Parameterafhankelijkheid van Oplossingen

2005

Versie 0.971 (december 2023)

Voorwoord

Dit typoscript geeft resultaten over de parameterafhankelijkheid van unieke oplossingen van vergelijkingen. In het bijzonder zijn we geïnteresseerd in voorwaarden die continue afhankelijkheid garanderen. Daartoe speelt het verband tussen continuïteit van een afbeelding en de geslotenheid van haar grafiek een cruciale rol.

Het typoscript is omlaag te laden op `http://pvmouche.deds.nl/manus.html` (indien die url nog geldig is).[1] Een en ander hier is niet zo snel in de literatuur te traceren. Voorkennis, met name van verzamelingstheoretische topologie, is gewenst; in een appendix wordt een en ander in herinnering geroepen.

Het is in eerste instantie bedoeld voor de wetenschappelijke gemeenschap en mag naar eigen goeddunken gebruikt worden. Het zou wel van karakakter getuigen als daarbij ⓒ gerespecteerd wordt.

Omdat dit typoscript een versienummer < 1 heeft, voelt de auteur zich nog niet zo verantwoordelijk voor onvolkomend- en onvolledigheden; aan een betere versie wordt gewerkt. De auteur dankt Dr. W. Pijnappel voor het meedenken. Uiteraard juicht de auteur verdere op- en aanmerkingen die kunnen leiden tot verbeteringen toe.

Inhoudsopgave

[1] Voor de vervaardiging ervan is het (idealistische) publieke domeintekstzetsysteem LaTeX gebruikt onder het (idealistische) publieke domein besturingssyssteem Linux.

(FIJNE) CONVENTIES EN NOTATIES

– $A \subseteq B$: de verzameling A is een deelverzameling van de verzameling B.
$A \subset B$: $A \subseteq B$, maar $A \neq B$.

– Als $F : A \to B$ een afbeelding is, dan is $F(a) \in B$ voor elke $a \in A$ gedefinieerd. Als B een verzameling van getallen is, dan spreken we ook wel van functie.[2]

– $G \circ F$: samenstelling van de afbeelding F met de afbeelding G.

– $\mathcal{U} : A \multimap B$: correspondentie.

– Voor een correspondentie $\mathcal{U} : A \multimap B$, kan voor $a \in A$ de verzameling $\mathcal{U}(a)$ leeg zijn. $\mathcal{U}$ heet eigenlijk als $\mathcal{U}(a) \neq \emptyset$ voor alle $a \in A$.

– $F{\restriction}_A$: restrictie van de afbeelding F tot A (waar A een deel van het domein van F is).

– Als we over 'positief getal' spreken, dan bedoelen we daarmee[3] een reëel getal groter dan 0. Het getal 0 is zowel een niet-negatief als niet-positief getal.

– $\mathbb{N} : \{0, 1, 2, \ldots\}$,
$\mathbb{N}^* : \{1, 2, 3, \ldots\}$.

– In notaties als $\mathbb{R}^n$ en $\{1, \ldots, n\}$ is $n \in \mathbb{N}^*$.

– X^n : het n-voudige cartesische product $X \times \cdots \times X$ van een verzameling X.

– Elementen van $\mathbb{R}^n$ (en algemener van cartesische producten) en afbeeldingen met codomein $\mathbb{R}^n$ noteren we vaak met vette symbolen; dus we schrijven bijvoorbeeld $\mathbf{x}$ voor een element van $\mathbb{R}^n$. En als $\mathbf{g}$ zo'n afbeelding is, dan is $g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de projectie van g op de j-de coördinaat.

– Elementen van $\mathbb{R}^n$ vatten we op als rijvectoren. Dit heeft als belangrijk voordeel dat rij-vector-notaties zoals $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ typografisch doorgaans prettiger zijn dan kolom-vector-notaties. Vanwege deze conventie duien we de getransponeerde van $\mathbf{x}$ met ${}^t\mathbf{x}$ aan en krijgen zo uitdrukkingen als $A \star {}^t\mathbf{x}$ waar A een $n \times n$-matrix is en $\star$ het symbool voor matrixproducten is.

– ${}^tA$: getransponeerde van matrix A.

– Op $\mathbb{R}^n$ zijn als volgt de relaties $\geq, >, \gg$ gedefinieerd.
$\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$: $x_k \geq y_k$ $(1 \leq k \leq n)$;
$\mathbf{x} > \mathbf{y}$: $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ en $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$;
$\mathbf{x} \gg \mathbf{y}$: $x_k > y_k$ $(1 \leq k \leq n)$.

– $\mathbb{R}^n_+ := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, het niet-negatieve orthant van $\mathbb{R}^n$,
$\mathbb{R}^n_{++} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \gg \mathbf{0}\}$, het positieve orthant van $\mathbb{R}^n$.

– We gebruiken de volgende notaties voor reëele intervallen.
$]a, b[\, : \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, $[a, b[\, : \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ et cetera.

– Een reëel interval heet 'eigenlijk' als dat interval tenminste twee (en daarmee zelfs oneindig veel) elementen bevat.

– $B_r(\mathbf{x})$: de open bol (in $\mathbb{R}^n$) met straal r en middelpunt $\mathbf{x}$.

