

De Zwarte Kunst van het Primitiveren

P. H. M. v. Mouche

Herfst 2005

Verbeterde versie 1.1 (oktober 2019)

Dit typoscriptje gaat over primitiveren. Het beoogt de lezer snel de kunst van het primitiveren bij te brengen.¹ Het maken van de daartoe gerichte opgaven is daarbij wel van belang. Fijne opmerkingen, die de minder theoretisch geïnteresseerde lezer over kan slaan, staan in de voetnoten.²

Kunnen differentiëren is onontbeerlijk om te kunnen primitiveren. De auteur gaat er gewoon vanuit dat de lezer deze vaardigheid beheerst. Ook gaat hij ervan uit dat de lezer vertrouwd is met de notie van (riemann-)integraal. Maar zo dadelijk roepen we een en ander nog even in herinnering.

Uiteraard houdt de auteur zich aanbevolen voor op- en aanmerkingen die kunnen leiden tot een verdere verbetering van het typoscript.

¹Het is goed te weten dat er uitgebreide tabellen bestaan met primitieven en dat computeralgebrapakketten zoals MAPLE en MATHEMATICA heel wat primitieven bepalen kunnen. Tot lezers die daarmee al gelukkig zijn, richt dit typoscript zich niet. Wel richt het zich tot lezers die bekwame primitiveerders willen worden.

²Deze voetnoten zorgen er ook voor dat *au fond* dit typoscript mathematisch rigoureuus is.

TER HERINNERING:³

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x, \quad \cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1.$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

$$\sin^2(\arctan x) = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

$$\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \operatorname{arccosh}(x) = \ln(|x + \sqrt{x^2 - 1}|).$$

$$(a^x)' = \ln a \, a^x, \quad (e^x)' = e^x.$$

$$(\log_a x)' = 1/(\ln(a)x), \quad (\ln x)' = 1/x.$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x.$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$(\operatorname{arcsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad (\operatorname{arccosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

AFSPRAAK:

Alle functies in het typoscript zijn reëelwaardig.

TERMINOLOGIE:

Onder een eigenlijk reëel interval verstaan we een interval van \mathbb{R} dat uit meer dan één punt (en daarmee uit oneindig veel punten) bestaat.

³Misschien is “ter herinnering” ietsjes overdreven. Maar om een bekwame primitiveerder te worden loont het zich de moeite om al deze formules te kunnen dromen.

1 Notie

We vallen met de deur in huis:

Definitie 1 Gegeven een functie f gedefinieerd op een eigenlijk reëel interval I , heet een functie F op I een primitieve van f als $F' = f$, i.e. als F differentieerbaar is met afgeleide gelijk aan f .⁴ De verzameling bestaande uit alle primitieven duiden we aan met $\int f(x) dx$. \diamond

In de analyse toont men aan dat als f een continue functie gedefinieerd op een eigenlijk reëel interval I is, f een primitieve heeft, en wel als a een willekeurig punt uit I is, is

$$F(x) := \int_a^x f(s) ds$$

wel-gedefinieerd en een primitieve. (Dit resultaat staat wel bekend als de “Hoofdstelling van de integraalrekening”, en sommigen noemen dit zelfs de “Hoofdstelling van de analyse”.)

Merken we op dat als F een primitieve van f is, dat dan $F + c$ (waar c een constante is) dat ook is. Dus als er een primitieve van f bestaat, dan bestaan er oneindig veel. Verder als zowel F_1 als F_2 primitieven van f zijn, dan verschillen deze een constante.⁵ Dus als we een of andere primitieve van f bepaald hebben, dan hebben we ze allemaal te pakken. We gebruiken in dat verband ook wel de notatie $\int f(x) dx = F + C$.⁶ Hier noemen we $f(x)$ nog de integrand.

⁴De definitie zou wat algemener kunnen. Immers ze blijft zinvol als het domein van F een deelverzameling van \mathbb{R} is waarvoor de notie van afgeleide van F zin heeft. De verzamelingen in kwestie betreffen in elk geval daarom ook nog eindige verenigingen van eigenlijke reële intervallen.

⁵Dit resultaat maakt gebruik van het feit dat het domein van f een eigenlijk reëel interval is. Inderdaad: dan is voor $h := F_2 - F_1$, $h' = 0$ waaruit, omdat het domein een eigenlijk reëel interval is, volgt $h = c$ en dus $F_2 = F_1 + c$.

Als het domein van f geen eigenlijk reëel interval zou zijn, is het resultaat niet waar: zowel de functie F_1 als F_2 gedefinieerd door $F_1(x) := \begin{cases} \ln|x| & (x < 0) \\ \ln|x| + 5 & (x > 0) \end{cases}$ als $F_2(x) := \begin{cases} \ln|x| + 3 & (x < 0) \\ \ln|x| & (x > 0) \end{cases}$ zijn primitieven van de functie $1/x$, maar $F_2 - F_1$ is niet constant.

