Pulsar
3e editie
natuurkunde

6 vwo
uitwerkingen

Auteurs
Ton van den Broeck
Sjef Buil
Ed van den Heuvel
Dick Hoekzema
Hans Jordens
Alex de Koter
Henny Lamers
Joost Massolt
Jaap Vreeling
Paul Zuurbier

Eindredactie
Lieke Heimel

Noordhoff Uitgevers bv

Inhoudsopgave

16 Geofysica (keuze SE) 6
Introductie 6
16.1 Luchtdruk 6
16.2 Regen en wind 8
16.3 Zomer en winter 10
16.4 Aardbevingen 11
16.5 De temperatuur op aarde 13
Toepassing 13
Proefwerkopgaven 15

17 Gravitatie 16
Introductie 16
17.1 Gravitatiekracht en energie 16
17.2 Een rondje rond de aarde 17
17.3 Een rondje rond de zon 18
17.4 Gravitatie in het heelal (keuze SE) 19
Toepassing 20
Proefwerkopgaven 22

18 Astrofysica 23
Introductie 23
18.1 Het waarnemen van straling uit het heelal 23
18.2 Het spectraalonderzoek van licht 25
18.3 Het continu spectrum van sterren 25
18.4 De bouw en evolutie van sterren 27
18.5 Het heelal waarin we leven (keuze SE) 28
Toepassing 29
Proefwerkopgaven 30

19 Quantumfysica 32
Introductie 32
19.1 De aanloop naar de quantumfysica 32
19.2 Deeltjes en golven 33
19.3 Waarschijnlijkheid en complementariteit 34
19.4 Deeltjes in een put 35
19.5 Quantumtunnelen 37
Toepassing 38
Proefwerkopgaven 40

20 Speciale relativiteitstheorie (keuze SE) 42
Introductie 42
20.1 De lichtsnelheid 42
20.2 Lengte en tijd 43
20.3 Het Minkowskidiagram 44
20.4 De Lorentztransformaties 46
20.5 Relativistische mechanica 47
20.6 Het relativistische dopplereffect 50
Toepassing 50
Proefwerkopgaven 51

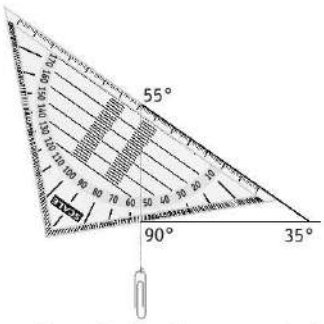
21 Examenvoorbereiding 52
Introductie 52
21.1 Problemen oplossen 52
21.2 Golven en trillingen 52
21.3 Straling en medische beeldvorming 52
21.4 Quantumfysica 52
21.5 De temperatuur op aarde 52

© Noordhoff Uitgevers bv

Hoofdstuk 16
Geofysica

Introductie

1 35°



Op de geodriehoek lees je een hoek af van 55°. Dat is de hoek bovenin. Onder links heb je een hoek van 90°. De hoek onderin rechts is de hoek waaronder je de onderkant van de wolk ziet en die hoek is dan $180° - 55° - 90° = 35°$.

2 6,8 km

$$h = AB\frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$$

Invullen:

$$h = 5{,}0\frac{\sin 45 \cdot \sin 30}{\sin(45-30)} = 5{,}0 \times \frac{0{,}71 \times 0{,}50}{0{,}259}$$

$h = 5{,}0 \times 1{,}37 = 6{,}8$ km

3 Hoek WAB is $180° - \alpha$. De drie hoeken van een driehoek zijn samen 180°. Dus hoek AWB + hoek WAB + hoek ABW = 180°.
Hoek AWB + $(180° - \alpha) + \beta = 180°$.
Hoek AWB = $180° - (180° - \alpha) - \beta = \alpha - \beta$

4 a $\sin\alpha = \frac{h}{AW}$ dus $AW = \frac{h}{\sin\alpha}$ (I)

$$\frac{AB}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{AW}{\sin\beta} \quad \text{(II)}$$

Vergelijking (I) invullen in (II) geeft:

$$\frac{AB}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\frac{h}{\sin\alpha}}{\sin\beta} = \frac{h}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

$$h \cdot \sin(\alpha-\beta) = AB \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$h = AB \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$$

b De nauwkeurigheid is niet meer dan 2 significante cijfers. Omdat je twee hoeken van elkaar af moet trekken wordt de relatieve fout nog groter. Die enkele meters hoogteverschil vallen dus weg door de onnauwkeurigheid.

5 a De meetmethode gaat ervan uit dat alles in één plat vlak gemeten wordt. Als er niet in dezelfde richting gemeten wordt, geldt dat niet meer. De formules gelden dan ook niet.

b Als ze te dicht bij elkaar wonen verschilt hoek α zo weinig van β, dat het verschil in beide hoeken erg onnauwkeurig wordt.

6 Bij 28 °C is de maximale druk van de waterdamp 3,782 kPa. De werkelijke druk van de waterdamp is 25% daarvan: $0{,}25 \times 3{,}782$ kPa = 0,946 kPa.
Het dauwpunt T_d is de temperatuur met een maximale druk van de waterdamp van 0,946 kPa en die vind je in *Binas* tabel 13A: tussen de 6,0 °C en 6,5 °C.
T_d = 6,3 °C
$h = 125(28 - 6{,}3) = 125 \times 21{,}7 = 2712{,}5$
De hoogte van de wolken is 2,7 km.
Opmerking: meestal moet je de temperatuur in formules invullen in kelvin, maar bij een temperatuurverschil maakt dat niet uit.

7 a Door de lucht die langs het natte katoen stroomt, verdampt er water. Voor die verdamping is warmte nodig en dat zorgt voor de afkoeling van de rechter thermometer.

b Bij de temperatuur van het dauwpunt is de lucht die langsstroomt en die vlak bij het katoen ook die temperatuur heeft, volledig verzadigd met waterdamp. Er verdampt dan netto geen water uit het katoen meer en de afkoeling van de thermometer stopt.