– $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$: standaard inwendig product in $\mathbb{R}^n$ van de vectoren $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$.

[2] Men ziet ook wel dat voor een functie $F(a)$ niet gedefinieerd hoeft te zijn voor elke $a \in A$.
[3] in tegenstelling tot het gebruik in Frankrijk waar men van 'strikt positief getal' spreekt.

– Als we over 'functie' spreken, dan heeft deze automatisch $\mathbb{R}$ als co-domein en als we over 'lineaire ruimte' spreken dan heeft deze automatisch $\mathbb{R}$ als scalairenlichaam.

– We gebruiken voor functies de volgende monotoniciteits terminologie: dalend, strikt dalend, stijgend en strikt stijgend. Een constante functie is zowel dalend als stijgend.

– Voor de notie van limiet gebruiken we de gepuncteerde variant. Dus voor de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(0) = 1$ en $f(x) = x$ ($x \neq 0$) geldt $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ (en geldt niet dat deze limiet niet bestaat). Tevens veronderstellen we voor limieten zoals $\lim_{x \to a} f(x)$ dat a een afsluitpunt van het domein van f is.

– Quasi-compactheid van een topologische ruimte betekent: elke open overdekking van die ruimte heeft een eindige deeloverdekking.[4] Compactheid van een topologische betekent: de ruimte is quasi-compact en hausdorffs.

– $\mathrm{dist}_A(x)$: in een metrische ruimte, afstand van punt x tot niet-lege deelverzameling A.

– We bedienen ons soms (vooral in lange formules) van zogenaamde verkorte notaties. Dat behelst voornamelijk dat men niet de punten invult waar afbeeldingen (of functies) geëvalueerd worden. In de voetnoten wordt dan, vooral als verwarring kan dreigen, ook nog even de uitgebreide notatie opgenomen.

– De auteur duidt de namen van personen in wiskundige begrippen met een kleine letter aan.[5] De auteur schrijft dus bijvoorbeeld 'nash evenwicht' in plaats van 'Nash evenwicht'.

– De auteur probeert zoveel mogelijk de volgende syntactische regels aan te houden. Als b een bijvoegelijk naamwoord als 'strikt', 'quasi', ... is en m een mathematische eigenschap is, dan heeft een object met eigenschap b m de eigenschap m, maar een object met eigenschap b-m hoeft niet eigenschap m te hebben. Voorbeeld (uit de convexe analyse): een strikt concave functie is concaaf, maar een quasi-concave functie hoeft niet concaaf te zijn. Er zijn echter uitzonderingen hierop: een object met eigenschap 'zwak m' hoeft niet eigenschap m te hebben en en een object met eigenschap 'gegeneraliseerd m' hoeft niet eigenschap m te hebben. Voorbeeld (uit de theorie der vectormaximalisatie): een zwakke maximaliseerder hoeft geen maximaliseerder te zijn. Een ander voorbeeld (uit de speltheorie): een gegeneraliseerd ordinaal potentiaalspel hoeft geen ordinaal potentiaalspel te zijn.

  Verder: als n een naam van een persoon is en m een mathematische eigenschap is, dan schrijven we n-m en niet nm. Voorbeeld: nash-evenwicht.

– Natuurlijk bedoelt de auteur met woorden als 'lezer' zowel vrouwelijke als mannelijke individuen. Dit woordgebruik is louter gebaseerd op stilistische argumenten en is zeker niet bedoeld om enig onderscheid te accentueren.

[4] Dit betreft de Franse conventie. Menigeen spreekt hier van 'compactheid'.

[5] Dat doet de auteur niet om deze personen te kleineren maar om ze te eren: in zekere zin worden zij namelijk daarmee deel van de (Nederlandse) woordenschat.

1 Setting

Soms wil men weten of een oplossing van een vergelijking (of stelsel van vergelijkingen) continu van een parameter afhangt. Dit probleem onderzoeken we in dit typoscript, en wel voor de volgende setting.

A, P en Y zijn niet-lege topologische ruimten met Y hausdorffs, y_0 is een element van Y en

$$f : A \times P \to Y$$

is een functie met de eigenschap dat er voor elke (parameter) $p \in P$ een unieke $a \in A$ is met

$$f(a, p) = y_0.$$

Deze a noterend met $a_\star(p)$ hebben we een wel-gedefinieerde functie

$$a_\star : P \to A$$

en er geldt

$$f(a_\star(p), p) = y_0 \ (p \in P).$$

Een fundamentele observatie nu is dat deze wel-gedefinieerdheid $f^{<-1>}(y_0) = \{(a_\star(p), p) \mid p \in P\}$ impliceert. We hebben dus dat $f^{<-1>}(y_0)$ de gespiegelde grafiek van $a_\star$ is:

$$f^{<-1>}(y_0) = \{(a_\star(p), p) \mid p \in P\} = \mathrm{graph}^T(a_\star) \subseteq A \times P.$$

In plaats van $f(a, p)$ schrijven we ook wel $f_p(a)$. Op die manier hebben we dan voor elke $p \in P$ een functie $f_p : A \to Y$.