⁶En bedoelen daarmee dus de verzameling functies $\{F + c \mid c \in \mathbb{R}\}$.

2 Zwarte kunst

Primitiveren is veelal een ingewikkeldere bezigheid dan differentiëren. Immers, gegeven een functie kunnen we deze met de rekenregels voor afgeleiden differentiëren (alhoewel dat wel eens veel werk kan zijn). Zo kunnen we in principe ook altijd nagaan of een gegeven functie F wel de primitieve van f is. Maar om zo'n F te bepalen is een andere zaak, dat is juist de kunst en daar gaan we hieronder dus licht op laten schijnen.⁷

U zult zien dat het er straks vaak wild aan toe zal gaan: we gebruiken dingen zoals $df(x) = f'(x) dx$ die best wel zin hebben maar waarvan we het gebruik niet rechtvaardigen zullen. Voor $\cos y$ schrijven we $\sqrt{1 - \sin^2 y}$ als ons dat uitkomt (zonder ons om een eventueel minteken te bekommeren), voor $\arctan \tan x$ schrijven we x, \dots . In principe is alles geoorloofd om een uitkomst te vinden. Vandaar dat we van “zwarte kunst” spreken. Eenmaal een antwoord hebbend, controleer men wel steeds of dat voldoet. Maar dan wel een controle volgens de regels van de (wis)kunst, want anders kan er nog van alles mis zijn.

Bij het praktische rekenwerk om primitieven te bepalen maakt men gebruik van wat men al weet (de “kijkmethode” voor standaardprimitieven), van rekenregels en van speciale methoden voor bepaalde klassen van functies, zoals breuksplitsen voor rationale functies. De standaardprimitieven bekijken we in § 3, de rekenregels in § 4 en de speciale methoden in de paragrafen § 5 en § 6. Tenslotte is er nog § ?? met wat aardigheidjes.

3 Standaardprimitieven

Men doet er goed aan de hieronder staande tabel met standaardprimitieven van buiten te kennen.⁸ Dat deze tabel correct is, controleer men dus door de functie in de tweede kolom te differentiëren.⁹

⁷Een kanttekening. Met “een primitieve van f bepalen” bedoelen we hierboven het vinden van een F in termen van “elementaire” functies. “Elementaire functies” zijn in dit verband de bekende dingen als veeltermen, de wortelfunctie, de exponentiële functie, \sin en \ln . In die zin zal het u niet lukken om een primitieve van $f(x) = e^{x^2}$ te bepalen. Toch bestaat deze zoals we al gezien hebben.

⁸Over wat wel en wat niet in deze tabel hoort, valt te redetwisten. Met de gegeven tabel komt men een heel eind.

⁹Voor het gemak hebben we “ $+C$ ” in de tweede kolom steeds weggelaten. Ook is het de bedoeling dat elke te primitiveren functie op een eigenlijk reëel interval gedefinieerd is. Wat dat interval is, doet er niet toe, als het maar zin heeft. Zo kan x^7 met $p = 7$ in de eerste regel van de tabel bijvoorbeeld gedefinieerd zijn op $(-\infty, 0)$.

$\int x^p dx$	$\frac{1}{p+1}x^{p+1}$ (waar $p \neq -1$)
$\int x^{-1} dx$	$\ln(x)$
$\int e^x dx$	e^x
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$	$\arcsin x$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$	$\operatorname{arcsinh} x$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$	$\operatorname{arccosh} x$
$\int \frac{1}{x^2+1} dx$	$\arctan x$
$\int \sin x dx$	$-\cos x$
$\int \cos x dx$	$\sin x$
$\int \sinh x dx$	$\cosh x$
$\int \cosh x dx$	$\sinh x$

Ietwat ingewikkeldere functies zoals e^{ax} staan niet in de tabel omdat deze, eenmaal deze tabel hebbend, gemakkelijk daarmee bepaald kunnen worden. Dat kan met een beetje gevoel voor wat men aan het doen is met de "kijkmethode" (i.e. men ziet de primitieve meteen zitten) of op een mechanischere manier met behulp van de dadelijk te behandelen substitutiemethode.

Voorbeeld 1 Bepaal $\int e^{ax} dx$.

Oplossing met de "kijkmethode" (zie ook Voorbeeld 5): wetende (uit de tabel) dat $(e^x)' = e^x$, probeert men e^{ax} en ziet dat $(e^{ax})' = ae^{ax}$ en daaruit dus dat $\frac{1}{a}e^{ax} + C$ als gezocht is.

De volgende tabel van primitieven bevat primitieven die we als wat minder standaard beschouwen (in de zin van dat men zich meer moge afvragen "hoe komen we eraan"), maar die wel handig zijn om bij de hand te hebben.