8
- Als de opbouw van de atmosfeer niet regelmatig is.
- Als er te weinig waterdamp in de atmosfeer zit.
- Wolken die van elders komen (hoge sluierwolken).

16.1 Luchtdruk

1 a Voor de kracht geldt: $F = p \cdot A$.
De oppervlakte A van de deksel is : $\pi \cdot r^2$, waarbij de straal de helft is van de diameter.
Alles invullen: $F = p \cdot A = 1{,}0 \cdot 10^5 \times \pi \cdot (2{,}9 \cdot 10^{-2})^2 = 1{,}0 \cdot 10^5 \times 2{,}64 \cdot 10^{-3} = 264$ N = 0,26 kN.

b Diezelfde kracht werkt ook tegen de onderkant van de pot met als gevolg dat de somkracht 0 N is.

© Noordhoff Uitgevers bv

c Omdat de luchtdruk de schroefdraad van de deksel stevig tegen de pot drukt. De druk aan de onderkant van de deksel (*'vacuüm'*) is namelijk stukken kleiner dan de druk van de buitenlucht. De tweede keer is er binnenin de pot geen vacuüm meer zodat de schroefdraad van de deksel niet meer zo stevig tegen de pot drukt.

2 Dit gaan we berekenen met de algemene gaswet:

$$\frac{pV}{T} = nR$$

De druk p verandert niet en het aantal mol gas n ook niet.
De formule schrijf je dan als:
$\frac{V}{T} = \frac{nR}{p}$ = constant

ofwel: $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$

invullen: $\frac{350}{(273 + 15)} = \frac{V_2}{(273 + 56)}$

$\frac{350}{288} = \frac{V_2}{329} \rightarrow V_2 = \frac{350 \times 329}{288} = 400$

Het maximale volume van de ballon is 400 m³.

3 a Er geldt: Δp (in Pa) = 9,8 × h (in mm)
invullen: Δp = 9,8 × 130 = 1274 Pa
De druk in het glas is dan:
1,02 bar = 102000 Pa
102000 Pa + 1274 Pa = 103274 Pa
De druk in het glas is 1,03 bar.

b Als de hoogte l halveert dan halveert ook het volume van de lucht in het glas. Als de druk omgekeerd evenredig is met het volume (Boyle) dan is de druk dus ook omgekeerd evenredig met de hoogte l van de luchtkolom in het glas.

c De aangepaste wet van Boyle:
$p_1 \cdot l_1 = p_2 \cdot l_2$
1: het glas voordat het het water ingeduwd werd
2: het glas onder water met het hoogteverschil van 13 cm
Invullen: 1,02 × 16 = 1,03 × l_2
l_2 = (1,02 × 16) / 1,03 = 15,8 cm

d Door de hogere temperatuur zet de lucht uit. De uitkomst bij c is dus te klein. In werkelijkheid zal er lucht uit het glas ontsnapt zijn.

4
$$\frac{dp}{dh} = \frac{d}{dh}\left(p_o e^{-\frac{g \cdot M \cdot h}{R \cdot T}}\right) = p_o\left(-\frac{g \cdot M}{R \cdot T} e^{-\frac{g \cdot M \cdot h}{R \cdot T}}\right)$$
$$p_o\left(-\frac{g \cdot M}{R \cdot T} e^{-\frac{g \cdot M \cdot h}{R \cdot T}}\right) = -\frac{g \cdot M}{R \cdot T} p_o e^{-\frac{g \cdot M \cdot h}{R \cdot T}}$$

er geldt dat:

$$p_o e^{-\frac{g \cdot M \cdot h}{R \cdot T}} = p$$

en dus is:

$$-\frac{g \cdot M}{R \cdot T} p_o e^{-\frac{g \cdot M \cdot h}{R \cdot T}} = -\frac{g \cdot M}{R \cdot T} p$$

en dat moest je laten zien want dat is het rechterlid van (IV).

5 p_o = 1,0 · 10⁵ Pa
g = 9,81 m/s²
M = 29 · 10⁻³ kg/mol
h = 6088 m
R = 8,314 J/mol·K
T = 5 + 273 = 278 K
Dit alles vul je in in de formule:

$$p_o e^{-\frac{g \cdot M \cdot h}{R \cdot T}} = 1{,}0 \cdot 10^5 \cdot e^{-\frac{9{,}81 \times 29 \cdot 10^{-3} \times 6088}{8{,}314 \times 278}} =$$

$$1{,}0 \cdot 10^5 \times 0{,}47 = 0{,}47 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

6 Op grote hoogte zit er minder zuurstof in één kubieke meter lucht omdat de druk van de lucht stukken kleiner is, maar dat zegt nog niets over het percentage zuurstof. Op zeeniveau is dat percentage 21%. Op grote hoogte daalt dat percentage omdat zuurstof (O_2) iets zwaarder is dan stikstof (N_2). De zuurstofmoleculen 'zakken' naar beneden.

Je kunt het ook zien in de formule $p_o e^{-\frac{g \cdot M \cdot h}{R \cdot T}}$. De molaire massa M van zuurstof is groter dan die van stikstof, waardoor de e-macht bij zuurstof sneller kleiner wordt.