Opmerkingen: 1. Men kan de eigenschap van een unieke $a \in A$ loslaten en voor elke $p \in P$ de verzameling $A_p = \{a \in A \mid f(a, p) = 0\}$ definiëren. Dit leidt dan tot een correspondentie $a_\star : P \multimap A$. Een en ander wordt dan wel ingewikkelder.

2 Differentieerbaarheid van oplossingen

Natuurlijk is de Impliciete-functie-stelling van belang in verband met parameterafhankelijkheid van oplossingen. De klassieke variant van deze stelling (eventueel zie ☺ 6 in de appendix) maakt differentieerbaarheidsveronderstellingen en doet uitspraken over locale oplossingen. In deze deelparagraaf gebruiken we die stelling om differentieerbaarheid van de functie a_* te onderzoeken. Later pakken we het probleem dan aan voor situaties waar waar we niet uitgaan van differentieerbaarheid.

In de volgende stelling zijn A en P open eigenlijke reële intervallen en $Y = \mathbb{R}$.

Stelling 1 *Stel A en P zijn open eigenlijke reële intervallen en $f : A \times P \to \mathbb{R}$ is k-maal continu differentieerbaar waar k een positief geheel getal of oneindig is. Als $D_1 f(a_\star(p), p) \neq 0$ $(p \in P)$, dan is $a_\star : P \to \mathbb{R}$ een k-maal continu differentieerbare functie.* $\diamond$

Bewijs.— Fixeer $p_0 \in P$. We laten zien, en dan zijn we klaar, dat er een open omgeving V van p_0 in $\mathbb{R}$ met $V \subseteq P$ bestaat zodanig dat de functie $a_\star : V \to \mathbb{R}$ k-maal continu differentieerbaar is. Omdat $f(a_\star(p_0), p_0) = 0$ en $D_1 f(a_\star(p_0), p_0) \neq 0$, garandeert de impliciete-functie-stelling de existentie van een open omgeving U van $a_\star(p_0)$ in $\mathbb{R}$ en een open omgeving V van p_0 in $\mathbb{R}$ met $U \times V \subseteq A \times P$ en een unieke functie $\Psi : V \to \mathbb{R}$ met $\Psi(V) \subseteq U$ zodanig dat

$$\{(\Psi(p), p) \mid p \in V\} = \{(a, p) \in U \times V \mid f(a, p) = 0\}.$$

Tevens: Ψ is k-maal continu differentieerbaar.

We bewijzen nu dat $a_\star(p) = \Psi(p)$ $(p \in V)$. Welnu, fixeer $p_1 \in V$. Dan $(\Psi(p_1), p_1) \in \{(a,p) \in U \times V \mid f(a,p) = 0\} \subseteq A \times P$. Dus $f(\Psi(p_1), p_1) = 0$. Omdat $a_\star(p_1)$ de enige $a \in A$ is met $f(a, p_1) = 0$, volgt $\Psi(p_1) = a_\star(p_1)$.

Er volgt: $a_\star : P \to \mathbb{R}$ is k-maal continu differentieerbaar. Q.e.d.

Merk op dat we uitgaan van een situatie waar er voor elke $p \in P$ een unieke oplossing $a_\star(p)$ is. De Impliciete-functie-stelling wordt dus niet gebruikt voor de existentie van een (locale) oplossing, maar alleen om differentieerbaarheidseienschappen van de functie $a_\star$ te garanderen.

3 Intermezzo: continuïteit versus gesloten grafiek

Laat X en Y verzamelingen zijn en $g : X \to Y$ een afbeelding. Dan is de grafiek van g de deelverzameling van $X \times Y$ gedefinieerd door

$$\mathrm{graph}(g) := \{(x, g(x)) \mid x \in X\}$$

en de gespiegelde grafiek van g de deelverzameling van $Y \times X$ gedefinieerd door

$$\mathrm{graph}^T(g) := \{(g(x), x) \mid x \in X\}.$$

Als X en Y topologische ruimten zijn, dan heeft het, het cartesische product $X \times Y$ van de producttopologie voorziend, zin te spreken van dingen als dat $\mathrm{graph}(g)$ gesloten (in $X \times Y$) is. Er geldt dan: $\mathrm{graph}(g)$ is gesloten d.e.s.d.a. $\mathrm{graph}^T(g)$ is gesloten.

Lemma 1 *Zij X een topologische ruimte, Y een hausdorffse topologische ruimte, $g : X \to Y$ een afbeelding en B een gesloten deel van Y. Zij K een deelverzameling van Y die $g(X)$ omvat. Dan*

$$g^{<-1>}(B) = P((X \times B) \cap \mathrm{graph}(g)),$$

waar $P : X \times K \to X$ de projectie op de eerste coördinaat.[6] $\diamond$

Bewijs.— Merk eerst op dat $(X \times B) \cap \mathrm{graph}(g) \subseteq \mathrm{graph}(g) \subseteq X \times K$.

'$\subseteq$': stel $x \in g^{<-1>}(B)$. Dan $(x, g(x)) \in (X \times B) \cap \mathrm{graph}(g)$ en $x = P(x, g(x)) \in P((X \times B) \cap \mathrm{graph}(g))$.