$\int \ln x \, dx$	$x \ln x - x$
$\int \sqrt{1-x^2} \, dx$	$\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x$
$\int \sqrt{x^2 \pm 1} \, dx$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm 1} \pm \frac{1}{2} \begin{cases} \operatorname{arcsinh} x \\ \operatorname{arccosh} x \end{cases}$
$\int \frac{1}{x^2-1} \, dx$	$\frac{1}{2} \ln \left \frac{x-1}{x+1} \right $
$\int \tan x \, dx$	$-\ln(\cos x)$
$\int \cot x \, dx$	$\ln(\sin x)$
$\int \arcsin x \, dx$	$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$
$\int \arctan x \, dx$	$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$
$\int \frac{1}{\sin x} \, dx$	$\ln \left \tan \frac{x}{2} \right $
$\int \frac{1}{\cos x} \, dx$	$\frac{1}{b} \ln \left \tan \left(\frac{bx}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right $
$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx$	$\tan x$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx$	$-\cot x$
$\int \frac{1}{\cosh^2 x} \, dx$	$\tanh x$
$\int \frac{1}{\sinh^2 x} \, dx$	$-\coth x$

Zie Voorbeelden 2, 3, 7, 12 en 13 waar we enkele van deze primitieven op een constructieve manier afleiden.

4 Rekenregels

Met behulp van de rekenregels voor afgeleiden bewijst men (met λ een reëel getal aanduidend) de volgende rekenregels voor primitieven:¹⁰

1. $\int \lambda f(x) \, dx = \lambda \int f(x) \, dx.$
2. $\int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx.$
3. $\int f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx.$ (Regel der partiële integratie.)
4. $\int f(\phi(x))\phi'(x) \, dx = F(\phi(x)) + C.$ (Substitutieregel.)

(De regel der partiële integratie volgt uit de productregel en de substitutieregel uit de kettingregel.) De regel der partiële integratie past men soms met succes toe, als de primitieve van een product van twee functies gezocht wordt en de primitieve van een der factoren bekend is en de afgeleide van de andere factor gemakkelijk is.

¹⁰Deze regels zijn waar als de functies in kwestie net genoeg zijn; bijvoorbeeld continue differentieerbare f, g voldoen aan de Regel der partiële integratie.

Voorbeeld 2 Bepaal $\int \ln x \, dx$.

Oplossing. Met de regel der partiële integratie volgt $\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int 1 \cdot dx = x \ln x - x + C$.

Voorbeeld 3 Bepaal $\int \arcsin x \, dx$.

Oplossing. Met de regel der partiële integratie volgt $\int \arcsin x \, dx = \int 1 \cdot \arcsin x \, dx = x \cdot \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

Partiële integratie stelt vaak in staat om recurrente betrekkingen te vinden, waardoor men alle primitieven in kwestie kan bepalen. Soms kan men zo'n betrekking nog expliciet oplossen ook.

Voorbeeld 4 Bepaal een recurrente betrekking voor $F_n := \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ ($n \geq 1$) en bepaal daarmee F_2 .

Oplossing. $F_n = \int 1 \cdot (x^2+1)^{-n} \, dx = x(x^2+1)^{-n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} = x(x^2+1)^{-n} + 2n(\int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}} - \int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}) = x(x^2+1)^{-n} + 2n(F_n - F_{n+1})$. Daaruit volgt de formule $F_{n+1} = \frac{1}{2n} \frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} F_n$. Omdat F_1 bekend is, namelijk $F_1 = \arctan x + C$, levert deze formule een manier om de primitieven in kwestie recursief te bepalen. Zo is bijvoorbeeld $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \, dx = F_2 = \frac{1}{2} \frac{x}{(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan x + C$.

In de praktijk gebruikt men de substitutieregel door zich te bedienen van de volgende notaties:

$$d(f+g) = df + dg,$$

$$d(\lambda f) = \lambda df,$$

$$df(x) = f'(x) \, dx$$

en door voor ingewikkeldere uitdrukkingen iets eenvoudiger zoals y te substitueren of door voor een eenvoudige uitdrukking iets ingewikkelders zoals $\sin(y)$ te substitueren. (voorbeelden komen eraan). Dat heet dan substitutiemethode. Bovenstaande notaties hebben niet zonder meer zin. Dat er iets zinvol zit aan bovenstaande notaties kan men inzien door ermee om te gaan als met getallen: $df(x) = f'(x) \, dx$ is dan $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ hetgeen wel zin heeft. We gaan hier maar niet proberen dit rigoureus te maken.

Voorbeeld 5 Bepaal $\int e^{ax} \, dx$.

Oplossing: zet $y = ax$. Dan $dy = a \, dx$ en daarmee $\int e^{ax} \, dx = \int e^y \frac{1}{a} \, dy = \frac{1}{a} \int e^y \, dy = \frac{1}{a} e^y + C = \frac{1}{a} e^{ax} + C$.

Met Opgave 1 (die misschien wat teveel van hetzelfde is) kunt u nog wat verder oefenen met het bepalen van standaardprimitieven die ietsjes minder standaard zijn.

Voorbeeld 6 Te bepalen: $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$.

