Boven- en benedenlimieten

2012

Verbeterde versie 1.340

(november 2020)

Voorwoord

Dit typoscript over boven- en benedenlimieten voor rijen en functies is omlaag te laden op `http://pvmouche.deds.nl` (indien die url nog bestaat).[1] Het is in eerste instantie bedoeld voor de wetenschappelijke gemeenschap en mag naar eigen goeddunken gebruikt worden. Het zou wel van karakakter getuigen als daarbij 🄯 gerespecteerd wordt.

Enige voorkennis is vereist; enkele belangrijke eigenschappen van $\mathbb{R}$ laten we de revue passeren. Als toepassing worden dini-afgeleiden behandeld.

Uiteraard houdt de auteur zich aanbevolen voor verdere op- en aanmerkingen die kunnen leiden tot verbeteringen.

Inhoudsopgave

[1] Voor de vervaardiging ervan is het (idealistische) publieke-domein-tekstzetsysteem LaTeX gebruikt onder het (idealistische) besturingssyssteem Linux.

1 Reële getallen

In deze paragraaf laten we enkele belangrijke eigenschappen van het "systeem" $\mathbb{R}$ van de reële getallen de revue passeren.

1.1 Volledigheid

Formeel gezien is een "systeem" van reële getallen niet anders dan een volledig geordend lichaam. Wat daarmee precies bedoeld wordt, is hier verder niet van belang. De auteur merkt slechts op dat zo'n systeem bestaat, dat er weliswaar diverse constructies van zo'n systeem mogelijk zijn, maar dat het systeem (essentieel) eenduidig is. Men duidt het met $\mathbb{R}$ aan. En tenslotte dat de constructie ervan nogal subtiel is.[2]

Wij gaan uit van de constructie van $\mathbb{R}$ met behulp van cauchy-rijen. Waar het daarbij om gaat is dat elke cauchy-rij uit $\mathbb{R}$ een limiet heeft, i.e. convergent is.[3] Anders gezegd: $\mathbb{R}$ is volledig. Dit impliceert het volgende fundamentele resultaat dat begrensde monotone rijen convergent zijn:

Stelling 1 *Iedere naar boven begrensde stijgende rij uit $\mathbb{R}$ is een cauchy-rij en dus convergent.* $\diamond$

Bewijs.— We bewijzen de bewering nu uit het ongerijmde. Stel dus er is een begrensde stijgende rij (a_n) uit $\mathbb{R}$ die geen cauchy-rij is. Dat betekent dat er een $\epsilon > 0$ is zo dat voor alle $N > 0$ er $n, m \geq N$ zijn met $|a_n - a_m| > \epsilon$. Fixeer $X \in \mathbb{R}$ met $a_n < X$ voor alle n. Kies een N_1 en $n_1 > m_1 > N_1$ zodanig dat $a_{n_1} - a_{m_1} > \epsilon$. Kies een $N_2 > n_1$ en $n_2 > m_2 > N_2$ zodanig dat $a_{n_2} - a_{m_2} > \epsilon$. Enzovoorts. We krijgen zo: $a_{m_1} < a_{n_1} \leq a_{m_2} < a_{n_2} < \cdots$ met de eigenschap dat $a_{n_k} - a_{m_k} > \epsilon$ voor alle k. Dit impliceert $a_{n_k} - a_{m_1} > X - a_0$ voor k groot genoeg. Echter voor zulke k is $a_{n_k} < X$ en $a_0 \leq a_{m_1}$. Conflict. Q.e.d.

Natuurlijk geldt ook dat iedere begrensde monotone rij uit $\mathbb{R}$ een cauchy-rij en dus convergent is.

Een ander nuttig fundamenteel resultaat, dat niets met de volledigheid van $\mathbb{R}$ te schaften heeft, is:

Stelling 2 *Elke rij uit $\mathbb{R}$ heeft een monotone deelrij.* $\diamond$

Bewijs.— Zij (a_n) een rij. We noemen een natuurlijk getal l een <u>lichtpunt</u> als $a_k < a_l$ voor alle $k > l$.[4] We onderscheiden twee gevallen.

Er zijn oneindig veel lichtpunten: deze kunnen worden gerangschikt in een strikt stijgende rij $n_0, n_1, \ldots$. Nu is $a_{n_0}, a_{n_1}, \ldots$ een (strikt) dalende deelrij van (a_n).

Er zijn slechts eindig veel lichtpunten: dan is er een natuurlijk getal N zodanig dat voor alle $n \geq N$ geldt dat n geen lichtpunt is. Voor alle $n \geq N$ bestaat er dus $n' > n$ met $a_{n'} \geq a_n$. We kunnen nu inductief een stijgende deelrij van (a_n) construeren. Q.e.d.

Combinatie van de vorige twee stellingen levert:

Corollarium 1 *(Bolzano-Weierstrass.) Elke begrensde rij uit $\mathbb{R}$ heeft een convergente deelrij.* $\diamond$

1.2 Uitgebreide stelsel der reële getallen

Het <u>uitgebreide stelsel der reële getallen</u> $\overline{\mathbb{R}}$ krijgen we door aan de verzameling der reële getallen $\mathbb{R}$ de symbolen $-\infty$ en $+\infty$ toe te voegen. Dus

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

[2] Velen die zich dagelijks met wiskunde bezighouden, hebben die constructie (en bijhorende eigenschappen zoals dat $xy = yx$ voor alle $x, y \in \mathbb{R}$) nooit bestudeerd. Dat komt omdat zelfs in menige wiskundeopleiding er geen of maar nauwelijks aandacht aan besteed.