'$\supseteq$': stel $x \in P((X \times B) \cap \mathrm{graph}(g))$. Laat $(x', b) \in (X \times B) \cap \mathrm{graph}(g)$ met $x = P(x', b)$. Er volgt $x = x'$ en $g(x') = b$. Dus $x = x' \in g^{<-1>}(B)$. Q.e.d.

Propositie 1 *Zij X een topologische ruimte, Y een hausdorffse topologische ruimte en $g : X \to Y$ een afbeelding. Dan:*

1. *g is continu $\Rightarrow$ $\mathrm{graph}(g)$ is gesloten.*

2. *Als Y compact is, dan geldt: g is continu $\Leftrightarrow$ $\mathrm{graph}(g)$ is gesloten.* $\diamond$

Bewijs.— 1. Zie ☺ 4, in de appendix.

2. Vanwege deel 1, resteert '$\Leftarrow$' te bewijzen. Stel $\mathrm{graph}(g)$ is gesloten deel van $X \times Y$. Zij K de topologische afsluiting van $g(X)$ in Y. Dan $g(X) \subseteq K$. K is dus een gesloten deel van de compacte Y en vandaar ook compact. De continuïteit van $g : X \to Y$ bewijzen we door aan te tonen dat voor elk gesloten deel B van Y, $g^{<-1>}(B) = \{x \in X \mid g(x) \in B\}$ een gesloten deel van X is. Fixeer nu zo'n B. Met (de notaties) van Lemma 1 geldt $g^{<-1>}(B) = P((X \times B) \cap \mathrm{graph}(g))$. Omdat K compact is, is (zie eventueel ☺ 5) P gesloten, i.e. elke gesloten deelverzameling van $X \times K$ heeft als beeld onder P een gesloten deel van X. Dus het bewijs is rond als we weten dat $(X \times B) \cap G$ een gesloten deel van $X \times K$ is.

Welnu, $\mathrm{graph}(g)$ is per veronderstelling een gesloten deel van $X \times Y$. Omdat $\mathrm{graph}(g) \subseteq X \times K$ en $X \times K$ een gesloten deel van $X \times Y$ is, volgt: dat $\mathrm{graph}(g)$ een gesloten deel van $X \times K$ is.

[6] I.e. $(x, y) \mapsto x$, is.

Omdat $(X \times B) \cap \mathrm{graph}(g) = (X \times (B \cap K)) \cap \mathrm{graph}(g)$ en ook $X \times (B \cap K)$ een gesloten deel van $X \times K$ is, volgt het gewenste. Q.e.d.

De twee volgende voorbeelden laten zien dat '$\Leftarrow$' in Propositie 1(2) niet hoeft te gelden als Y niet compact is.

Voorbeeld 1 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zij gedefinieerd door

$$g(x) := \begin{cases} e^{1/x} \text{ als } x \neq 0, \\ 0 \text{ als } x = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Dan $\mathrm{graph}(g)$ is gesloten en g is niet-continu. $\diamond$

Voorbeeld 2 $g : \mathbb{R} \to]0,1[$ zij gedefinieerd door

$$g(x) := \begin{cases} 1/2 \text{ als } x \leq 0, \\ e^{-x} \text{ als } x > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Dan $\mathrm{graph}(g)$ is gesloten (in $\mathbb{R} \times]0,1[$) en g is niet-continu. $\diamond$

Opmerkingen: 2. Propositie 1(2) volgt ook uit niet zo elementaire resultaten uit de niet-lineaire analyse, en wel uit resultaten voor correspondenties die verbanden behelzen tussen het hemi-continu naar boven zijn en het een gesloten grafiek hebben. Dat is dan best zwaar geschut voor een bewijs omdat de auteur zich hier niet met correspondenties, maar slechts met afbeeldingen, bezig houdt.

3. Propositie 1 gaat dus over het verband tussen continuïteit van een afbeelding en het gesloten zijn van haar grafiek. In de wiskunde is er een stelling met de naam 'Stelling van de gesloten grafiek' die ook over dit verband gaat voor lineaire afbeeldingen, maar echt veel diepzinniger is.[7]

Stelling 2 hieronder is een nuttige generalisatie van Propositie 1(2).

Propositie 2 *Zij X een topologische ruimte, Y een hausdorffse topologische ruimte en $g : X \to Y$ een afbeelding waarvoor $g(X)$ bevat is in een compact deel van Y. Dan: g is continu $\Leftrightarrow$ $\mathrm{graph}(g)$ is gesloten.* $\diamond$

Bewijs.— Propositie 1(1) hebbend moeten we nog '$\Leftarrow$' bewijzen. Stel dus dat $\mathrm{graph}(g)$ gesloten is. Zij K een compact deel van Y dat $g(X)$ bevat. We hebben dus

$$\mathrm{graph}(g) \subseteq X \times K \subseteq X \times Y.$$

Volgens ☺ 3(2) is $g : X \to Y$ continu dan en slechts dan als haar corestrictie $\tilde{g} : X \to K$ continu is. Volgens Propositie 1(2) zijn we klaar als we laten zijn dat de grafiek $\{(x, \tilde{g}(x)) \mid x \in X\}$ van die corestrictie, hetgeen weer $\mathrm{graph}(g)$ is, een gesloten deel van $X \times K$ is. Welnu, volgens ☺ 1 is dat zo omdat zowel $\mathrm{graph}(g)$ als ook (want K is gesloten in Y) $X \times K$ gesloten in $X \times Y$ zijn. Q.e.d.