Oplossing: substitueer $e^x = y$, dan $de^x = e^x dx$, dus $dy = y dx$ en daarmee $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int \frac{y}{1+y} \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{1+y} dy = \ln|1+y| + C = \ln(1+e^x) + C$.

Voorbeeld 7 Te bepalen: $\int \sqrt{1-x^2} dx$.

Oplossing 1: Substitueer $x = \sin y$, dan $dx = d \sin y = \cos y dy = \sqrt{1-\sin^2 y} dy$ en daarmee $\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\sin^2 y} \sqrt{1-y^2} dy = \int (1-\sin^2 y) dy = \int \cos^2 y dy = \int \frac{1}{2}(1+\cos(2y)) dy = \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\sin(2y) + C = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\sin y \cos y + C = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$.

Oplossing 2: $\int \sqrt{1-x^2} dx = \int 1 \cdot \sqrt{1-x^2} dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \left(-\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Daaruit $\int 2\sqrt{1-x^2} dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ en dus $\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C$.

5 Primitiveren van rationale functies

In bovenstaande twee tabellen hebben we al gezien hoe de eenvoudige rationale functies (dat wil zeggen quotiënten van veeltermen) x^n , $\frac{1}{x^2+1}$ en $\frac{1}{x^2-1}$ te primitiveren. De methode van “breuksplitsen”, die we hier gaan bespreken, is te gebruiken als men een primitieve van een willekeurige rationale functie wil bepalen. Doel van die methode is een rationale functie te herschrijven als een som van rationale functies waarvan men de primitieve kent. Naast bovenstaande rationale functies (of daaraan direct verwante functies) hebben we daarbij nog $\frac{1}{(x^2+1)^n}$ op het oog (zie Voorbeeld 4). We gaan nu recepten geven hoe primitieven van rationale functies te geven met de methode van het breuksplitsen. Dat doen we in een paar stappen van steeds grotere algemeenheid. Dat die recepten inderdaad werken, daarover kan men een hele theorie opzetten; deze theorie kan men nalezen in boeken over algebra. Als $\frac{f}{g}$ een te primitiveren rationale functie is, mogen we ons beperken tot de rest van f gedeeld door g . Bijvoorbeeld $\frac{x^3+x}{x^2-1} = x + \frac{3x}{x^2-1}$ en slechts de primitieve van de rest $\frac{3x}{x^2-1}$ kan een probleem opleveren. We mogen dus veronderstellen, en dat zullen we nu ook doen, dat voor de graden van f en g geldt: $\deg(f) < \deg(g)$. Voor het vervolg zijn de nulpunten van g van belang. We

zijn echter niet altijd in staat de nulpunten van g ook echt te berekenen. In dat geval zullen we dan meestal ook geen primitieve kunnen berekenen.

We bekijken eerst het geval waar $g(x)$ louter enkelvoudige reële nulpunten heeft, zeg a_1, \dots, a_m . In dat geval kan men (zoals de theorie leert) als volgt breuksplitsen:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \dots + \frac{A_m}{x - a_m}.$$

(We bedoelen hiermee dat er constanten A_1, \dots, A_m zijn zodanig dat bovenstaande identiteit voor alle x (eventueel afgezien voor x gelijk aan een der a_i) geldt.)

Voorbeeld 8 Te bepalen $\int \frac{x-6}{x^2+3x-4} dx$.

Oplossing: we ontbinden de noemer: $x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$. We stellen nu $\frac{x-6}{x^2+3x-4} = \frac{A_1}{x+4} + \frac{A_2}{x-1}$. Dat komt neer op $x-6 = A_1(x-1) + A_2(x+4)$ voor alle x . $x = 1$ invullen levert $A_2 = -1$ en $x = -4$ invullen levert $A_1 = 2$. Daarmee $\int \frac{x-6}{x^2+3x-4} dx = \int \frac{2}{x+4} dx - \int \frac{1}{x-1} dx = \ln(x+4)^2 - \ln|x-1| + C$.

Ietsjes ingewikkelder is het geval waar $g(x)$ louter reële (dus geen echt complexe) nulpunten heeft die niet per sé enkelvoudig zijn. Zeg a_1, \dots, a_m zijn de nulpunten en r_1, \dots, r_m zijn respectievelijk hun multipliciteiten. In dat geval kan men als volgt breuksplitsen:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} = & \frac{A_{11}}{(x - a_1)^1} + \frac{A_{12}}{(x - a_1)^2} + \dots + \frac{A_{1r_1}}{(x - a_1)^{r_1}} + \dots + \\ & \dots + \frac{A_{m1}}{(x - a_m)^1} + \frac{A_{m2}}{(x - a_m)^2} + \dots + \frac{A_{mr_m}}{(x - a_m)^{r_m}}. \end{aligned}$$

Voorbeeld 9 Te bepalen $\int \frac{x}{(1-x^2)(1+x)} dx$.