[3] Een andere manier is met behulp van Dedekind-sneden en nog een andere via decimale ontwikkelingen.

[4] Motivatie van deze terminologie: breidt de grafiek van de functie $n \mapsto a_n$ door lineaire interpolatie uit tot een "berglandschap" en we stellen ons voor dat de zon zich rechts aan de horizon bevindt.

De totale ordeningsrelatie $\leq$ van $\mathbb{R}$ breiden we als volgt uit tot een totale ordeningsrelatie van $\overline{\mathbb{R}}$:

$$-\infty \leq x \leq +\infty \quad (x \in \overline{\mathbb{R}}).$$

In plaats van $\overline{\mathbb{R}}$ gebruikt men ook wel de intervalnotatie $[-\infty, +\infty]$.

Verder introduceren we de rekenregels

$$x + \infty = \infty + x = +\infty \quad (x \neq -\infty);$$

$$x + -\infty = -\infty + x = -\infty \quad (x \neq +\infty);$$

$$0 \cdot +\infty = +\infty \cdot 0 = 0 \cdot -\infty = -\infty \cdot 0 = 0;$$

$$x \cdot +\infty = +\infty \cdot x = +\infty \ (x > 0);$$

$$x \cdot -\infty = -\infty \cdot x = -\infty \ (x > 0);$$

$$x \cdot +\infty = +\infty \cdot x = -\infty \ (x < 0);$$

$$x \cdot -\infty = -\infty \cdot x = +\infty \ (x < 0).$$

We introduceren een metriek (en daarmee ook een topologie) in $\overline{\mathbb{R}}$:

$$d(x, y) := |\arctan(x) - \arctan(y)|,$$

waar $\arctan(-\infty) = -\pi/2$ en $\arctan(+\infty) = \pi/2$.

1.3 Verdichtings- en limietpunten

Stelling 3 *Elke begrensde oneindige deelverzameling A van $\mathbb{R}$ heeft een verdichtingspunt.*[5]

Bewijs.— Fixeer een rij (b_n) uit A waarvan alle elementen verschillend zijn. Deze rij is begrensd. Volgens Bolzano-Weierstrass heeft deze rij een convergente deelrij, zeg (a_n), met limiet, zeg a. Zij nu $\epsilon > 0$. Er bestaat een natuurlijk getal N zodanig dat $|a_n - a| < \epsilon$ voor alle $n \geq N$. Omdat alle elementen van de rij (a_n) verschillend zijn, bestaat er een $n_0 \geq N$ met $a_{n_0} \in A \setminus \{a\}$ en $|a_{n_0} - a| < \epsilon$. Q.e.d.

Propositie 1 1. *De limiet van een convergente rij is het unieke limietpunt van die rij.*[6]

2. *Elke rij van reële getallen heeft een limietpunt.* $\diamond$

Bewijs.— 1. Zij a de limiet. Natuurlijk is a een limietpunt. Verder is a het enige limietpunt want elke deelrij heeft limiet a.

2. Als de rij begrensd is, dan heeft deze volgens de Stelling van Bolzano-Weierstrass een convergente deelrij en dus een limietpunt.

Als de rij naar boven onbegrensd is, dan is er een deelrij met limiet $+\infty$ en als de rij naar beneden onbegrensd is, dan is een deelrij met limiet $-\infty$. Q.E.D.

[5] Ter herinnering: $a \in \mathbb{R}$ is een <u>verdichtingspunt</u> van een deelverzameling A van $\mathbb{R}$ betekent dat voor elke $\epsilon > 0$ er een $x \in A \setminus \{a\}$ is met $|x - a| < \epsilon$.

[6] ter herinnering: als (a_n) een rij uit $\mathbb{R}$ is, dan heet $x \in \overline{\mathbb{R}}$ een <u>limietpunt</u> van (a_n) als er een deelrij van (a_n) bestaat met limiet x.

2 Supremum en infimum

2.1 Algemene definitie

In deze paragraaf leggen we de notie van supremum en infimum uit in de context van een partieel geordende verzameling.[7] We beschouwen er verder steeds een partiëel geordende verzameling, dat wil zeggen een 2-tuple $(\mathcal{P}, \geq)$ waar $\mathcal{P}$ een verzameling is en $\geq$ een binaire relatie op $\mathcal{P}$ is zó dat voor alle $x, y, z \in \mathcal{P}$

$$x \geq x \text{ (i.e. reflexieve relatie)},$$

$$(x \geq y \wedge y \geq z) \Rightarrow x \geq z \text{ (i.e. transitieve relatie)},$$

$$(x \geq y \wedge y \geq x) \Rightarrow x = y \text{ (i.e. antisymmetrische relatie)}.$$

Met $\leq$ duiden we de duale relatie van $\geq$ aan, dat wil zeggen $x \leq y$ betekent $y \geq x$. Verder zijn de relaties $>$ en $<$ op $\mathcal{P}$ gedefinieerd door

$$x > y \text{ als } x \geq y \text{ en } x \neq y,$$

$$x < y \text{ als } x \leq y \text{ en } x \neq y.$$

Definitie 1 Een element y van $\mathcal{P}$ heet een grootste element van $\mathcal{P}$ als $y \geq x$ voor alle $x \in \mathcal{P}$. Een element y van $\mathcal{P}$ heet een kleinste element van $\mathcal{P}$ als $y \leq x$ voor alle $x \in \mathcal{P}$. $\diamond$

Definitie 2 Zij $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{P}$.