Stelling 2 *Zij X een topologische ruimte en $g : X \to \mathbb{R}^m$ een begrensde afbeelding. Dan: g is continu $\Leftrightarrow$ $\mathrm{graph}(g)$ is gesloten.* $\diamond$

Bewijs.— $g(X)$ is een begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}^n$. De afsluiting van die verzameling is een gesloten en begrensd deel van $\mathbb{R}^n$ en vandaar compact. Omdat die afsluiting $g(X)$ bevat, impliceert Propositie 2 het gewenste. Q.e.d.

[7] Ja, ondanks dat het over lineaire afbeeldingen gaat! Men bedenke dat er zich in oneindig dimensionale lineaire topologische ruimten minder alledaagse problemen kunnen voordoen.

4 Continuïteit van oplossingen

Als men zich de situatie van de setting voor de geest haalt, dan is het niet uitgesloten dat men in geval van een continue f vermoedt dat ook de functie $a_\star$ continu is. Echter dat hoeft niet zo te zijn. Het volgende voorbeeld geeft een hele klasse van tegenvoorbeelden.

Voorbeeld 3 Laat $A = P = Y = \mathbb{R}$ en fixeer een functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die niet continu is en een gesloten grafiek heeft (bijvoorbeeld de functie gedefinieerd door (1)). Zij Γ de gespiegelde grafiek van g. Ook Γ is gesloten. Omdat $\Gamma \neq \emptyset$, is in $\mathbb{R}^2$ de kortste-afstands-functie tot Γ een wel-gedefinieerde functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: het is de functie die aan $(a,p) \in \mathbb{R}^2$ de (wel-gedefinieerde) kortste afstand tot Γ toevoegt. Het is welbekend dat f continu is en dat de topologische afsluiting van Γ, zijnde weer Γ, de verzameling der nulpunten van f is. Dus $\{(a,p) \in \mathbb{R}^2 \mid f(a,p) = 0\} = \{(g(p),p) \mid p \in \mathbb{R}\}$. Vandaar $a_\star = g$ en dus is $a_\star$ niet continu.

Stelling 3 *Stel A is een gesloten deel van $\mathbb{R}^n$ en $f : A \times P \to Y$ is continu.*[8]

1. *Als de functie $a_\star : P \to A$ begrensd is, dan is deze functie continu.*
2. *Als A begrensd is, dan is de functie $a_\star : P \to A$ continu.* $\diamond$

Bewijs.— 1. Stel $a_\star : P \to A$ is begrend. Stelling 2 impliceert dat deze afbeelding continu als we laten zien dat $\mathrm{graph}(a_\star)$ gesloten in $P \times A$ is. We bewijzen, hetgeen equivalent is, dat $\mathrm{graph}^T(a_\star)$ gesloten in $A \times P$ is. Welnu, omdat $\mathrm{graph}^T(a_\star) = f^{<-1>}(y_0)$, resteert dus te bewijzen dat $f^{<-1>}(y_0)$ gesloten in $A \times P$ is. En dat laatste is zo omdat $f : A \times P \to Y$ continu en Y hausdorffs is.

2. Dat volgt uit deel 1. Q.e.d.

Propositie 3 *Stel A is een onbegrensd gesloten reëel interval met $A \subseteq \mathbb{R}_+$, $P$is een eigenlijk reëel interval en $f : A \times P \to \mathbb{R}$ is continu. Verder stel dat voor alle $p \in P$ geldt: $f(a,p) > 0$ voor alle $a \in A$ met $a < a_\star(p)$ en $f(a,p) < 0$ voor alle $a \in A$ met $a > a_\star(p)$ (dat is in het bijzonder zo als f dalend in de eerste variabele is). Dan: de functie $a_\star : P \to \mathbb{R}$ is continu.* $\diamond$

Bewijs.— Het is voldoende te bewijzen dat de restrictie $a_\star : P' \to \mathbb{R}$ continu is voor elk (niet-leeg) segment P' dat in P bevat is. Stel dat P' zo'n segment is; verder in dit bewijs verwijst $a_\star$ naar die restrictie. We bewijzen dat $a_\star$ begrensd is en zijn dan klaar met Stelling 3.