Oplossing: breuksplitsen levert op: $\frac{x}{(1-x^2)(1+x)} = \frac{x}{(1+x)^2(1-x)} = \frac{-\frac{1}{2}}{(1+x)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{1+x} + \frac{\frac{1}{4}}{1-x}$. Daaruit $\int \frac{x}{(1-x^2)(1+x)} dx = \frac{1}{2}(1+x)^{-1} + \frac{1}{4} \ln|1+x| - \frac{1}{4} \ln|1-x| + C$.

Bekijken we tenslotte het algemene geval waar we ook complexe nulpunten toelaten. Merken we even op dat als z een nulpunt van de noemer van p is, het complex geconjugeerde getal \bar{z} dat ook is en wel met dezelfde multipliciteit als die van z . $p(x)$ is als volgt te schrijven:

$$p(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{r=1}^{r_i} \frac{A_{ir}}{(x - a_i)^r} + \sum_{j=1}^s \sum_{r=1}^{t_j} \frac{u_{jr}x + v_{jr}}{((x - b_j)(x - \bar{b}_j))^r},$$

waar a_1, \dots, a_m de reële nulpunten van de noemer van p zijn met multipliciteiten respectievelijk r_1, \dots, r_m , b_1, \dots, b_s de complex geconjugeerde nulpunten met positief imaginair gedeelte zijn van de noemer van p met multipliciteiten respectievelijk t_1, \dots, t_s zijn. De primitieve van elk der $\frac{A_{ir}}{(x-a_i)^r}$ levert geen enkel probleem en die der $\frac{u_{jr}x+v_{jr}}{((x-b_j)(x-\bar{b}_j))^r} = \frac{u_{jr}x+v_{jr}}{x^2-2(\Re b_j)x+|b_j|^2}$ zijn ook wel te behapstukken door te bedenken dat $\frac{ax+d}{(x^2+bx+c)^n}$ met b^2-4ac gelijk is aan

$$\frac{a}{2} \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^n} + \left(d - \frac{ab}{2}\right) \frac{1}{(x^2+bx+c)^n} = \frac{a}{2} \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^n} + \left(d - \frac{ab}{2}\right) \frac{1}{\left(\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \sqrt{c - \frac{b^2}{4}}\right)^n}$$

en te bedenken dat we Voorbeeld 4 hebben.

Voorbeeld 10 Te bepalen $\int \frac{x^3+x-4}{(x+1)^2(x^2+2)} dx$.

Oplissing. We stellen $\frac{x^3+x-4}{(x+1)^2(x^2+2)} = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+2}$.

Dat komt neer op $x^3 + x - 4 = a(x^2 + 2) + b(x + 1)(x^2 + 2) + (cx + d)((x + 1)^2)$. $x = -1$ invullen geeft $a = -2$. Daaruit $x^3 + x - 4 + 2(x^2 + 2) = b(x + 1)(x^2 + 2) + (cx + d)((x + 1)^2)$, i.e. $x(x + 1)^2 = b(x + 1)(x^2 + 2) + (cx + d)((x + 1)^2)$. Weer $x = -1$ invullen geeft $b = 0$. Daaruit $x = cx + d$, waaruit $c = 1$, $d = 0$.

$$\text{Dus } \int \frac{x^3+x-4}{(x+1)^2(x^2+2)} dx = \int \left(\frac{-2}{(x+1)^2} + \frac{x}{x^2+2}\right) dx = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) + C.$$

6 Primitiveren van rationale functies in sin en cos

We zullen hier wat beknopter uiteenzetten dan voorheen.

Bekijken we eerst het geval van $\int \sin^m x \cos^n x dx$ met gehele m en n . Als m of n oneven is, kunnen we de integrand herschrijven tot een rationale functie: als m oneven is, dan geldt, met $y = \cos x$, $\int \sin^m x \cos^n x dx = \int (\sin^2 x)^{(m-1)/2} \cos^n x \sin x dx = \int -(1-y^2)^{(m-1)/2} y^n dy$. En als n oneven is, levert $y = \sin x$ het gewenste. Als m en n beide even zijn, dan leidt bovenstaande methode tot wortels in de integrand en is daarom meestal niet bruikbaar. Wel tot een resultaat voert nu de substitutie $x = \arctan y$. Wegens de formules $\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$ en $\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ vinden we $\int \sin^{2k} x \cos^{2l} x dx = \int \frac{y^{2k}}{(1+y^2)^{k+l+1}}$.¹¹ Maar soms kan het makkelijker:

Voorbeeld 11 $\int \sin^2 x dx = \int \frac{(1-\cos 2x)}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x dx + C$.

En volgens bovenstaande methode, met behulp van Voorbeeld 4:

¹¹We moeten hier oppassen: de te primitiveren functie heeft domein $(-\infty, \infty)$. De substitutiefunctie $x = \arctan y$ heeft als bereik echter $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Dus de gevonden primitieve is in orde op dat interval. Zie ook Opgave 4.