1. $x \in \mathcal{P}$ heet een bovengrens (of majorant) van $\mathcal{W}$ als $w \leq x$ voor alle $w \in \mathcal{W}$. Als $\mathcal{W}$ een bovengrens heeft, dan heet $\mathcal{W}$ een naar boven begrensd deel van $\mathcal{P}$.
2. $x \in \mathcal{P}$ heet een ondergrens (of minorant) van $\mathcal{W}$ als $x \leq w$ voor alle $w \in \mathcal{W}$. Als $\mathcal{W}$ een ondergrens heeft, dan heet $\mathcal{W}$ een naar onder begrensd deel van $\mathcal{P}$.
3. $\mathcal{W}$ heet een begrensd deel van $\mathcal{P}$ als $\mathcal{W}$ zowel een naar boven als naar beneden begrensd deel van $\mathcal{P}$ is. $\diamond$

Definitie 3 Zij $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{P}$.

- Een bovengrens x van $\mathcal{W}$ heet een kleinste bovengrens van $\mathcal{W}$ of het supremum van W, notatie $\sup_{\mathcal{P}}(W)$ of kortweg $\sup(W)$, als elke bovengrens x' van $\mathcal{W}$ voldoet aan $x \leq x'$.[8]
- Een ondergrens x van $\mathcal{W}$ heet een grootste ondergrens van $\mathcal{W}$ of het infimum van W, notatie $inf_{\mathcal{P}}(W)$ of kortweg $\inf(W)$, als elke ondergrens x' van $\mathcal{W}$ voldoet aan $x \geq x'$. $\diamond$

Propositie 2 *Er bestaat hoogstens één grootste en hoogstens één kleinste element van $\mathcal{P}$. Elke $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{P}$ heeft hoogstens één kleinste bovengrens en hoogstens één grootste ondergrens.* $\diamond$

Bewijs.— Oefening voor de lezer. Q.e.d.

Het is goed de volgende fijne opmerkingen te maken: allereerst, als $\mathcal{P} = \emptyset$, dan is $(\mathcal{P}, \geq)$ een partieel geordende verzameling. Elke $x \in \mathcal{P}$ is een bovengrens (en ondergrens) van $\mathcal{W} = \emptyset$, maar een kleinste bovengrens hoeft niet te bestaan. En: in geval $\mathcal{P} = \emptyset$, heeft de deelverzameling $\mathcal{W} = \emptyset$ geen bovengrens (en dus ook geen kleinste bovengrens).

Definitie 4 $(\mathcal{P}, \geq)$ heet een tralie als elke tweetal elementen uit $\mathcal{P}$ een supremum en een infimum heeft. In dat geval noteren we $\sup(\{x, y\})$ ook wel met $x \cup y$ en $\inf(\{x, y\})$ ook wel met $x \cap y$.

Definitie 5 Een tralie $(\mathcal{P}, \geq)$ heet volledig als elke deelverzameling van $\mathcal{P}$ een infimum en een supremum heeft. $\diamond$

Dus: als $(\mathcal{P}, \geq)$ een volledig tralie is, dan is $\mathcal{P} \neq \emptyset$.

[7] Deze noties maken zelfs zin in de context van pré geordende verzamelingen.

[8] Oftewel, een kleinste bovengrens van $\mathcal{W}$ is niks anders dan een kleinste element van de verzameling der bovengrenzen van $\mathcal{W}$. Idem voor grootste ondergrens.

2.2 Geval van $\overline{\mathbb{R}}$

Stelling 4 *$(\overline{\mathbb{R}}, \geq)$ is een volledig tralie In het bijzonder* $\sup(\emptyset) = -\infty$ *en* $\inf(\emptyset) = +\infty$. $\diamond$

Bewijs.— We bewijzen dat V een kleinste bovengrens heeft en dat $\sup(\emptyset) = -\infty$; de geldigheid van de andere beweringen volgt dan uit dit resultaat door met de verzameling $-V = \{-x \mid x \in V\}$ aan de slag te gaan.

Als $V = \emptyset$, dan is elke $M \in \mathbb{R}$ een bovengrens van V. Dit leidt tot $\sup(\emptyset) = -\infty$. Als V naar boven onbegrensd is, i.e. als er geen $M \in \mathbb{R}$ is met $x \leq M$ $(x \in V)$, dan zien we dat $\sup(V) = +\infty$.

Tenslotte veronderstel dat V niet-leeg en naar boven begrensd is. Met wat gepruts (dat we aan de lezer overlaten) kan men gebruik makend van de volledigheid van $\mathbb{R}$ aantonen dat V een kleinste bovengrens heeft. Q.e.d.

