Stelling 1 dat $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} g(y_n) \geq g(y)$. Daauit $g(y) = \alpha$. Dus y is een minimaliseerder van g . Q.e.d.

6 Dekpuntstelling

Stelling 6 *Stel I is een eigenlijk interval van \mathbb{R} en $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ een functie die links semi-continu naar boven en rechts semi-continu naar beneden is. Als er $a, b \in I$ met $a < b$, $a < g(a)$ en $b > g(b)$ bestaan, dan heeft g een dekpunt. \diamond*

Bewijs. — Definieer recursief de rijtjes of rijen (a_n) , (b_n) en (c_n) , door:

$$a_0 := a, \quad b_0 := b$$

en voor $n \geq 1$:

$$c_n := \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}).$$

Als $g(c_n) = c_n$, dan stop, anders definieer verder

$$\begin{cases} a_n := c_n \text{ en } b_n := b_{n-1} \text{ als } c_n < g(c_n), \\ a_n := a_{n-1} \text{ en } b_n := c_n \text{ als } c_n > g(c_n). \end{cases}$$

Als deze procedure stopt, dan heeft g een dekpunt. Als ze niet stopt, dan hebben we rijen (a_n) , (b_n) en (c_n) . Men ziet snel in dat $a_0 \leq a_n \leq c_{n+1} \leq b_n \leq b_0$, de rij (a_n) is stijgend, de rij (b_n) is dalend en $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$. Er volgt dat (a_n) en (b_n) convergeren naar eenzelfde punt x .

Men ziet ook snel in dat $a_n < g(a_n)$ voor alle n en $b_n > g(b_n)$ voor alle n . Dat impliceert

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} g(a_n), \quad x = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} g(b_n).$$

Omdat g te x links semi-continu naar boven is en $a_n \leq x$ is volgt, $\limsup_{n \rightarrow \infty} g(a_n) \leq g(x)$ en dus nu

$$x \leq g(x).$$

¹¹Dat g coërcief is betekent dat voor elke rij (x_n) in X met $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \infty$ er geldt dat $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \infty$.

Omdat g te x links semi-continu naar beneden en $b_n \geq x$ is volgt,

$$g(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} g(b_n)$$

en dus nu

$$g(x) \leq x.$$

Dus $g(x) = x$. Q.e.d.