7 Bereken de partiële druk van zuurstof en stikstof op een hoogte van 6088 m.
De molaire massa van zuurstof is 32 g/mol en die van stikstof is 28 g/mol.
zuurstof:

$$p_o e^{-\frac{g \cdot M \cdot h}{R \cdot T}} = 0{,}21\, e^{-\frac{9{,}81 \times 0{,}032 \times 6088}{8{,}314 \times 278}} = 0{,}21 \times 0{,}44$$
$$= 0{,}092 \text{ bar}$$

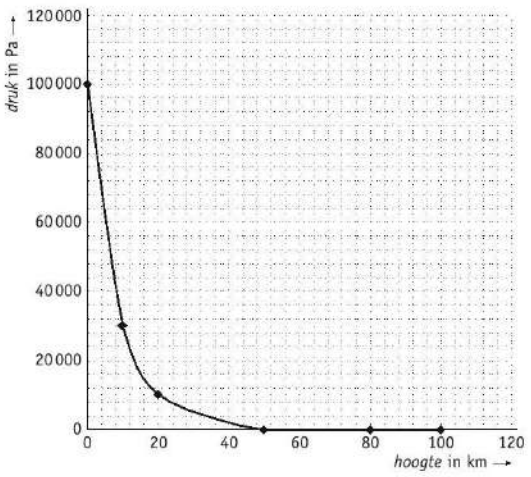
stikstof:

$$p_o e^{-\frac{g \cdot M \cdot h}{R \cdot T}} = 0{,}78 e^{-\frac{9{,}81 \times 0{,}028 \times 6088}{8{,}314 \times 278}} = 0{,}78 \times 0{,}49$$
$$= 0{,}38 \text{ bar}$$

We verwaarlozen even de overige gassen.
Het percentage zuurstof is dan:

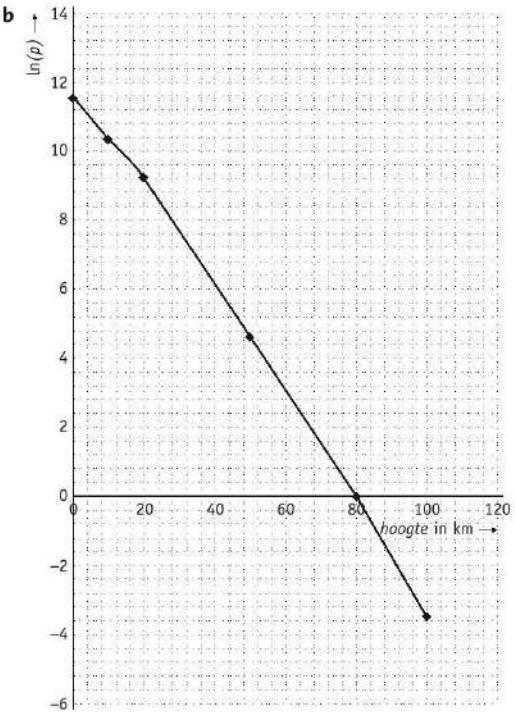
$$\frac{\text{druk zuurstof}}{\text{totale druk}} = \frac{0{,}092}{0{,}092 + 0{,}38} = 0{,}19 \text{ van } 100\%$$
$$= 19\%$$

8 a



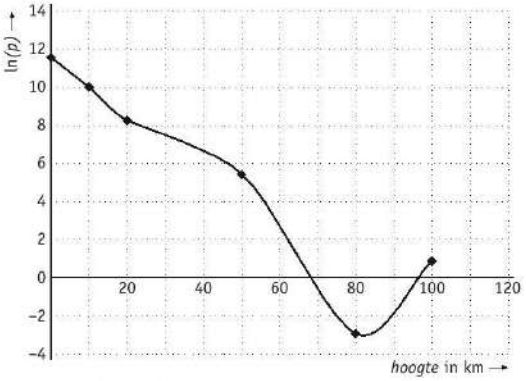
© Noordhoff Uitgevers bv

b



Deze grafiek is beter af te lezen.

c



d Tot 80 km zijn beide grafieken dalend. Na 80 km stijgt de temperatuur weer waardoor de druk ook weer oploopt.

9 a Als je 1 m omhoog gaat, neemt de druk af doordat er de druk van 1 m³ lucht minder werkt op een oppervlakte van 1 m². De massa van deze lucht is:
$m = \rho V = \rho \cdot 1 = \rho$
De zwaartekracht is gelijk aan de druk (A = 1 m²)
$= m\,g = \rho\,g$

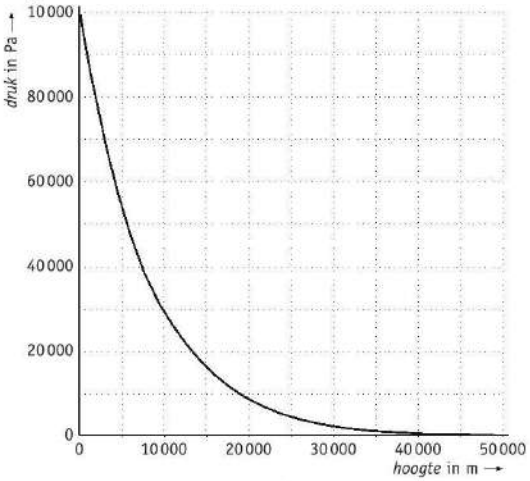
b Voor de dichtheid geldt: $\rho = \frac{m}{V}$
$m = n \cdot$ molaire_massa
Uit de algemene gaswet leid je af:

$$V = \frac{nRT}{p}$$

De formule wordt dus:
druk*molaire_massa/(temperatuur*8,31)

c 100 000 Pa (de druk op zeeniveau)

d



De resultaten komen redelijk overeen.

10 Als de druk van een gas groter is, heb je meer moleculen per volume-eenheid (als alles verder hetzelfde is) en dus een grotere dichtheid).

11 a De druk verandert geleidelijk en niet schoksgewijs.
b De stap van 1 m is klein genoeg voor de hoogtes van tientallen kilometers. Bij een computermodel werk je altijd met een stapgrootte.

12 De temperatuur daalt bij toenemende hoogte. De afname van de druk gaat dus sneller. Het model geeft dus een te hoge waarde.

13 De zwaartekracht van de maan is veel kleiner dan die van de aarde en de temperatuur aan de maankant die naar de zon is gekeerd is ook veel groter. (Een maandag duurt immers twee weken.) Daardoor is de gemiddelde snelheid van moleculen die in de buurt van het maanoppervlak bewegen groter en is de kans dat ze ontsnappen-ook door de geringere zwaartekracht-vele malen groter dan op aarde.

