De lafferkromme

Pierre v. Mouche

April 2006

Verbeterde versie 0.855 (maart 2008)

Inhoudsopgave

Voorwoord

Dit typoscript gaat over de lafferkromme Het model dat daaraan ten grondslag ligt is het arbeid-vrije-tijd-model. Dat bestuderen we daarom eerst. Een en ander beoogt niet meer dan een inleiding te zijn. Opgemerkt zij dat ook de verhandeling niet mathematisch rigoureus is, maar dat we wel steeds pogen aan te geven waar ze dat niet is.

Het is mooi mee genomen als de lezer enige vertrouwdheid heeft met het micro-economische standaard nutsmaximalisatiemodel.

Uiteraard houd ik me aanbevolen voor op- en aanmerkingen die kunnen leiden tot verbeteringen.

Notaties en conventies

- In notaties als $\mathbb{R}^n$ en $\{1, \ldots, n\}$ is, tenzij anders vermeld, $n \geq 1$.
- Als we over "functie" spreken, dan is deze automatisch reëelwaardig.
- We gebruiken voor functies de volgende monotoniciteitstermen: dalend, strikt dalend, stijgend en strikt stijgend. De functie $f(x) := 7$ is zowel dalend als stijgend.
- Als we over "positief getal" spreken, dan bedoelen we daarmee een reëel getal groter dan 0.
- Elementen van $\mathbb{R}^n$ en afbeeldingen met waarden in $\mathbb{R}^n$ noteren we met vette symbolen; dus we schrijven bijvoorbeeld $\mathbf{x}$ voor een element van $\mathbb{R}^n$.
- Elementen van $\mathbb{R}^n$ vatten we op als rijvectoren. Dit heeft als belangrijk voordeel dat rij-vector-notaties zoals $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ typografisch doorgaans prettiger zijn dan kolom-vector-notaties, maar een nadeel is dat we dan getransponeerden $\mathbf{x}^t$ moeten gebruiken in uitdrukkingen zoals $A \star \mathbf{x}^t$ waar A een $m \times n$-matrix is.

1 Inleiding

In menig micro-economisch model bekommert men zich er niet om hoe een consument aan zijn budget komt. Afgezien van reëlewereldpraktijken zoals beroving en geld cadeau krijgen zijn daar de volgende gebruikelijkere manieren voor. De eerste is dat een consument voor een producent (of andere subjecten) werkt, of in meer verhevene termen, een consument ruilt een deel van zijn productiefactor arbeid om voor geld. De tweede is dat een consument een deel van de winsten ontvangt die diverse producenten maken, omdat die consument zichzelf op de een of andere manier verdienstelijk maakt bij die producenten. In dit typoscript bekijken we slechts de eerste mogelijkheid. Het model dat we gebruiken is het zogenaamde arbeid-vrije-tijd-model. Eenmaal dit model hebbende kan men leuke dingen doen, zoals bestuderen wat de invloed is van belastingheffing. In dat verband is de zogenaamde lafferkromme[1] van belang die het verband weergeeft tussen de belastingopbrengst en het belatingpercentage.

2 Het arbeid-vrije-tijd-model

Beschouw een consument, in het $n-$goederengeval, die in een vaste tijdsperiode van duur

$$T$$

een duur

$$a$$

werkt voor een loon

$$w$$

per duureenheid. Hij werkt dan een duur $T - a$ niet. Men noemt dit zijn vrije tijd en we duiden deze met

$$v$$

(van vrije tijd) aan. Er geldt dus de tijdsrestrictie

$$v + a = T.$$

We gaan ervan uit dat hij ook al een niet-negatieve hoeveelheid geld M had.[2] In dit verband noemt men M exogeen inkomen. De consument ontleent niet alleen nut aan de n goederen maar ook aan zijn vrije tijd.[3] Beschouw vrije tijd daarom ook als goed en veronderstel een nutsfunctie[4]

$$u(v, \mathbf{x})$$

voor al die goederen; hier noteren we $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Vrije tijd een goed zijnde, impliceert dat arbeid een slecht is: meer werken verlaagt het nut.[5] Het budget dat de consument te besteden heeft, is

$$m := w \cdot (T - v) + M,$$

dus afhankelijk van de hoeveelheid vrije tijd v. De term $w(T - v) = w \cdot a$ noemt men endogeen inkomen.