Laat $p \in P'$. Omdat $f(a_\star(p),p) = 0$ en $f(a,p) < 0$ voor alle $a \in A$ met $a > a_\star(p)$ en A onbegrensd is, kunnen we $a(p) > a_\star(p)$ fixeren zodanig dat $f(a(p),p) < 0$. Omdat f continu in $(a(p),p)$ is, is er een open bol $B_{r(p)}(a(p),p)$ in $A \times P'$ met straal $r(p) > 0$ rond $(a(p),p) \in A \times P'$ waarop f negatief is. Laat $Z = \cup_{p \in P'} B_{r(p)}(a(p),p) \subseteq A \times P'$ en laat, met $B_{r(p)}(p)$ de open bol in P' met straal $r(p)$ rond p, $Z' = \cup_{p \in P'} B_{r(p)}(p) \subseteq P'$. Z' is een open overdekking van de compacte verzameling P'. Dus kunnen we $p = p_1, \ldots, p_m \in P'$ zodanig kiezen dat $P' \subseteq \cup_{i=1}^m B_{r(p_i)}(p_i)$. We mogen veronderstellen dat $a(p_1) \geq a(p_k)$ $(1 \leq k \leq m)$. Nu fixeer $p \in P'$. We gaan bewijzen dat $a_\star(p) \leq a(p_1)$ en zijn dan (omdat ook $0 \leq a_\star(p)$) klaar. Neem $k \in \{1, \ldots, m\}$ zodanig dat $p \in B_{r(p_k)}(p_k)$. Er volgt $\| (a(p_k),p) - (a(p_k),p_k) \| = \| (0, p - p_k) \| = |p - p_k| < r(p_k)$ en vandaar $(a(p_k),p) \in B_{r(p_k)}(a(p_k),p_k)$ en daarom $f(a(p_k),p) < 0$. Omdat $f(\cdot,p)$ strikt dalend is, volgt $a_\star(p) < a(p_k) \leq a(p_1)$. Q.e.d.

In bovenstaande is het domein van f een cartesisch product. Andere settings zijn mogelijk. Als voorbeeld bekijken we nu zo'n situatie.

Laat P een eigenlijk reëel interval met $0 \in P \subseteq \mathbb{R}_+$ zijn, $\Delta := \{(a,p) \in \mathbb{R}_+ \times P \mid 0 \leq a \leq p\} \subseteq \mathbb{R}_+ \times P$,

$$f : \Delta \to \mathbb{R}$$

[8] Misschien overbodig op te merken, maar toch: we voorzien $\mathbb{R}^n \times P$ van de producttopologie en vervolgens de deelverzameling $A \times P$ van $\mathbb{R}^n \times P$ van de relatieve topologie.

en stel voor elke $p \in P$ is er een unieke $a \in \mathbb{R}_+$ met $0 \leq a \leq p$ en $f(a,p) = 0$. Deze a noterend met $a_\star(p)$, hebben we een wel-gedefinieerde functie

$$a_\star : P \to \mathbb{R}_+$$

en er geldt

$$f(a_\star(p), p) = 0 \ (p \in P).$$

Een fundamentele observatie is nu weer dat deze wel-gedefinieerdheid

$$f^{<-1>}(0) = \{(a_\star(p), p) \mid p \in P\} = \mathrm{graph}^T(a_\star) \subseteq \mathbb{R}_+ \times P.$$

impliceert. Alhoewel in het licht van Stelling 3(2) de functie $a_\star$ niet begrensd hoeft te zijn is, geldt:

Propositie 4 *De functie $a_\star : P \to \mathbb{R}_+$ is continu.* $\diamond$

Bewijs.— Omdat P een interval is, is het voldoende te bewijzen dat voor elk segment $P' = [\underline{p}, \overline{p}]$ met $\underline{p} < \overline{p}$ dat in P bevat is de restrictie $a_\star : P' \to \mathbb{R}_+$ van $a_\star$ continu is. Daartoe is het voldoende te laten zien dat de functie $a_\star : P' \to \mathbb{R}$ continu is. Verder in dit bewijs verwijst $a_\star$ naar deze laatste functie.

Fixeer dan nu verder zo'n segment. Merk op dat $a_\star$ begrensd is vanwege $0 \leq a_\star(p) \leq p \leq \overline{p}$ $(p \in P')$. Met Propositie 2 zijn we klaar als we laten zien dat $\mathrm{graph}^T(a_\star)$ gesloten in $\mathbb{R} \times P'$ is.

Laat $\hat{\Delta} = \{(a,p) \in \mathbb{R}_+ \times P' \mid 0 \leq a \leq p\}$ en beschouw de restrictie $\hat{f} : \hat{\Delta} \to \mathbb{R}$ van f. Er geldt natuurlijk weer dat $\mathrm{graph}^T(a_\star) = \hat{f}^{<-1>}(0)$. Resteert dus te bewijzen dat $\hat{f}^{<-1>}(0)$ gesloten in $\mathbb{R} \times P'$ is. Voor de duidelijkheid:

$$\hat{f}^{<-1>}(0) \subseteq \hat{\Delta} \subseteq \mathbb{R} \times P' \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Omdat $\hat{f} : \hat{\Delta} \to \mathbb{R}$ continu is, is $\hat{f}^{<-1>}(0)$ gesloten in $\hat{\Delta}$. $\hat{\Delta}$ en $\mathbb{R} \times P'$ zijn gesloten in $\mathbb{R}^2$; ☺ 1 impliceert dat $\hat{\Delta}$ gesloten in $\mathbb{R} \times P'$. Tenslotte impliceert ☺ 2 dat $\hat{f}^{<-1>}(0)$ gesloten in $\mathbb{R} \times P'$ is. Q.e.d.

5 Maximalisatieproblemen

De setting in kwestie kan gebruikt worden voor het onderzoek van parameterafhankelijkheid van unieke oplossingen van maximalisatieproblemen, dus van unieke maximaliseerders. De auteur presenteert hier zo'n resultaat; het berust op Stelling 3(2).