We hebben al gezien:

$$\inf(\emptyset) = +\infty, \ \ \sup(\emptyset) = -\infty.$$

En voor $V, W \subseteq \mathbb{R}$ geldt (bewijzen worden aan de lezer overgelaten):

$$V \neq \emptyset \ \Rightarrow \ \inf(V) \leq \sup(V);$$

$$V \text{ naar boven begrensd } \ \Leftrightarrow \ \sup(V) < +\infty;$$

$$V \text{ naar beneden begrensd } \ \Leftrightarrow \ \inf(V) > -\infty;$$

$$\sup(-V) = -\inf(V);$$

$$\text{als } \lambda \in \,]0, +\infty\,[, \text{ dan } \sup(\lambda V) = \lambda \sup(V) \text{ en } \inf(\lambda V) = \lambda \inf(V);$$

$$V \subseteq W \ \Rightarrow \ [\sup(V) \leq \sup(W) \text{ en } \inf(V) \geq \inf(W)];$$

$$V \leq W \ \Rightarrow \ [\sup(V) \leq \sup(W) \text{ en } \inf(V) \leq \inf(W)];$$

$$\sup(V \cup W) = \max(\sup(V), \sup(W)), \ \ \inf(V \cup W) = \min(\inf(V), \inf(W));$$

$$\sup(\overline{V}) = \sup(V), \ \ \inf(\overline{V}) = \inf(V);$$ [9]

$$\text{als } V \neq \emptyset \text{ en } W \neq \emptyset, \text{ dan } \sup(V + W) = \sup(V) + \sup(W) \text{ en } \inf(V + W) = \inf(V) + \inf(W).$$

Als I een indexverzameling is en $x_i \in \overline{\mathbb{R}}$ voor elke $i \in I$, dan schrijven we in plaats van $\inf\{x_i \mid i \in I\}$ ook wel $\inf_{i \in I} x_i$ en voor $\sup\{x_i \mid i \in I\}$ ook wel $\sup_{i \in I} x_i$.

Stelling 5 *Zij (a_n) een rij uit $\mathbb{R}$. Als (a_n) stijgend is, dan geldt* $\lim_{n \to \infty} a_n = \sup_n a_n$. *Als (a_n) dalend is, dan geldt* $\lim_{n \to \infty} a_n = \inf_n a_n$. $\diamond$

Bewijs.— We bewijzen de eerste bewering; de tweede volgt daaruit meteen. We nemen aan dat (a_n) begrensd; het geval dat (a_n) niet begrensd is, is een oefening voor de lezer. Zij (a_n) zo'n rij. Stelling 1 garandeert dat de rij convergeert, zeg naar a. We bewijzen nu dat $\sup a_n = a$. Wel, omdat de rij stijgend is volgt $a_n \leq a$ voor alle n. Dus a is een bovengrens van de rij. En als b ook een bovengrens is, dan is $a \leq b$ (want als $b < a$ zou zijn, dan zou $a_n \leq b < a$ hetgeen in tegenspraak met de converentie van (a_n) naar a is). Q.e.d.

Als (a_n) en (b_n) rijen uit $\mathbb{R}$ zijn, dan geldt

$$a_n \leq b_n \text{ voor alle } n \ \Rightarrow \ [\sup_n a_n \leq \sup_n b_n \text{ en } \inf a_n \leq \inf b_n];$$

$$\sup_n (a_n + b_n) \leq \sup_n a_n + \sup_n b_n, \ \ \inf_n (a_n + b_n) \geq \inf_n a_n + \inf_n b_n.$$

Hierboven had de notie van infimum en supremum betrekking op een verzameling. Als volgt kan men op natuurlijke wijze nu het infimum en supremum van reëelwaardige functies definiëren.

Definitie 6 Zij $f : A \to \mathbb{R}$ een functie; hier is A een verzameling. Dan

$$\sup f := \sup(f(A)), \ \ \inf f := \inf(f(A)).$$

In het bijzonder voor $f : \emptyset \to \mathbb{R}$ volgt $\sup f = -\infty$ en $\inf f = +\infty$. $\diamond$

[9] $\overline{V}$ is de topologische afsluting van V.

3 Boven- en benedenlimitieten

Na het bovenstaande behandeld te hebben, zijn we meer dan klaar om ons bezig te houden met de titel van dit syposcript: boven- en benedenlimieten.

3.1 Voor rijen uit $\mathbb{R}$

Voor $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ hebbben we gezien dat $\sup(A)$ en $\inf(A)$ wel-gedefinieerde elementen van $\overline{\mathbb{R}}$ zijn.

Zij (a_n) een rij uit $\mathbb{R}$. Voor elk natuurlijk getal $n\,(\geq 1)$ zij

$$s_n := \sup\{a_k \mid k \geq n\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

$$i_n := \inf\{a_k \mid k \geq n\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Men definieert

Definitie 7 Zij (a_n) een rij uit $\mathbb{R}$.

$$\limsup_{k\to\infty} a_k := \inf_n s_n \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \liminf_{k\to\infty} a_k := \sup_n i_n \in \overline{\mathbb{R}}.$$

$\limsup_{k\to\infty} a_k$ heet ook wel de <u>bovenlimiet</u> van de rij (a_n) en $\liminf_{k\to\infty} a_k$ heet ook wel de <u>benedenlimiet</u> van de rij (a_n). $\diamond$

In plaats van $\limsup_{k\to\infty} a_k$ noteert men ook wel $\overline{\lim}\, a_k$ en in plaats van $\liminf_{k\to\infty} a_k$ noteert men ook wel $\underline{\lim}\, a_k$.