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{y^2}{(1+y^2)^2} \, dy = \int \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{(1+y^2)^2} \right) dy = \arctan y - \frac{1}{2} \frac{y}{y^2+1} - \frac{1}{2} \arctan y + C = \frac{1}{2} \arctan(\tan x) - \frac{1}{2} \frac{\tan x}{\tan^2 x + 1} + C = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin x \cos x + C = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C \text{ (en controleren van deze oplossing leert dat hij voldoet).}$$

Rationele functies in \sin en \cos die in feite rationale functies zijn in \sin^2 en \cos^2 , zoals $\frac{3\sin^4 x + \cos^2 x + 7}{\cos^4 x - 2}$, kunnen met bovengenoemde substitutie $x = \arctan y$ altijd in een rationale functie in y worden overgevoerd en zijn daardoor in principe (maar meestal wel ten koste van veel rekenwerk) te primitiveren.

Nog meer rekenwerk vergen willekeurige rationale functies in \cos en \sin . Ook deze kunnen door een geschikte substitutie, namelijk $x = 2 \arctan y$, in gewone rationale functies worden overgevoerd. Bedenk immers dat $\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$ en $\sin x = \frac{2y}{1+y^2}$.

De substitutie $x = \arctan y$ werkt ook wel eens voor totaal andere gevallen:

Voorbeeld 12 Te bepalen $\int \sqrt{x^2 + 1} \, dx$.

Oplossing (met behulp van de substitutiemethode en breuksplitsen). Denkend aan de formule $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$, substitueren we $x = \tan t$. Dan $dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$ en daarmee $\int \sqrt{x^2 + 1} \, dx = \int \frac{1}{\cos^3 t} dt = \int \frac{dt}{(1 - \sin^2 t) \cos t}$. Substitueren we nu $z = \sin t$, dan is $dz = \cos t \, dt$ en krijgen we $\int \frac{1}{(1-z^2)^2} dz$.

Omdat $\frac{1}{(1-z^2)^2} = \frac{1}{(1-z)^2} \frac{1}{(1+z)^2} = \frac{1/4}{(1-z)^2} + \frac{1/4}{1-z} + \frac{1/4}{(1+z)^2} + \frac{1/4}{1+z}$, vinden we na een korte berekening $\int \sqrt{1+x^2} \, dx = \frac{1}{4} \left(\frac{2z}{1-z^2} + \left| \ln \frac{1+z}{1-z} \right| \right)$. Hierin moet nog $z = \sin t = \sin(\arctan x)$ gesubstitueerd worden. Met $\sin t = \frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}}$ is $z = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Na wat rekenwerk vinden we $\frac{2z}{1-z^2} = 2x\sqrt{1+x^2}$ en $\frac{1+z}{1-z} = (x + \sqrt{1+x^2})^2$. Daaruit tenslotte $\int \sqrt{x^2 + 1} \, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$. (Oef!)

Voorbeeld 13 Te bepalen $\int \sqrt{x^2 - 1} \, dx$.

Oplossing. Dat gaat analoog aan Voorbeeld 12. Men vindt $\int \sqrt{x^2 - 1} \, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}|$.

7 Potpourri

Stel f is inverteerbaar met inverse $f^{<-1>}$ en primitieve F . Dan geldt

$$\int f^{<-1>} \, dx = x f^{<-1>}(x) - F(f^{<-1>}(x)).$$

Inderdaad: de afgeleide van $xf^{<-1>}(x) - F(f^{<-1>}(x))$ is gelijk aan $f^{<-1>}(x) + xf^{<-1>'}(x) - f(f^{<-1>}(x))f^{<-1>'}(x) = f^{<-1>}(x) + xf^{<-1>'}(x) - xf^{<-1>'}(x) = f^{<-1>}(x)$.

8 Opgaven

Exercise 1 *Bepaal de volgende primitieven (waar $b \neq 0$ en $a, c > 0$ is):*

a. $\int (bx + r)^p dx$ (waar $p \neq -1$).

b. $\int \frac{1}{bx+d} dx$.

c. $\int e^{ax} dx$.

d. $\int a^x dx$.

e. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

f. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx$.

g. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - c^2 x^2}} dx$.

h. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx$.

i. $\int \frac{1}{a^2 + c^2 x^2} dx$.

j. $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx$.

k. $\int \sin(bx) dx$.

l. $\int \cos(bx) dx$.

m. $\int \tan(bx) dx$.

n. $\int \cot(bx) dx$.

o. $\int \sinh(bx) dx$.

p. $\int \cosh(bx) dx$.

q. $\int \frac{1}{\sin(bx)} dx$.

r. $\int \frac{1}{\cos(bx)} dx$.

s. $\int \frac{1}{\cos^2(bx)} dx$.

t. $\int \frac{1}{\sin^2(bx)} dx$.

u. $\int \frac{1}{\cosh^2(bx)} dx$.

v. $\int \frac{1}{\sinh^2(bx)} dx$.