16.2 Regen en wind

14 B
De waterdampdruk is gelijk aan de verzadigingsdruk. Er condenseert immers constant waterdamp tot regen.

© Noordhoff Uitgevers bv

15 Bij 21 °C is de verzadigingsdruk van water 2488 Pa (*Binas* tabel 13A). De hygrometer geeft de relatieve vochtigheid aan en die is 60% en dat betekent dat de dampdruk 60% is van 2488 Pa en dat is 1493 Pa. Condensatie treedt op bij een temperatuur (het dauwpunt) waarbij de verzadigingsdruk gelijk is aan die 1493 Pa. Volgens diezelfde tabel is dat bij een temperatuur van 13 °C. Een blikje cola met een temperatuur van 4 °C zal beslaan.

16 In de zomer is de temperatuur binnen meestal ongeveer gelijk aan de temperatuur buiten. De relatieve vochtigheid is dan binnen en buiten ook gelijk. In de winter is de temperatuur binnen veel hoger dan buiten. Warme lucht kan veel meer waterdamp bevatten dan koude lucht. Dus is bij dezelfde hoeveelheid waterdamp de relatieve vochtigheid binnen een stuk lager in de winter. In de zomer is de luchtvochtigheid binnen dus groter dan in de winter.

17 Het duurt even voordat de lucht van zee opgewarmd is door het warme land, opstijgt en wolken gaat vormen. Dan is de lucht de kuststrook reeds gepasseerd.

18 Pulsje

19 a Je gebruikt:
$p(10\text{ km}) = p_0 e^{-\frac{g \cdot M \cdot h}{R \cdot T}}$
met:
$p_0 = 1{,}03 \cdot 10^5$ Pa
$g = 9{,}81$ m/s²
$M = 29 \cdot 10^{-3}$ kg/m³
$h = 10000$ m
$R = 8{,}31$ J/mol · K
$T = 273 + 33 = 306$ K
invullen:
$p(10\text{ km}) = 1{,}03 \cdot 10^5 \, e^{-\frac{9{,}81 \times 0{,}029 \times 10000}{8{,}31 \times 306}}$
$= 1{,}03 \cdot 10^5 \times 0{,}327 = 3{,}4 \cdot 10^4$ Pa

b $p_1V_1 = p_2V_2$
1: druk en volume beneden;
2: druk en volume op 10 km;
invullen:
$1{,}03 \cdot 10^5 \times 1 = 3{,}4 \cdot 10^4 \times V_2$
$V_2 = 1{,}03 \cdot 10^5 : 3{,}4 \cdot 10^4 = 3{,}0$ m³

c Het volume zal in werkelijkheid lager zijn door de lagere temperatuur: volume en temperatuur zijn recht evenredig.

d Er geldt:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

De temperatuur op 10 km is 223 K (*Binas* tabel 30F).
invullen:

$$\frac{3{,}0}{306} = \frac{V_2}{223}$$

daaruit volgt: $V_2 = 3{,}0 \times 223 : 306 = 2{,}2$ m³

e Voor de arbeid geldt:
$W = p\Delta V$
invullen:

$$W = \left(\frac{1{,}03 \cdot 10^5 + 3{,}4 \cdot 10^4}{2} \right) (2{,}2 - 1{,}0)$$

$W = (6{,}85 \cdot 10^4)(1{,}2) = 8{,}2 \cdot 10^4$ J

f De gemiddelde luchtdruk is lager omdat de kromme sneller daalt dan de rechte lijn tussen $1{,}03 \cdot 10^5$ Pa en $3{,}4 \cdot 10^4$ Pa. Het antwoord op vraag e is dus te hoog.

g $Q = m \cdot c \cdot \Delta T$
Q is de warmte die de 1 m³ lucht die beneden opstijgt, kwijtraakt = $8{,}2 \cdot 10^4$ J.
m is de massa van die 1 m³ lucht: 1,29 kg; de dichtheid van lucht aan de grond is 1,29 kg/m³.
c is de soortelijke warmte van lucht: $1{,}00 \cdot 10^3$ J/kg · K.
ΔT is de temperatuurstijging en die willen we weten.
invullen:
$8{,}2 \cdot 10^4 = 1{,}29 \times 1{,}00 \cdot 10^3 \times \Delta T$
$\Delta T = 8{,}2 \cdot 10^4 : 1290 = 64$ K

h De waterdamp in de bel condenseert als de bel opstijgt en afkoelt. Bij condensatie komt warmte vrij zodat het langer duurt voordat de temperatuur van de bel en de omringende lucht gelijk zijn. Pas als die temperaturen gelijk zijn stopt de bel met stijgen. De bel stijgt dus hoger.

20 a De waterdamp in de bel condenseert als de bel opstijgt en afkoelt. Bij condensatie komt warmte vrij zodat de temperatuur minder snel daalt.

b De temperatuur van de omgeving is hoger, waardoor de bel niet verder meer stijgt, niet verder afkoelt en de condensatie stopt. De wolken groeien niet verder en er komt geen regen.

c Nu blijft de bel ondanks de temperatuurdaling warmer dan de omgeving. De bel stijgt steeds verder, waardoor er steeds meer drukverlaging gevolgd door adiabatische afkoeling en condensatie plaatsvindt. Net zo lang tot de druppels of hagelkorrels groot genoeg zijn om naar beneden te vallen.

21 a De lucht stijgt niet op omdat er geen koele lucht van de zijkanten aangevoerd kan worden omdat het een verdieping is in het landschap met daaromheen bergen. Ook is de luchtdruk 86 m onder zeeniveau groter dan op zeeniveau waardoor de warme lucht ook moeilijker opstijgt.

b De bergruggen tussen de zee en de vallei zorgen ervoor dat de vochtige zeewind bij het opstijgen tegen de bergruggen uitregent.

22 Eigen antwoord

23 a De eenheid van kracht is newton (N) is kg · m/s² ($F = m \cdot a$), de eenheid van

$$\frac{4\pi \cdot m \cdot v \cdot \sin\varphi}{T}$$ is kg · m · s^{-1} : s = kg · m · s^{-2}

en dat is hetzelfde als de eenheid van kracht.