In plaats van $\limsup_{k\to\infty} a_k$ en $\liminf_{k\to\infty} a_k$ zal ik hieronder ook wel kortweg respectievelijk

$$L, \; l$$

schrijven.[10]

Vanwege de eenvoudige eigenschappen

$$\overline{\lim}\,(-a_k) = -\underline{\lim}\, a_k, \;\; \underline{\lim}\,(-a_k) = -\overline{\lim}\, a_k,$$

kunnen we resultaten voor lim sup snel omzetten in die voor lim inf (en omgekeerd).

Voor alle k, m geldt

$$s_k \geq a_k \geq i_k, \;\; s_k \geq i_m,$$

(inderdaad: $s_k \geq a_{k+m} \geq i_m$). Dat impliceert $\inf_k s_k \geq i_l$ en daaruit $\inf_k s_k \geq \sup_l i_l$. Dus

$$\overline{\lim}\, a_k \geq \underline{\lim}\, a_k.$$

En zelfs

$$\sup_k a_k \geq \overline{\lim}\, a_k \geq \underline{\lim}\, a_k \geq \inf_k a_k.$$

Merk op dat de rij (s_n) dalend is en dat de rij (i_n) stijgend is; vandaar, voor alle n,

$$L \leq s_n \text{ en } l \geq i_n.$$

Merk ook op dat $\overline{\lim}\, a_k = +\infty$ dan en slechts dan als (a_n) naar boven onbegrensd is en dat $\underline{\lim}\, a_k = -\infty$ dan en slechts dan als (a_n) naar beneden onbegrensd is.

De noties van lim sup en lim inf zijn doorgaans een speciaal geval van de notie van limiet van een rij. Inderdaad, omdat de rij (s_n) dalend is, geldt in geval (s_n) naar boven begrensd is ook nog in $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\overline{\lim}\, a_k = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

[10] In plaats van $\limsup_{k\to\infty} a_k$ schrijft men ook wel $\overline{\lim}_{k\to\infty} a_k$ en in plaats van $\liminf_{k\to\infty} a_k$ schrijft men ook wel $\underline{\lim}_{k\to\infty} a_k$.

En omdat de rij (i_n) stijgend is, geldt in geval (i_n) naar beneden begrensd is ook nog in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\underline{\lim}\, a_k = \lim_{n\to\infty} i_n.$$

Voorbeeld: voor de rij (a_n) gegeven door $a_n = n$ geldt $s_n = +\infty$ en $i_n = n$ en vandaar $L = l = +\infty$.

Propositie 3 *Zij (a_n) een rij uit $\mathbb{R}$. Voor alle $a \in \overline{\mathbb{R}}$ geldt: $\overline{\lim}\, a_k = \underline{\lim}\, a_k = a \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = a$.* $\diamond$

Bewijs.— '$\Leftarrow$': We bewijzen eerst uit het ongerijmde dat $L \leq a$. Stel dus $L > a$. Dan is $a \neq +\infty$ en is er een $c \in \mathbb{R}$ met $L > c > a$. Dus $c > a_n$ voor n groot genoeg, zeg voor $n \geq N$. Dat impliceert dat $c \geq s_N$ en dus ook $c \geq L$. Tegenspraak. Net zo blijkt $l \geq a$. We hebben dus $L \leq a \leq l \leq L$. Dus $L = l = a$.

'$\Rightarrow$': als $a = +\infty$, dan is $l = \sup_n i_n = +\infty$ en bestaat er voor elke $A \in \mathbb{R}$ een een N met $i_N > A$. Dat impliceert $a_n > A$ voor alle $n \geq N$ en dus is $\lim_{k\to\infty} a_k = +\infty = l = a$. Als $a = -\infty$ gaat de redenering net zo. Rest het geval $a \in \mathbb{R}$. Nu s_n, i_n voor alle n en weten we dat $a = l = \overline{\lim}\, a_k = L$. Q.e.d.