Exercise 2 *Bepaal de volgende primitieven met behulp van de Regel der partiële integratie:*

a. $\int x^n \ln x dx$.

b. $\int x^2 e^x dx$.

c. $\int x \sinh x dx$.

d. $\int x \cos(ax) dx$ (waar $a \neq 0$ is).

e. $\int x^2 \cos(ax) dx$ (waar $a \neq 0$ is).

f. $\int e^{ax} \cos(bx) dx$ (waar $a^2 + b^2 \neq 0$ is).

g. $\int \ln^2 x dx$.

Bepaal de volgende primitieven met behulp van de substitutiemethode:

h. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

i. $\int x e^{x^2} dx$.

j. $\int \sqrt{2x-3} dx$.

k. $\int \sin x \cos^6 x dx$.

Bepaal de volgende primitieven met behulp van breuksplitsen:

l. $\int \frac{4}{(x-1)^2(x+1)} dx$

m. $\int \frac{1}{2x^2-4x+2} dx$.

n. $\int \frac{7x^4-5x^3+5x^2+12x-13}{(x-3)(x^2+1)^2}$.

o. $\int \frac{x^3+1}{x^2+1} dx$.

Exercise 3 *Bepaal een recurrente betrekking voor $F_n := \int x^n e^x dx$ en los deze expliciet op.*

Exercise 4 *Bepaal de volgende primitieven:*

a. $\int \sin^2 x \, dx.$

b. $\int \frac{1}{2x^2+x+1} \, dx.$

c. $\int \frac{x}{1+5x^2} \, dx.$

d. $\int \frac{1}{1+5x^2} \, dx.$

e. $\int \frac{x+1}{2x^2+2x+3} \, dx.$

f. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+8}} \, dx.$

g. $\int \frac{x+5}{\sqrt{x^2+6x+8}} \, dx.$

h. $\int \frac{4x+3}{x^2+2x+2} \, dx.$

i. $\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x}.$

j. $\int \cos(\ln x) \, dx.$

k. $\int \frac{1}{x \ln x} \, dx.$

l. $\int \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \, dx.$

m. $\int \ln(a^2 + x^2) \, (a \neq 0).$

n. $\int \sqrt{4 - \sqrt{x}} \, dx.$

o. $\int \frac{x^{1/3}}{1-x} \, dx.$

9 Oplossingen

Solution 1 a. $\frac{1}{b(p+1)}(bx+r)^{p+1} + C.$

b. $\frac{1}{b} \ln |bx+d| + C.$

c. $\frac{1}{a} e^{ax} + C.$

d. $\frac{1}{\ln a} a^x + C.$

e. $\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$

f. $\frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \begin{cases} \operatorname{arcsinh} \frac{x}{a} \\ \operatorname{arccosh} \frac{x}{a} \end{cases} + C.$

g. $\frac{1}{c} \arcsin(\frac{c}{a}x) + C.$

h. $\operatorname{arcsinh} \frac{x}{a} + C.$

i. $\frac{1}{ac} \arctan(\frac{c}{a}x) + C.$

j. $\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$

k. $-\frac{1}{b} \cos(bx) + C.$

l. $\frac{1}{b} \sin(bx) + C.$

m. $-\frac{1}{b} \ln |\cos(bx)| + C.$

n. $\frac{1}{b} \ln |\sin(bx)| + C.$

o. $\frac{1}{b} \cosh(bx) + C.$

p. $\frac{1}{b} \sinh(bx) + C.$

q. $\frac{1}{b} \ln \left| \tan\left(\frac{bx}{2}\right) \right| + C.$

r. $\frac{1}{b} \ln \left| \tan\left(\frac{bx}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + C.$

s. $\frac{1}{b} \tan(bx) + C.$

t. $-\frac{1}{b} \cot(bx) + C.$

u. $\frac{1}{b} \tanh(bx) + C.$

v. $-\frac{1}{b} \coth(bx) + C.$

Solution 2 a. $\frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C.$

b. $x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C.$

c. $x \cosh x - \sinh x + C.$

d. $\frac{x}{a} \sin(ax) + \frac{\cos(ax)}{a^2} + C..$

e. $\frac{x^2}{a} \sin ax + \frac{2x}{a^2} \cos ax - \frac{2}{a^3} \sin ax + C.$

f. $\frac{ae^{ax} \cos bx + be^{ax} \sin bx}{a^2 + b^2} + C.$

g. $x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x.$

h. $-\sqrt{1-x^2} + C.$

i. $\frac{1}{2} e^{x^2} + C.$

j. $\frac{1}{3} (2x-3)^{3/2} + C.$

k. $-\frac{1}{7} \cos^7 x + C.$

l. $\frac{2}{1-x} + \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C.$

m. $-\frac{1}{2} (x-1)^{-1} + C.$

n. $\frac{7x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 12x - 13}{(x-3)(x^2+1)^2} = \frac{5}{x-3} + \frac{2x+1}{x^2+1} + \frac{-4x+5}{(x^2+1)^2} = \frac{5}{x-3} + \frac{2x+1}{x^2+1} - 2 \frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{5}{(x^2+1)^2}.$

Daaruit halen we

$5 \ln |x-3| + \ln(x^2+1) - 2(x^2+1)^{-1} + 5\left(\frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \arctan x\right) + C.$

o. $\frac{1}{2}x^2 + \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$.