© Noordhoff Uitgevers bv

b Er geldt:

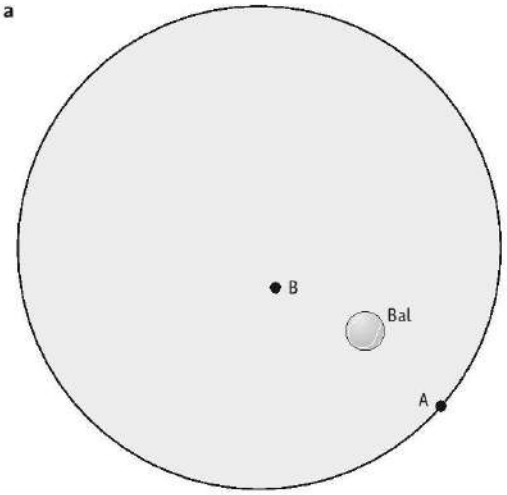
$$F = \frac{4\pi \cdot m \cdot v \cdot \sin\varphi}{T}$$

invullen:

$$F = \frac{4\pi \times 1{,}0 \times 1{,}29 \times 10 \times \sin(52°)}{24 \times 3600} = \frac{128}{86400} =$$

$$= 1{,}48 \cdot 10^{-3}\ \text{N}$$

24 a



b De bal heeft een grotere draaisnelheid dan punt B en is dus iets verder in de cirkel dan punt B.

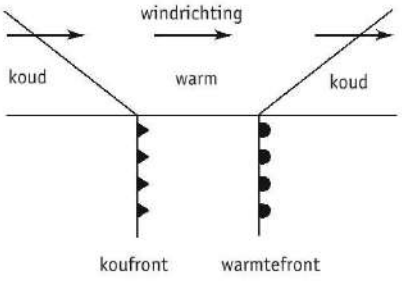
c C

25 De wind waait in onze streken nagenoeg evenwijdig aan de isobaren. Links van Nederland ligt een lagedrukgebied en rechts een hogedrukgebied. Om een hogedrukgebied waait de wind met de wijzers van de klok mee.

26 De fronten in een schema:

a Dat warmtefront beweegt naar het oosten. Dat zie je aan de plaatsing van de bolletjes. Je kunt dat ook zien aan de plaats van het lagedrukgebied in de linker bovenhoek van de kaart. De wind draait daaromheen tegen de wijzers van de klok.

b Een front gaat vaak gepaard met neerslag omdat bij een front warme lucht omhoog gedrukt wordt door verschil in dichtheid. In het ene geval (links in onderstaande tekening) schuift de koude lucht onder de warme lucht en in het andere geval (rechts in de tekening) schuift de warme lucht over de koude lucht. Opstijgende vochtige lucht koelt af, kan minder water bevatten, enzovoort.



c De wind gaat evenwijdig aan de isobaren en draait tegen de wijzers van de klok in rond het lagedrukgebied waarvan het centrum boven Ierland ligt. In Nederland komt de wind dan uit het zuidwesten.

d In het zuiden is het meestal warmer dan in het noorden.

27 Eigen antwoord

28 a formule 1: $F_{mpz} = \frac{mv^2}{r}$

formule 2: $F_c = \frac{4\pi \cdot m \cdot v \cdot \sin\varphi}{T}$

het Rossbygetal: $R_o = \frac{F_{mpz}}{F_c} = \frac{\frac{mv^2}{r}}{\frac{4\pi \cdot m \cdot v \cdot \sin\varphi}{T}}$

$$\frac{\frac{mv^2}{r}}{\frac{4\pi \cdot m \cdot v \cdot \sin\varphi}{T}} = \frac{mv^2}{r} \times \frac{T}{4\pi \cdot m \cdot v \cdot \sin\varphi}$$

$$\frac{mv^2T}{r \cdot 4\pi \cdot m \cdot v \cdot \sin\varphi} = \frac{vT}{4\pi r \cdot \sin\varphi}$$

b $R_o = \frac{vT}{4\pi r \cdot \sin\varphi}$

100 km/h = 27,8 m/s
invullen:

$$R_o = \frac{27{,}8 \times 24 \times 3600}{4\pi \cdot 100 \cdot \sin(52°)} = 2424$$

Het corioliseffect is dus niet zichtbaar. Dit getal is veel groter dan 5. De hoos kan net zo goed linksom als rechtsom draaien.

c 250 km/h = 69,4 m/s
invullen:

$$R_o = \frac{69{,}4 \times 24 \times 3600}{4\pi \cdot 300000 \cdot \sin(30°)} = 3{,}2$$

Het corioliseffect is dus zichtbaar. Dit getal is kleiner dan 5.

d Stel dat het badwater ronddraait met een snelheid van 0,5 m/s. Stel dat 100 g water ronddraait met een cirkel met een staal van 2 cm hier in Nederland: 52° NB. Het Rossbygetal wordt dan:

$$R_o = \frac{0{,}5 \times 24 \times 3600}{4\pi \cdot 0{,}02 \cdot \sin(52°)} = 2 \cdot 10^5$$

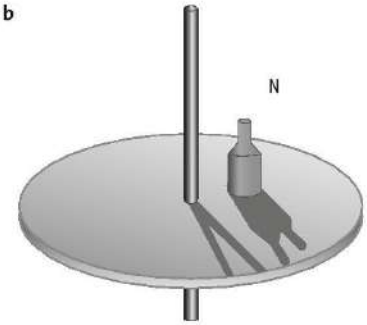
Het corioliseffect bij uitstromend badwater is dus veel te zwak om de draairichting van de kolk te beïnvloeden.

16.3 Zomer en winter

29 De zon komt op in het oosten en gaat onder in het westen. De Noordzee ligt in het westen. De foto is dus in de avond genomen.

© Noordhoff Uitgevers bv

30 a en b



b De schaduw is niet alleen een stukje gedraaid, maar ook langer geworden. Dat zie je niet aan de parasolschaduw, maar wel aan de schaduw van het flesje.