Propositie 4 *Laat (a_n) en (b_n) rijen uit $\mathbb{R}$ zijn.*

1. *voor $\lambda \in \mathbb{R}_+$: $\overline{\lim}\,(\lambda a_k) = \lambda \overline{\lim}\, a_k$ en $\underline{\lim}\,(\lambda a_k) = \lambda \underline{\lim}\, a_k$.*
   voor $\lambda < 0$: $\overline{\lim}\,(\lambda a_k) = \lambda \underline{\lim}\, a_k$ en $\underline{\lim}\,(\lambda a_k) = \lambda \overline{\lim}\, a_k$.
2. *als $a_n \leq b_n$ voor alle n, dan $\overline{\lim}\, a_k \leq \overline{\lim}\, b_k$ en $\underline{\lim}\, a_k \leq \underline{\lim}\, b_k$.*
3. *$\overline{\lim}\,(a_k + b_k) \leq \overline{\lim}\, a_k + \overline{\lim}\, b_k$ als het rechterlid welgedefinieerd in $\overline{\mathbb{R}}$ is,*
   $\underline{\lim}\,(a_k + b_k) \geq \underline{\lim}\, a_k + \underline{\lim}\, b_k$ als het rechterlid welgedefinieerd in $\overline{\mathbb{R}}$ is,
   $\underline{\lim}\,(a_k + b_k) \leq \underline{\lim}\, a_k + \overline{\lim}\, b_k$ als het rechterlid welgedefinieerd in $\overline{\mathbb{R}}$ is,
   $\overline{\lim}\,(a_k + b_k) \geq \underline{\lim}\, a_k + \overline{\lim}\, b_k$ als het rechterlid welgedefinieerd in $\overline{\mathbb{R}}$ is.
4. *als de rij (a_n) convergeert, dan $\overline{\lim}\,(a_k + b_k) = \overline{\lim}\, a_k + \overline{\lim}\, b_k$ en $\underline{\lim}\,(a_k + b_k) = \underline{\lim}\, a_k + \underline{\lim}\, b_k$.*
5. *als, voor alle n, $a_n \geq 0$ en $b_n \geq 0$, dan $\overline{\lim}\,(a_k \cdot b_k) \leq \overline{\lim}\, a_k \cdot \overline{\lim}\, b_k$ en $\underline{\lim}\,(a_k \cdot b_k) \leq \underline{\lim}\, a_k \cdot \underline{\lim}\, b_k$, waarbij wel nog in de rechterleden er niet $0 \cdot +\infty$ of $+\infty \cdot 0$ mag staan.*
6. *als, voor alle n, $a_n \geq 0$ en $b_n \geq 0$ en de rij (a_n) convergeert met limiet ongelijk 0, dan $\overline{\lim}\,(a_k \cdot b_k) = \overline{\lim}\, a_k \cdot \overline{\lim}\, b_k$ en $\underline{\lim}\,(a_k \cdot b_k) = \underline{\lim}\, a_k \cdot \underline{\lim}\, b_k$.*

Bewijs.— Dat is recht-toe-recht-aan. We bewijzen slechts de eerste bewering in deel 1.

Als een van beiden bovenlimieten $+\infty$ is, dan geldt de bewering. Als een van beiden bovenlimieten $-\infty$ is, zeg $\overline{\lim}\, a_k = -\infty$, dan is $\overline{\lim}\, a_k \neq \infty$ en vandaar (a_n) naar boven begrensd, zeg door M. Dat impliceert dat in de te bewijzen ongelijkheid het rechterlid $-\infty$ is. Omdat $\overline{\lim}\, a_k = -\infty$, is, voor gegeven $A \in \mathbb{R}$, $\sup_{k\geq n} a_k = s_n < A - M$ voor n groot genoeg. Daaruit $\sup_{k\geq n}(a_k + b_k) \leq \sup_{k\geq n} a_k + \sup_{k\geq n} b_k = s_n + M < A$. Dit impliceert dat ook het linkerlid $-\infty$ is.

Stel nu beide bovenlimieten zijn eindig. Dan zijn (a_n) en (b_n) begrensd en dus ook $(a_n + b_n)$ begrensd. Met $s_n(a+b) = \sup_{k\geq n}(a_k + b_k)$ en verdere dergelijke notaties volgt omdat $s_n(a+b) \leq s_n(a) + s_n(b)$ en de limieten $\lim_{n\to\infty} s_n(a+b), \lim_{n\to\infty} s_n(a), \lim_{n\to\infty} s_n(b)$ bestaan, $\overline{\lim}\,(a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty} s_n(a+b) \leq \lim_{n\to\infty}(s_n(a) + s_n(b)) = \lim_{n\to\infty}(s_n(a)) + \lim_{n\to\infty}(s_n(b)) = \overline{\lim}\, a_k + \overline{\lim}\, b_k$. Q.e.d.

Van belang voor het werken met limsup en liminf is:

Propositie 5 *Stel* $\overline{\lim}\, a_k \in \mathbb{R}$*. Voor alle* $\epsilon > 0$ *is het aantal* n *met* $a_n > \overline{\lim}\, a_k + \epsilon$ *eindig en is het aantal* n *met* $a_n > \overline{\lim}\, a_k - \epsilon$ *oneindig.*

Stel $\underline{\lim}\, a_k \in \mathbb{R}$*. Voor alle* $\epsilon > 0$ *is het aantal* n *met* $a_n < \underline{\lim}\, a_k - \epsilon$ *eindig en is het aantal* n *met* $a_n < \underline{\lim}\, a_k + \epsilon$ *oneindig.*

Bewijs.— We bewijzen de beweringen voor $\limsup$.

Omdat $L \in \mathbb{R}$ geldt $L \le s_n \le L + \epsilon$ voor n groot genoeg. Fixeer zo'n n. Voor $k \ge n$ volgt $a_k \le s_n \le L + \epsilon$. Dus als $a_k > L + \epsilon$, dan $k < n$.

Voor alle n geldt $L - \epsilon < s_n$, i.e. $L - \epsilon < \sup\{a_k \mid k \ge n\}$. Er bestaat dus een $k \ge n$ met $a_k > L - \epsilon$. Q.e.d.