Solution 3 $F_n = x^n e^x - \int n x^{n-1} e^x dx = x^n e^x - n P_{n-1}$. Uit $P_0 = e^x$ volgt uit die betrekking dat $P_1 = (x - 1)e^x$, $P_2 = (x^2 - 2x + 2)e^x$ en zo doorgaand zien we dat $P_n = (x^n - n x^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - \dots + (-1)^n n)e^x$.

Solution 4 a. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$.

b. $= \int \frac{dx}{2(x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2})} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x + \frac{1}{4})^2 + \frac{7}{16}} = \frac{8}{7} \int \frac{dx}{(\frac{4}{\sqrt{7}})^2 (x + \frac{1}{4})^2 + 1} dx = \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan(\frac{4}{\sqrt{7}(x + \frac{1}{4})}) + C$.

c. $\frac{1}{10} \ln(1 + 5x^2) + C$.

d. $\frac{1}{\sqrt{5}} \arctan(\sqrt{5}x) + C$.

e. $= \int \frac{x + \frac{1}{2}}{2x^2 + 2x + 3} + \int \frac{\frac{1}{2}}{2x^2 + 2x + 3} dx = \frac{1}{4} \ln(2x^2 + 2x + 3) + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4}} = \dots = \frac{1}{4} \ln(2x^2 + 2x + 3) + \frac{1}{2\sqrt{5}} \arctan(\frac{2}{\sqrt{5}}(x + \frac{1}{2})) + C$.

f. $= \int \frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2 - 1}} = \operatorname{arccosh}(x + 3) + C$.

g. Met f hierboven vinden we $= \int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+8}} dx + \int \frac{2}{\sqrt{x^2+6x+8}} dx = \sqrt{x^2 + 6x + 8} + 2 \operatorname{arccosh}(x + 3) + C$.

h. $\int \frac{4x+3}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{4x+3}{(x+1)^2+1} dx$. De substitutie $u = x + 1$ leidt uiteindelijk tot het resultaat $2 \ln(x^2 + 2x + 2) - \arctan(x + 1) + C$.

i. Door de substitutie $x = \arctan y$ vindt men $\frac{1}{2} \arctan(2 \tan x) + C$.¹²

j. $\frac{1}{2}x(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C$.

k. $\ln(\ln x) + C$.

l. $-\frac{1}{x} \ln(1 + x^2) - 2 \arctan x + C$.

m. $x \ln(a^2 + x^2) - 2x + 2a \arctan \frac{x}{a} + C$.

n. $-\frac{16}{3}(4 - \sqrt{x})\sqrt{4 - \sqrt{x}} + \frac{4}{5}(4 - \sqrt{x})^2 \sqrt{4 - \sqrt{x}} + C$.

o. $-3\sqrt[3]{x} - \ln|1 - \sqrt[3]{x}| + \frac{1}{2} \ln|\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1| + \sqrt{3} \arctan(\frac{\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}) + C$.

¹²We moeten hier, zoals we ook al eerder vermeldden, oppassen: de te primitiveren functie $\frac{1}{1+3\sin^2 x}$ heeft domein $(-\infty, \infty)$. De substitutiefunctie $x = \arctan y$ heeft als bereik echter $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Dus de gevonden primitieve is in orde op dat interval, maar is niet een primitieve zoals gezocht. Interessant verder is het volgende (details laten we aan de lezer over): men controleert dat de gevonden primitieve ook op de intervallen $((-\frac{1}{2} + k)\pi, (\frac{1}{2} + k)\pi)$ een primitieve is. Als we nu ook de natuurlijke $-\infty, \infty$ waarden voor de tangensfunctie in de punten $(\frac{1}{2} + k)\pi$ toelaten en de arctangensfunctie ook in $-\infty, \infty$ definiëren, dan is de gevonden primitieve zelfs op de hele \mathbb{R} geldig. Maar in de punten $(\frac{1}{2} + k)\pi$ is deze niet continu: de "sprong" van $\frac{1}{2} \arctan(2 \tan x)$ in zo'n punt is gelijk aan $\frac{\pi}{2}$. Om dit te verhelpen kiezen we constanten c_k zodat de functie f gedefinieerd door $f(x) = \frac{1}{2} \arctan(2 \tan x) + c_k$ voor $x \in ((-\frac{1}{2} + k)\pi, (\frac{1}{2} + k)\pi)$ in de punten $(\frac{1}{2} + k)\pi$ continu wordt: $c_k = \frac{k\pi}{2}$ voldoet. Nu is f niet alleen continu, maar zelfs differentieerbaar en daarmee een primitieve zoals gezocht.