Met $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ de prijzen van de n goederen aanduidend, behelst het nutsmaximalisatieprobleem van de consument nu het maximaliseren van de functie $u(v, \mathbf{x})$ onder de restrictie

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq w(T - v) + M.$$

[1]Arthur Laffer (1940-), USA-er en econoom. Bekend vanwege de lafferkromme. Opgemerkt zij dat deze bekendheid enigszins onterecht is omdat het verschijnsel dat de lafferkromme beschrijft aan economen al lang bekend was.

[2]In feite zou M ook negatief kunnne zijn, in welk geval het dan om schulden zou gaan.

[3]Het hoeft daarbij niet om pure vrije tijd te gaan, maar ook tijd die men in het huishouden en gezin steekt kan eronder vallen.

[4]Het is de gewoonte om in grafieken vrije tijd op de horizontale as te zetten.

[5]Een "workaholic" past in onze versie van het model over arbeidsaanbod dus niet.

Oftewel, het maximaliseren va de functie $u(v, \mathbf{x})$ onder de restrictie $wv + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq wT + M$: Deze laatste formulering bevalt ons, denkend aan het standaard nutsmaximalisatieprobleem, het beste; nu is w te interpreteren als de prijs van vrije tijd. Het nutsmaximalisatieprobleem van de consument is nu een nutsmaximalisatieprobleem voor een situatie van $n + 1$ goederen met prijzen $w, \mathbf{p}$, nutsfunctie $u(v, \mathbf{x})$ en budget $wT + M$, toegerekend (fictief) budget genoemd, onder de budgetrestrictie

$$wv + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq wT + M.$$

Dus het gaat om het maximalisatieprobleem

$$\mathrm{MAX}_{\substack{(v,\mathbf{x}) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n_+ \\ wv + \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} \leq wT + M}} u(v, \mathbf{x}).$$

Merk op dat indien $M = 0$ is voor $(v, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ die aan de budgetrestrictie voldoet automatisch $v \leq T$ geldt, maar dat dat niet meer geldt als $M > 0$ is. Mede daarom is dit nutsmaximalisatieprobleem niet van dezelfde aard als de klasse van dergelijke problemen die men standaard behandelt. En ook is dat zo omdat de prijs van vrije tijd zijn weerslag op het getal wT en dus op het toegerend budget heeft. Enige oplettendheid met het klakkeloos toepassen van standaard ontwikkelde theorie kan dus op zijn plaats zijn.

Een goederenbundel $(v, \mathbf{x})$ die oplossing is van dit maximalisatieprobleem noemen we optimale goederenbundel. Als $(v, \mathbf{x})$ zodanig is, dan hoort daarbij ook een optimale hoeveelheid arbeid via $a = T - v$. In geval er een unieke optimale goederenbundel is,: dan noteren we de parameterafhankelijkheid expliciet als volgt (met een tilde):

$$\tilde{v}(w, \mathbf{p}; M), \;\; \tilde{\mathbf{x}}(w, \mathbf{p}; M).$$

Dan is ook

$$\tilde{a}(w, \mathbf{p}; M) := T - \tilde{v}(w, \mathbf{p}; M),$$

i.e. de arbeidsaanbodfunctie wel-gedefinieerd. Interessant is nog op te merken dat we hier een aanbodfunctie uit een nutsfunctie (en niet uit een productiefunctie) afgeleid hebben.

Als alles even meezit, dan kunnen we op het nutsmaximalisatieprobleem in kwestie de tweede Wet van Gossen toepassen. We vinden dan het volgende stelsel van $n+1$ vergelijkingen in de $n+1$ positieve onbekenden $v, x_1, \ldots, x_n$:

$$\frac{\partial u}{\partial v} / \frac{\partial u}{\partial x_j} = w/p_j \;\; (1 \leq j \leq n),$$

$$wv + p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n = wT + M.$$

In het geval dat $n = 1$, wat al interessant genoeg is, wordt het stelsel

$$\frac{\partial u}{\partial v} / \frac{\partial u}{\partial x_1} = w/p_1,$$

$$wv + p_1 x_1 = wT + M.$$

Bekijken we eens het geval waar

$$u(v, x) = v^{\alpha} x^{1-\alpha},$$

waar $\alpha \in (0, 1)$. u is een cobb-douglas nutsfunctie. (Het is bekend dat daarvoor alles even meezit.) In geval $M < \frac{1-\alpha}{\alpha} wT$ is de unieke oplossing van de vergelijkigen in kwestie:

$$\tilde{v}(w, p_1; M) = \alpha \frac{wT + M}{w},$$

$$\tilde{x}_1(w, p_1; M) = (1 - \alpha) \frac{wT + M}{p_1}.$$

Merk op dat indien $M = 0$, de functie $\tilde{v}$ niet van w afhangt: $\tilde{v} = \alpha T$.