Propositie 5 *Gegeven eigenlijke reële intervallen A en P met A compact en een functie $g : A \times P \to \mathbb{R}$. Stel de functie $g_p : A \to \mathbb{R}$ is differentieerbaar en strikt pseudo-concaaf.*

1. *De functie g_p heeft voor elke $p \in P$ een unieke maximaliseerder $a_\bullet(p)$.*
2. *Beschouw de (dankzij deel 1) wel-gedefinieerde functie $a_\bullet : P \to A$. Stel $D_1 g$ is continu en elke $a_\bullet(p)$ is een inwendig punt van A. Dan is $a_\bullet$ continu.* $\diamond$

Bewijs.— 1. Omdat g_p continu is, heeft g_p volgens de Stelling van Weierstrass een maximaliseerder. Omdat g_p strikt quasi-concaaf is (eventueel zie ☺ 7(2)), is deze maximaliseerder uniek.

2. Definieer $f : A \times P \to \mathbb{R}$ door $f(a,p) = g_p'(a)$. Dus $f = D_1 g$. f is per veronderstelling continu. Merk op dat A gesloten en begrensd is. Voor alle $p \in P$ geldt volgens de Stelling van Fermat dat $f(a_\bullet(p), p) = g_p'(a_\bullet(p)) = 0$. Verder als $f(a,p) = 0$, dan is $g_p'(a) = 0$ en volgt, omdat g_p pseudo-concaaf is, dat a een maximaliseerder van g_p is en dus, vanwege deel 1, dat $a = a_\bullet(p)$. Conclusie: voor elke $p \in P$ is er een unieke $a \in A$ met $f(a,p) = 0$. We kunnen nu Stelling **??**(2) toepassen: merk daartoe op dat $a_\bullet = a_\star$. Q.e.d.

Een vraagje: als een maximalisatieprobleem continu van een parameter afhangt en voor zekere parameterwaarde een unieke maximaliseerder heeft, is er dan dan in de buurt van die parameterwaarde ook een unieke maximaliseerder? Het volgende voorbeeld toont aan dat dat niet hoeft te gelden.

Voorbeeld 4 Stel $G = \{(x_1, x_2) \mid x_2 - 2x_1 + 1 = 0 \ \vee -x_2 - 2x_1 + 1 = 0\}$ en $g : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$g(a,p) = g_p(a) := 1 - \mathrm{dist}_G(a,p).$$

Dan: g is continu, g_0 heeft $1/2$ als maximaliseerder en g_p met $0 < p \leq 1$ heeft twee maximaliseerders. $\diamond$

A Potpourri van verzamelingstheoretische topologie

We presenteren hier enkele elementaire resultaten uit de verzamelingstheoretische topologie. Soms geven we een bewijs.

☺ **1** *Stel X is een topologische ruimte, Y een deelruimte van X en $A \subseteq Y$. Dan: A is open (gesloten) in Y dan en slechts dan als er een open (gesloten) deel U van X is met $A = U \cap Y$.*

☺ **2** *Stel X is een topologische ruimte, Y een deelruimte van X en $A \subseteq Y$. Als A gesloten is in Y en Y gesloten is in X, dan is A gesloten in X.*

Bewijs.— We gebruiken ☺ 1. Omdat A gesloten in Y is, is er er een gesloten deel U_1 van X is met $A = U_1 \cap Y$. Dus A is, zijnde een doorsnede van twee gesloten delen van X gesloten in X. Q.e.d.

De restrictie of corestrictie van een continue afbeelding continu is (voor de geïnduceerde topologieën:

☺ **3** *Stel (X,T) en (X',T') zijn topologische ruimten*[9] *en $f : X \to X'$ een afbeelding.*

1. *Stel $X'' \subseteq X$. Met T'' de topologie geïnduceerd door T op X'' geldt: $f : (X,T) \to (X',T')$ is continu $\Rightarrow f : (X'',T'') \to (X',T')$ is continu.*
2. *Stel $f(X) \subseteq X'' \subseteq X'$. Met T'' de topologie geïnduceerd door T' op X'' geldt: $f : (X,T) \to (X',T')$ is continu $\Leftrightarrow f : (X,T) \to (X'',T'')$ is continu.*

☺ **4** *De grafiek van een continue afbeelding $g : X \to Y$, waar X en Y topologische ruimten zijn met Y hausdorffs, is een gesloten deel van $X \times Y$.*

Bewijs.— Hier is een bewijs van deze bewering in het geval X en Y metrische ruimten zijn: zij (x_n, y_n) een rij uit $\mathrm{graph}(g)$ die convergent is, zeg met limiet $(x,y) \in X \times Y$. We moeten laten zien dat $(x,y) \in \mathrm{graph}(g)$. Omdat $(x_n, y_n) \in \mathrm{graph}(g)$ is $y_n = g(x_n)$. Dus de rij $(x_n, g(x_n))$ convergeert naar (x,y). Dit impliceert dat (x_n) naar x convergeert en dat $(g(x_n))$ naar y convergeert. Omdat g continu in x is, convergeert de rij $(g(x_n))$ naar $g(x)$. Dus $g(x) = y$ en daarmee $(x,y) \in \mathrm{graph}(g)$.