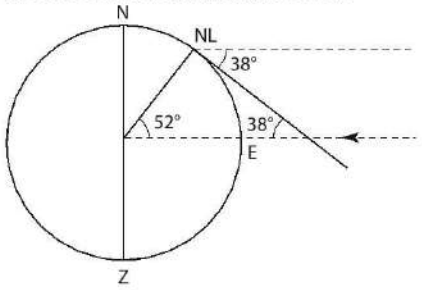
c Om 12 uur staat de zon in het zuiden. De kleine wijzer draait tweemaal zo snel rond (in 12 uur) dan de zon (24 uur) vandaar dat het zuiden op de helft zit.

31 a De hoek tussen de NZ-as en de rode zonnestralen is 66,5°. De blauwe hoek is 52°.

b Bekijk de oranje driehoek. De rechterhoek is de blauwe hoek min de rode hoek, dus 52 – 23,5 = 28,5°. De linkerhoek in deze driehoek is 180 – 28,5 – 90 = 61,5°. De hoek van de zon boven de horizon is hieraan gelijk (Z-hoek), 61,5°.

c De grootste scherpe hoek is 23,5 + 52 = 75,5°. De kleinste scherpe hoek is dus 90 – 75,5 = 14,5°. De gevraagde hoek is weer Z-hoek met de 14,5°. Het antwoord is dus ook 14,5°.

d De zon schijnt nu recht op de evenaar, dus de aardas staat loodrecht op de zonnestralen. De kleine hoek van de rechthoekige driehoek is nu 38°, dus de hoek die de zon met de horizon maakt ook.



32 Er zijn geen wolken die de straling absorberen en weer warmtestraling terugsturen.

33 a Ja, de uitgezonden straling hangt alleen af van de temperatuur van de bodem. Alleen is overdag de ingestraalde energie groter dan de uitgestraalde energie.

b C
Om 18:00 uur heeft de bodem de hoogste temperatuur en is de uitstraling ook maximaal.

34 a De ontvangen warmte op 1 m² is:
$E = P \cdot t = 600 \times 8{,}0 \times 3600 = 1{,}7 \cdot 10^7$ J

b Het volume van de bodem is 1,0 m² × 0,10 m = 0,10 m³. De massa is volume × dichtheid dus $0{,}10 \times 1{,}5 \cdot 10^3 = 1{,}5 \cdot 10^2$ kg.
$Q = c \cdot m \cdot \Delta T = 2000 \times 150 \times \Delta T = 1{,}73 \cdot 10^7$
$\Delta T = 58$ °C

c Er vindt ook afkoeling plaats door straling en stroming.

d De massa = 1 × 998 kg.
$Q = c \cdot m \cdot \Delta T \rightarrow$
$0{,}70 \times 1{,}73 \cdot 10^7 = 4180 \times 998 \times \Delta T$
$\Delta T = 2{,}9$ °C (als hier ook stroming en straling wordt verwaarloosd.)

35 **I** De dampkring en de grote hoeveelheid water in de oceanen zorgen voor gematigde temperaturen op aarde.
II Een etmaal duurt op de maan 27 dagen. Het is dus veel langer achter elkaar licht en donker, waardoor de temperatuurverschillen veel groter zijn.

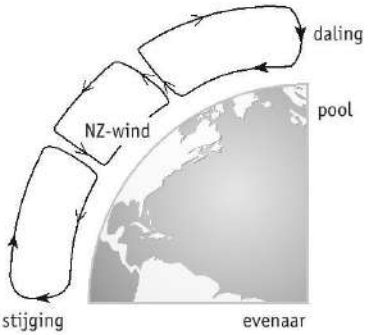
36 a $I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{3{,}85 \cdot 10^{26}}{4\pi(1{,}471 \cdot 10^{11})^2} = 1{,}42 \cdot 10^3$ W/m²

b $I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{3{,}85 \cdot 10^{26}}{4\pi(1{,}521 \cdot 10^{11})^2} = 1{,}32 \cdot 10^3$ W/m²

c Extra energie is (1416 – 1324)/1324 = 0,10/1,32 × 100% = 7%.

d In de zomer staat de zon veel langer en hoger aan de hemel, waardoor er meer warmte wordt ingestraald.

37 a



b Op 30° heb je de wind mee als je naar Amerika zeilt en op 60° heb je de wind mee als je terugzeilt.

38 a Het lage stukje in de ochtend is korter dan in de avond. Dat wijst op een richting meer naar het oosten.

b De gemiddelde hoogte van de zon in februari past beter bij de tamelijk steile helling dan die in mei. In februari staan de zonnestralen dus meer loodrecht op de panelen waardoor het maximum hoger is.

c Elk piekje is het vermogen per 10 minuten. Je hebt dus 6 piekjes nodig voor 1 kWh.
Het totaal aantal kWh is 186/6 = 31 kWh.

d Kennelijk valt er in de ochtend schaduw op een deel van de panelen waardoor de opbrengst kleiner is.

16.4 Aardbevingen

39 Geluidsgolven zijn longitudinaal, net als de primaire golven. Dat zijn dus geluidsgolven.

© Noordhoff Uitgevers bv

40 Het gewicht is traag, zodat de naald niet meebeweegt met de aarde. De trommel beweegt wel mee met de aarde.

41 Onder het wortelteken zijn de eenheden:

$$\frac{\frac{N}{m^2}}{\frac{kg}{m^3}} = \frac{N}{m^2} \times \frac{m^3}{kg} = \frac{Nm}{kg}$$

$N = kg \times m/s^2$ ($F = m\,a$)

$$\frac{Nm}{kg} = \frac{kg\,\frac{m}{s^2}\,m}{kg} = \frac{m}{s^2}\,m = \frac{m^2}{s^2}$$

Doordat de grootheden onder het wortelteken staan is de eenheid van het rechterlid m/s en dat is de eenheid van snelheid.