De gebruikelijke intuï van prijsveranderingen zegt als de prijs van vrije tijd omhoog gaat, dan neemt de vraag naar vrije tijd af. Maar, net als in het standaard nutsmaximalisatiemodel gaat deze vlieger gaat niet altijd op, omdat een goed best giffen kan zijn. En zeker is dat in het arbeid-vrij-tijd-model zo: het effect van de prijs van vrije tijd op de geconsumeerde vrije tijd, en dus op het aanbod van arbeid kan nogal vaak dubbelzinnig zijn, veel vaker dan in het standaard nutsmaximalisatiemodel. Ook intuïtief is dat duidelijk: als het loon flink omhoog gaat, dan stijgt het endogeen inkomen al flink zodat het best kan dat men dan wat meer vrije tijd gaat nemen, i.e. minder gaat werken.

Opgave 1 *Stel* $u(v, x_1) = \min(v, x_1)$*. Stel* $M = 0$*. Laat zien dat er voor elke* w, p_1, T *een unieke goederenbundel is en dat*

$$\tilde{v}(w, p_1; M) = \frac{w}{w + p_1} T,$$
$$\tilde{x}_1(w, p_1; M) = \frac{w}{w + p_1} T.$$

En concludeer: $\tilde{v}$ *is stijgend in* w*.*

3 De lafferkromme

We gaan nu het bovenstaande arbeid-vrije-tijd-model uitbreiden met een belastingheffing (door de overheid) op het endogeen inkomen wa. Duid met

$$\theta \in [0, 1]$$

het belastingpercentage aan. In geval van een hoeveelheid arbeid a leidt dit voor de overheid tot een bedrag, verder belastingopbrengst te noemen, gelijk aan[6]

$$\theta w a.$$

Bekijken we nu hoe het nutsmaximalisatieprobleem uit de vorige paragraaf aan te passen voor deze vorm van belastingheffing. Welnu, omdat het budget nu $(1 - \theta)w(T - v)$ is, gaat het om het maximaliseren van de functie $u(v, \mathbf{x})$ onder de restrictie

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq w(1 - \theta)(T - v) + M.$$

Oftewel om het maximaliseren van de functie $u(v, \mathbf{x})$ onder de restrictie $(1 - \theta)wv + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq (1 - \theta)wT + M$. Deze laatste formulering bevalt ons weer het beste:

$$\text{MAX}_{\substack{(v,\mathbf{x}) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n_+ \\ (1-\theta)wv + \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} \leq (1-\theta)wT + M}} u(v, \mathbf{x}).$$

Het maximalisatieprobleem van de consument is nu een nutsmaximalisatieprobleem voor een situatie van $n + 1$ goederen met prijzen $(1 - \theta)w, \mathbf{p}$, nutsfunctie $u(v, \mathbf{x})$ en budget $(1 - \theta)wT$ onder de restrictie $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq w(1 - \theta)(T - v) + M$.

Optimale hoeveelheden hangen nu ook nog eens van θ af. Voor het gemak bekijken we nu alleen deze afhankelijkheid; dus $w, \mathbf{p}$ en M zijn vast. We duiden deze afhankelijkheid met een subschrift θ aan. Uitgaande van een wel-gedefinieerde optimale hoeveelheid arbeid $\tilde{a}(\theta)$ zijn we erin geïnteresseerd hoe de belastingopbrengstfunctie

$$I(\theta) := \theta w \tilde{a}(\theta)$$

eruit ziet.

[6] Men kan het model uitbreiden door rekening te houden met een bedrag A waarover geen belasting geheven wordt: in dat geval is $\max(\theta(wa - A), 0)$ de belasingheffing.