En hier voor het algemenere geval: zij Ω het complement van $\mathrm{graph}(g)$ in $X \times Y$. We gaan bewijzen dat Ω open is. Fixeer $(x_0, y_0) \in \Omega$. Dan $y_0 \neq g(x_0)$. Omdat Y hausdorffs is, bestaan er disjuncte open omgevingen V en W van y_0 respectievelijk $g(x_0)$. Omdat g continu in x_0 is, is er een open omgeving U van x_0 zodanig dat $g(U) \subseteq W$. Als $(u,v) \in U \times V$, dan geldt $g(u) \in W$ en $v \in V$ en dus $g(u) \neq v$, i.e. $(u,v) \notin \mathrm{graph}(g)$. De open omgeving $U \times V$ van (x_0, y_0) ligt daarom in Ω. Dus Ω is open. Q.e.d.

☺ **5** *Laat X en K topologische ruimten zijn met K quasi-compact. Dan is de projectie op de eerste coördinaat $P : X \times K \to X$ gesloten.*

Bewijs.— Hier is een bewijsje waarbij de auteur voor het gemak aanneemt dat X een metrische ruimte is: zij A een gesloten deel van $X \times K$. Aan te tonen is dat $P(A)$ een gesloten deel is van X. Stel (x_n) is een convergente deelrij in $P(A)$. We moeten dus nu aantonen dat de limiet ξ van die rij in $P(A)$ ligt. Kies voor elke x_n een $y_n \in K$ met $(x_n, y_n) \in A$ en $P(x_n, y_n) = x_n$. De y_n liggen in de compacte K, dus is er een deelrij $(y_{p(n)})$ van (y_n) die convergeert, zeg naar η. Nu is $(x_{p(n)}, y_{p(n)})$ een rij in A die convergeert naar (ξ, η). Omdat A gesloten is, ligt (ξ, η) ook in A en dus ligt ξ in $P(A)$, hetgeen te bewijzen was. Q.e.d.

[9] We noteren hier dus expliciet de topologieën.

B Impliciete-functie-stelling

De (klassieke) Impliciete-functie-stelling is een belangrijk resultaat uit de analyse.

☺ **6** *(Impliciete-functie-stelling.) Zij W een open deel van $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ en $f : W \to \mathbb{R}^n$ een k-maal continu differentieerbare functie waar k een positief geheel getal of $+\infty$ is. Stel*

$$(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{y}^{(0)}) \in W,\ f(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{y}^{(0)}) = \mathbf{0},\ D_x f(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{y}^{(0)}) \text{ is inverteerbaar.}$$ [10]

Dan bestaat er een open omgeving U van $\mathbf{x}^{(0)}$ in $\mathbb{R}^n$ en een open omgeving V van $\mathbf{y}^{(0)}$ in $\mathbb{R}^p$ met $U \times V \subseteq W$ en een unieke afbeelding $\Psi : V \to U$ zodanig dat

$$\{(\Psi(\mathbf{y}), \mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \in V\} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V \mid f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}\}.$$

Verder als U, V en Ψ dusdanig zijn, dan is de afbeelding $\Psi : V \to \mathbb{R}^n$ k-maal continu differentieerbaar.[11]

Bewijs.— Zie bijvoorbeeld [1]. Q.e.d.

C Pseudo-concaviteit

In deze paragraaf is I een eigenlijk reëel interval en $f : I \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie. Voor bewijzen verwijzen we naar de literatuur.[12]

a. f heet pseudo-concaaf als voor alle $x, y \in I$ met $x \neq y$

$$f(x) < f(y) \ \Rightarrow\ f'(x)(y - x) > 0.$$

b. g heet strikt pseudo-concaaf als voor alle $x, y \in I$ met $x \neq y$

$$f(x) \leq f(y) \ \Rightarrow\ f'(x)(y - x) > 0.$$

☺ **7** *1. f is (strikt) concaaf $\Rightarrow$ f is (strikt) pseudo-concaaf.*

2. f is strikt pseudo-cocaaf $\Rightarrow$ f is strikt quasi-concaaf.

☺ **8** *Stel $f : I \to \mathbb{R}$ is twee keer differentieerbaar. Als voor alle $x \in I$*

$$f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ f''(x) < 0$$

geldt, dan is f strikt pseudo-concaaf.

Referenties

[1] J. J. Duistermaat and J. A. C. Kolk. *Multidimensional Real Analysis I, II.* Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[2] M. Truchon. *Théorie de l'Optimisation Statique et Différentiable.* Gaëtan morin, Cicoutimi, 1987. ISBN 2 89105 118 1.

[10] $D_x f(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{y}^{(0)})$ betreft hier de afgeleide van de functie $f(\cdot, \mathbf{y}^{(0)})$ in $\mathbf{x}^{(0)}$; dat is dus hier een lineaire afbeelding $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

[11] En nu geldt ook voor elke deelverzameling V' van V dat $\{(\Psi(\mathbf{y}), \mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \in V'\} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V' \mid f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}\}$.

[12] Deze is vrij schaars wat dat onderwerp betreft. Hier is er een: [2].