42 a De schuifmodulus G van water is 0.
De compressiemodulus van water is $2{,}183 \cdot 10^9$ N/m².
Invullen in de formule:

$$v = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho}} = \sqrt{\frac{2{,}183 \cdot 10^9}{998}} = 1{,}48 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

b Dat komt overeen met de waarde in *Binas* bij een temperatuur van 20 °C

43 De schuifmodulus G van gesteente is $70 \cdot 10^9$ N/m².
De compressiemodulus K van gesteente is $80 \cdot 10^9$ N/m².
afstand x = 500 000 m
dichtheid ρ = 3000 kg/m³
Invullen:

$$v_p = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho}} = \sqrt{\frac{80 \cdot 10^9 + \frac{4}{3} \times 70 \cdot 10^9}{3000}}$$

$$= 7{,}60 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

$$v_s = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{70 \cdot 10^9}{3000}} = 4{,}83 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

Vervolgens bereken je de tijd die beide golven nodig hebben om 500 km af te leggen:
tijd(primaire golf) = $\frac{500000}{7{,}60 \cdot 10^3}$ = 66 s

tijd(secundaire golf) = $\frac{500000}{4{,}83 \cdot 10^3}$ = 104 s
Het tijdsverschil is dan 104 – 66 = 38 s.

44 De buitenkern is vloeibaar. Dat weten we omdat de S-golven er niet doorheen gaan. Dat de binnenkern vast is kunnen seismologen vaststellen aan de hand van de breking van P-golven.

45 a De geluidssnelheid in ijzer is 5,1 km/s en in marmer 3,8 km/s. De geluidssnelheid in het binnenste van de aarde varieert tussen de 8 en bijna 14 km/s, dat is dus veel groter.

b Hoe dieper je komt, des te hoger is de druk en ook de snelheid.

c Daar dempen de secundaire golven en neemt de snelheid van de primaire golven af.

d In de buurt van de kern neemt de druk nauwelijks meer toe.

46 Eigen antwoord

47 a Bijvoorbeeld Recife in Brazilië en Mount Cameroon in Afrika.

b Deze liggen 4380 km uit elkaar.

c snelheid = afstand / tijd
snelheid = $4380 \cdot 10^5$ cm/ $210 \cdot 10^6$ = 2,1 cm/jaar

48 a Op t = 0 is de energie $12 \cdot 10^{-12}$ W/kg en op 1,3 miljard jaar is de energie gehalveerd.

b *Binas* tabel 25: $1{,}28 \cdot 10^9$ jaar. Dat klopt dus.

49 a $^{232}_{90}\text{Th} \rightarrow {}^{4}_{2}\text{He} + {}^{228}_{88}\text{Ra}$

b $^{40}_{19}\text{K} \rightarrow {}^{0}_{-1}\text{e} + {}^{40}_{20}\text{Ca}$

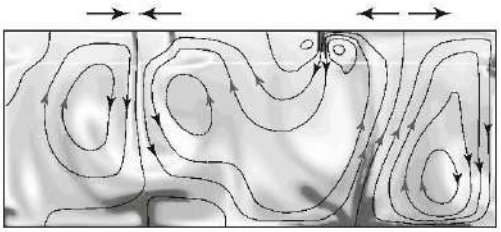
50 De straling levert nu $6{,}5 \cdot 10^{-12}$ W/kg aan vermogen.
De massa van de aarde is $5{,}976 \cdot 10^{24}$ kg (*Binas*).
Het totale vermogen is dus
$6{,}5 \cdot 10^{-12} \times 5{,}976 \cdot 10^{24} = 3{,}9 \cdot 10^{13}$ W
$E = P \cdot t = 3{,}9 \cdot 10^{13} \times 365 \times 24 \times 3600 = 1{,}2 \cdot 10^{21}$ J

51 a Aardbevingen vinden vooral plaats op de grenzen van de tektonische platen.

b Hetzelfde geldt voor andere vulkanische activiteiten.

52 In 2015 is er 2015 – 930 = 1045 jaar verstreken. Dat komt dus overeen met een verschuiving van ruim 10 meter.

53 a en b



Waar het beneden heet is, stroomt gesteente omhoog.

54 a Op de grens van de Nazca-plaat en de Zuid-Amerikaanse plaat. Zie figuur 16.47.

b De aarde onder de korst is mee omhoog bewogen, zodat ondanks de hoogte de korst toch dun is. Door de dunne aardkorst is vulkanische activiteit mogelijk.

55 a De platen botsen en de ene plaat schuift niet zo gemakkelijk onder de andere. Hierdoor wordt het grensvlak steeds meer opgestuwd.

b De grens heeft eerst op zeeniveau gelegen. Toen hebben de schelpdieren geleefd. In de loop van miljoenen jaren zijn ze de hoogte ingedreven door de schuivende platen.

© Noordhoff Uitgevers bv

56 In de eerste tekening zie je hoe de rechter plaat naar links beweegt ten opzichte van de linker plaat. Bij het rode contactoppervlak zitten de platen echter aan elkaar vast.
In de tweede tekening zie je hoe de rechter plaat onder een steeds grotere spanning komt te staan.
In de derde tekening schiet de plaat los, waarbij de platen een heel stuk over elkaar schuiven. Hierbij ontstaat een aardbeving en een tsunami (als het onder water gebeurt.)

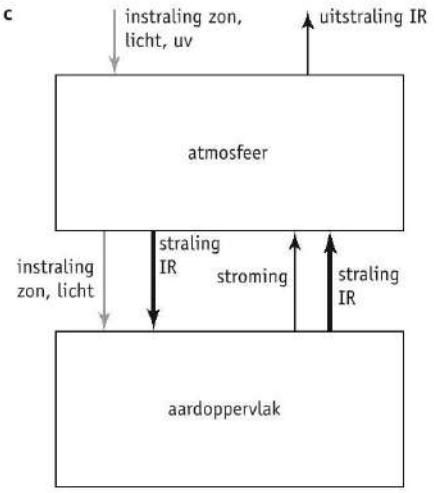
57 a 100 km afstand met een uitwijking van 1,0 mm komt overeen met magnitude 3,0. 100 km met een uitwijking van 10 mm verhoogt de magnitude met 1. Die wordt dan 4,0 op de schaal van Richter.
b De term $-\log(A_o)$ is bij 100 km 3. Bij 1000 km wordt die term: 1,110 log(1000/100) + 0,00189(1000 – 100) + 3 = 1,110 + 1,70 + 3 = 5,8.
De magnitude is dan 2,8 hoger geworden. De magnitude was 4,0 en wordt nu 6,8.
c De energie is dan 30 keer 30 keer 30 = 27 duizend keer zo groot geworden.