Bovenstaande vraag gaan we hieronder (voor het gemak) analyseren voor een speciaal 1−goederengeval. Beschouw daartoe het 1−goederengeval en wel de situatie waar $T = 4, p = 1, M = 0$ en de (quasi-lineaire) nutsfunctie

$$u(v, x) = \sqrt{v} + x.$$

Het gaat dus nu om het vinden van de optimale goederenbundel (v, x) voor de nutsfunctie $\sqrt{v} + x$ onder de restrictie $(1 - \theta)wv + 1 \cdot x = 4(1 - \theta)w$. Weer met behulp van de tweede Wet van Gossen (met nu $(1 - \theta)w$ en 1 als prijzen) vinden we nu voor de vraagfuncties

$$\tilde{v}(\theta) = \frac{1}{4w^2(1-\theta)^2}, \quad \tilde{x}_1(\theta) = 4(1-\theta)w - \frac{1}{4(1-\theta)w}.$$

Maar, deze formules kunnen niet (helemaal) goed zijn omdat $\tilde{x}_\theta(w) < 0$ is indien $(1 - \theta)w < \frac{1}{4}$ is. Dat komt omdat de gebruikte methode geen rekening houdt met het feit dat $x \geq 0$ en $v \geq 0$ is. Daarmee wel rekening houdend, ligt het voor de hand dat de juiste formules zijn:

$$\tilde{v}(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{4w^2(1-\theta)^2} \text{ als } (1-\theta)w > \frac{1}{4}, \\ 4 \text{ als } (1-\theta)w \leq \frac{1}{4} \end{cases},$$

$$\tilde{x}_1(\theta) = \begin{cases} 4(1-\theta)w - \frac{1}{4(1-\theta)w} \text{ als } (1-\theta)w > \frac{1}{4}, \\ 0 \text{ als } (1-\theta)w \leq \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Bovenstaande formules voor de vraagfuncties zijn daarmee inderdaad helemaal in orde. Dus voor de arbeidsaanbodfunctie vinden we

$$\tilde{a}(\theta) = \begin{cases} 4 - \frac{1}{4w^2(1-\theta)^2} \text{ als } (1-\theta)w > \frac{1}{4}, \\ 0 \text{ als } (1-\theta)w \leq \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Nemen we nu verder $w = 1$, dan krijgen we dus

$$I(\theta) = \begin{cases} 4\theta - \frac{\theta}{4(1-\theta)^2} \text{ als } \theta < \frac{3}{4}, \\ 0 \text{ als } \theta \geq \frac{3}{4}. \end{cases}$$

De grafiek van deze functie is getekend in Figuur 1 en staat bekend als een lafferkromme. De functie $I : [0, 1] \to \mathbb{R}$ is continu maar niet concaaf. De restrictie tot $[0, 3/4]$ is wel concaaf, zelfs strikt concaaf.

We zien nog dat elke mogelijke positieve niet-maximale waarde van de belastingopbrengst precies voor twee verschillende belastingpercentages verkregen kan worden. Er zijn dus situaties waarbij een verlaging van het belastingpercentage leidt tot een toename van de belastingopbrengst. Dit is geen artefact van de gebruikte cobb-douglas-nutsfunctie maar geldt veel algmemener.[7] Het idee is dat een verlaging van het belastingpercentage een positief effect heeft op de economie in de zin dat er meer gewerkt wordt waardoor de stijging van het endogeen inkomen zodanig is dat deze de daling van de belastingopbrengst meer dan compenseert. Dit is natuurlijk een economisch zeer interessante observatie.[8]

Laten we even bekijken dat bovenstaand verschijnsel inderdaad geen artefact is. De fundamentele observatie daartoe is allerereerst datvoor $\theta = 0$ de belastingopbrengst nul is. Verder is voor $\theta = 1$, als alles even meezit, $(v, x) = (T, 0)$ de unieke oplossing van het nutsmaximalisatieprobleem en vandaar $a = 0$ hetgeen impliceert dat ook voor $\theta = 1$ de belastingopbrengst nul is We hebben dus als alles even meezit een continue functie $I : [0, 1] \to \mathbb{R}$ met $I(0) = I(1) = 0$ en $I \geq 0$. Natuurlijk hoort daarbij niet zonder meer een figuur als Figuur 1, maar wel het aangekondigde verschijnsel.

Opgave 2 *Bepaal $I(\theta)$ in geval van de nutsfunctie $u(v, x) = vx$.*

[7] Hoe algemeen, weet ik niet. Dat is een aardig onderwerp voor verder onderzoek.

[8] Ze spreekt vooral diegenen aan die vinden dat er teveel belasting betaald wordt.

Figuur 1: Een lafferkromme.