Zij (p_n) de rij van priemgetallen: $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots,$. Voor $m \in \mathbb{N}^*$ zij

$$H_m := \underline{\lim}\, (p_{k+m} - p_k).$$

Het vermoeden dat er oneindig veel tweelingpriemgetallen bestaan is equivalent met $H_1 = 2$.[11] Omdat er "willekeurig grote gaten" in de rij de priemgetallen zijn, is $\overline{\lim}\, (p_k - p_{k-1}) = +\infty$.

Stelling 6 *Zij* (a_n) *een rij uit* $\mathbb{R}$*.* $\limsup_{n\to\infty}$ *is het grootste limietpunt van* (a_n) *en* $\liminf_{n\to\infty}$ *is het kleinste limietpunt van* (a_n)*.* $\diamond$

Bewijs.— Oefening voor de lezer. Q.e.d.

3.2 Voor rijen uit een volledig tralie

Bovenstaande is in de volgende twee richtingen te generaliseren: voor gegeneraliseerde rijen (dus niet per se indexverzameling van de vorm $0, 1, \ldots$) en voor waarden in een volledig tralie (dus niet per se $\overline{\mathbb{R}}$).[12] We bekijken hier nu deze laatste richting even heel kort.

Zij (a_n) een rij uit een volledig tralie $(\mathcal{L}, \le)$. Voor elk natuurlijk getal n (≥ 1) zij

$$s_n := \sup\{a_k \mid k \ge n\}, \;\; i_n := \inf\{a_k \mid k \ge n\}.$$

Men definieert

$$\overline{\lim}\, a_k := \inf_n s_n, \;\; \underline{\lim}\, a_k := \sup_n i_n.$$

Voorbeeld: zij X een verzameling. De verzameling van deelverzamelingen $\mathcal{P}(X)$ voorzien van de relatie $\subseteq$ is een tralie en

$$\sup\{A, B\} = A \cup B, \;\; \inf\{A, B\} = A \cap B.$$

Dus

$$\overline{\lim}\, A_k = \cap_n \cup_{k\ge n} A_k, \;\; \underline{\lim}\; \cup_n \cap_{k\ge n} A_k.$$

3.3 Voor functies

In deze deelparagraaf is (X, d) een metrische ruimte, $A \subseteq X$, $f : A \to \mathbb{R}$ een afbeelding en $a \in X$ een verdichtingspunt van A.

Men definieert

$$\limsup_{x\to a} f(x) := \inf_{\epsilon>0} \sup_{\substack{x\in A \\ 0<d(x,a)<\epsilon}} f(x) \in \overline{\mathbb{R}},$$

$$\liminf_{x\to a} f(x) := \sup_{\epsilon>0} \inf_{\substack{x\in A \\ 0<d(x,a)<\epsilon}} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

[11] Opgemerkt zij dat het het pas in 2014 (door Zhang) bewezen is H_1 eindig is. Momenteel weet men dat $H_1 \le 246$ en dat elke H_m eindig is.

[12] $\mathbb{R}$ is geen volledig tralie, $\overline{\mathbb{R}}$ is dat wel.

De minimax-ongelijkheid impliceert

$$\liminf_{x\to a} f(x) \leq \limsup_{x\to a} f(x).$$

Als het getal

$$\limsup_{x\to a} f(x) - \liminf_{x\to a} f(x)$$

welgedefinieerd is, dan heet het de oscillatie van f in a.

Propositie 6 *Voor alle* $y \in \overline{\mathbb{R}}$ *geldt:* $\limsup_{x\to a} f(x) = \liminf_{x\to a} f(x) = y \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = y.$

Bewijs.— Oefening voor de lezer. Q.e.d.

Naast

$$\limsup_{x\to a} -f(x) = -\liminf_{x\to a} f(x)$$

gelden de volgende rekenregels (vergelijk met paragraaf 3.1):

$$\limsup_{x\to a}(f_1+f_2)(x) \leq \limsup_{x\to a} f_1(x) + \limsup_{x\to a} f_2(x),$$

$$\liminf_{x\to a}(f_1+f_2)(x) \geq \liminf_{x\to a} f_1(x) + \liminf_{x\to a} f_2(x),$$

waarbij de rechterleden van de ongelijkheden wel-gedefinieerd moeten zijn in $\overline{\mathbb{R}}$. En indien $\lim_{x\to a} f_1$ bestaat (in $\mathbb{R}$), dan geldt zelfs

$$\limsup_{x\to a}(f_1+f_2)(x) = \limsup_{x\to a} f_1(x) + \limsup_{x\to a} f_2(x),$$

$$\liminf_{x\to a}(f_1+f_2)(x) = \liminf_{x\to a} f_1(x) + \liminf_{x\to a} f_2(x).$$

Ook geldt als $f_1, f_2 \geq 0$

$$\limsup_{x\to a}(f_1 f_2)(x) \leq \limsup_{x\to a} f_1(x) \cdot \limsup_{x\to a} f_2(x),$$

$$\liminf_{x\to a}(f_1 f_2)(x) \geq \liminf_{x\to a} f_1(x) \cdot \liminf_{x\to a} f_2(x),$$

waarbij in de rechterleden van de ongelijkheden er niet $0 \cdot +\infty$ of $+\infty \cdot 0$ mag staan. En indien $f_1, f_2 \geq 0$ en $\lim_{x\to a} f_1$ bestaat (in $\mathbb{R}$) en ongelijk 0 is, dan geldt zelfs

$$\limsup_{x\to a}(f_1 \cdot f_2)(x) = \limsup_{x\to a} f_1(x) \cdot \limsup_{x\to a} f_2(x),$$

$$\liminf_{x\to a}(f_1 \cdot f_2)(x) = \liminf_{x\to a} f_1(x) \cdot \liminf_{x\to a} f_2(x).$$

In het bijzonder voor de reële getallen $\mathbb{R}$ voorzien van de metriek geïnduceerd door de absolute waarde $|\ |$

$$\limsup_{x\to a} f(x) = \inf_{\epsilon>0} \sup f \restriction A \cap (]a-\epsilon, a[\, \cup\,]a, a+\epsilon[),$$

$$\liminf_{x\to a} f(x) = \sup_{\epsilon>0} \inf f \restriction A \cap (]a-\epsilon, a[\, \cup\,]a, a+\epsilon[).$$

Dat leidt voor $(\mathbb{R}, |\ |)$ ook nog tot de definities

$$\limsup_{x\downarrow a} f(x) = \inf_{\epsilon>0} \sup f \restriction A \cap\,]a, a+\epsilon[, \quad \limsup_{x\uparrow a} f(x) = \inf_{\epsilon>0} \sup f \restriction A \cap\,]a-\epsilon, a[,$$

$$\liminf_{x\uparrow a} f(x) = \sup_{\epsilon>0} \inf f \restriction A \cap\,]a, a+\epsilon[, \quad \liminf_{x\downarrow a} f(x) = \sup_{\epsilon>0} \inf f \restriction A \cap\,]a-\epsilon, a[.$$

Opmerking: hierboven bij $x \downarrow a$ ($x \uparrow a$) is het de bedoeling dat a een linker verdichtingspunt (rechter verdichtingspunt) van A is.

4 Dini-afgeleiden

Aan het einde van de vorige paragraaf definieerden we

$$\limsup_{x\downarrow a} f(x), \limsup_{x\uparrow a} f(x), \liminf_{x\downarrow a} f(x), \liminf_{x\uparrow a} f(x).$$

Deze vier objecten spelen onder andere een rol bij de zogenaamde dini-afgeleiden. Bekijken we dit nu even nader.

Voor een eigenlijk reëel interval I definiëren we $l(I) := \{\min(I)\}$ als $\min(I)$ bestaat en $l(I) := \emptyset$ anderzijds; $r(I) := \{\max(I)\}$ als $\max(I)$ bestaat en $r(I) := \emptyset$ anderzijds. Bovendien, met $\mathrm{Int}(I)$ het topologische inwendige van I, $I^{\ominus} := \mathrm{Int}(I) \cup l(I)$ and $I^{\oplus} := \mathrm{Int}(I) \cup r(I)$. Merk op dat $\mathrm{Int}(I) \subseteq I^{\ominus} \subseteq I$ en $\mathrm{Int}(I) \subseteq I^{\oplus} \subseteq I$.

Stel verder dat I een eigenlijk reëel interval is en $f : I \to \mathbb{R}$ een functie is. Definieer voor $x \in I^{\ominus}$

$$D^+ f(x) := \limsup_{t\downarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t},$$

$$D_+ f(x) := \liminf_{t\downarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

en voor $x \in I^{\oplus}$

$$D^- f(x) := \limsup_{t\uparrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t},$$

$$D_- f(x) := \liminf_{t\uparrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}.$$

$D^+ f(x)$ heet de rechter boven dini-afgeleide van f te x, $D_- f(x)$ heet de linker beneden dini-afgeleide van f te x, etcetera.

Natuurlijk geldt: als $D^+ f(x) = D_+ f(x)$, dan bestaat $\lim_{t\downarrow 0} \frac{f(x+t)-f(x)}{t}$ en is f dus rechts differentieerbaar in x. Als $D^- f(x) = D_f(x)$, dan bestaat $\lim_{t\uparrow 0} \frac{f(x+t)-f(x)}{t}$ en is f dus links differentieerbaar in x. En: f is differentieerbaar in x dan en slechts dan als al de vier dini-afgeleiden van f te x gelijk zijn en eindig zijn.

We gaan nu nog een stapje verder. Voor $v \in \mathbb{R}$ definieer

$$D^{+v} f(x) := \limsup_{t\downarrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t},$$

$$D^{-v} f(x) := \limsup_{t\uparrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t},$$

$$D_{+v} f(x) := \liminf_{t\downarrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t},$$

$$D_{-v} f(x) := \liminf_{t\uparrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}.$$

$\underline{D}_v^- f(x)$ heet de linker dini-afgeleide van f te x in de richting v, etcetera.

Dini-afgeleiden worden onder andere gebruikt om de notie van pseudo-convexe functie in te voeren.

Tenslotte vermelden we hier enkele eenvoudige formules voor dini-afgeleiden

$$D^+ - f = -D_+ f, \;\; D^- - f = -D_- f.$$

$$D_+ f(x) \leq D^+ f(x),$$

$$D^+(f_1 + f_2)(x) \leq D^+ f_1(x) + D^+ f_2(x).$$