16.5 De temperatuur op aarde

58 a De loodrechte oppervlakte is de doorsnede van de aarde en dat is een cirkel met straal R.
$A = \pi R^2 = \pi \times (6{,}371 \cdot 10^6)^2 = 1{,}275 \cdot 10^{14}$ m²
b De zonneconstante is $1{,}368 \cdot 10^3$ W/m².
Het vermogen is dus $1{,}368 \cdot 10^3 \times 1{,}275 \cdot 10^{14} = 1{,}74 \cdot 10^{17}$ W.
c 38% wordt weerkaatst, dus 62% van $1{,}74 \cdot 10^{17} = 1{,}1 \cdot 10^{17}$ W ontvangt de aarde.
d 15 °C = 288 K
$I = \sigma T^4 = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \times 288^4 = 390$ W/m²
e De oppervlakte van een bol is $4\pi r^2$.
Dus bij de aardbol:
$4\pi \times (6{,}371 \cdot 10^6)^2 = 5{,}101 \cdot 10^{14}$ m².
Als je dit getal met 390 vermenigvuldigt krijg je:
$1{,}99 \cdot 10^{17}$ W.
f Het netto vermogen dat uitgezonden wordt is het verschil tussen antwoord e en antwoord c:
$2{,}0 \cdot 10^{17} - 1{,}1 \cdot 10^{17} = 9 \cdot 10^{16}$ W
g $I = 1{,}1 \cdot 10^{17} / 5{,}101 \cdot 10^{14} = 216$ W/m²
De temperatuur die hierbij hoort vind je met de wet van Stefan-Boltzmann:
$I = \sigma T^4 = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \times T^4 = 216$ W/m²
$T = 248$ K (= –25 °C)

59 a 390 W
b $I = \sigma T^4 = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \times 273^4 = 315$ W/m²
Voor 0,5 m² is dat dus 157 W.
$I = \sigma T^4 = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \times 303^4 = 479$ W/m²
Voor 0,5 m² is dat dus 239 W.
Het totale vermogen rechts is dus 396 W/m².
c De fout is relatief klein, nog geen 2%.
Als je de bijbehorende temperatuur uitrekent kom je op 16 °C uit.
d Nee, zie vraag c.

60 a en c



Door het versterkte broeikaseffect wordt er meer uitgezonden straling geabsorbeerd. De lucht wordt hierdoor warmer en zendt meer infrarood naar de aarde, die opwarmt en weer meer warmte uitzendt. Uiteindelijk ontstaat een nieuw evenwicht waarbij alleen de uitwisseling van infrarood tussen aarde en atmosfeer is toegenomen, behorende bij een hogere temperatuur aan het aardoppervlak.
b Er vindt nergens afname plaats.

61 Versterking van het klimaatprobleem: a, c, g.
Verzwakking van het probleem: b, d, e, f, h.

62 Het ijs op de Noordpool drijft in het zeewater. Als het ijs smelt, krimpt het tot het volume dat onder water zit. Het watervolume neemt dus niet toe. Het ijs op Groenland is landijs. Als dit smelt, komt het in zee en stijgt de zeespiegel wel.

63 a Toen Groenland ontdekt werd was de gemiddelde temperatuur op aarde hoger dan nu, waardoor er veel minder ijs was. Het land zag er groen uit.
b A is dus het juiste antwoord.

Toepassing

Opgave 1 Heliumballon

1 $p \cdot V =$ constant
$1 \cdot 10^5 \times V = 1 \cdot 10^3 \times 8{,}5 \cdot 10^5$
$V = 8{,}5 \cdot 10^3$ m³

2 Beneden is $T = 288$ K en boven 230 K.
Het volume is dus een factor 288/230 groter.
$288/230 \times 8{,}5 \cdot 10^3 = 1{,}1 \cdot 10^4$ m³

3 De massa van het helium is $1{,}1 \cdot 10^4 \times 0{,}188 = 2{,}0 \cdot 10^3$ kg.
De totale massa van de ballon met helium is dus $2001 + 1682 + 1315 = 5{,}0 \cdot 10^3$ kg.
De verplaatste lucht heeft een massa van $1{,}1 \cdot 10^4 \times 1{,}364 = 1{,}5 \cdot 10^4$ kg. Deze massa is groter en dus ook de zwaartekracht op de verplaatste lucht.
De ballon stijgt dus.

© Noordhoff Uitgevers bv

4 $F = F_{z(\text{lucht})} - F_{z(\text{ballon})} = (1{,}5 \cdot 10^4 - 3{,}0 \cdot 10^3) \times 9{,}81$
$= 1{,}2 \cdot 10^5$ N
$a = F/m = 1{,}2 \cdot 10^5 / 5{,}0 \cdot 10^3 = 24$ m/s²

5 Nee, de luchtweerstand is veel te groot.

6 De arbeid is gelijk aan $p\Delta V$.
$W = 2 \cdot 10^3 \times (8{,}5 \cdot 10^5 - 1{,}1 \cdot 10^4) = 1{,}7 \cdot 10^9$ J

7 De massa van het helium is $2{,}0 \cdot 10^3$ kg (vraag 3).
$Q = cm\Delta T$
Binas: c(helium) = $5{,}1 \cdot 10^3$ J/(kg K)
$1{,}7 \cdot 10^9 = 5{,}1 \cdot 10^3 \times 2{,}0 \cdot 10^3 \times \Delta T$
$\Delta T = 166$ °C
$T = 15 - 166 = -151$ °C

8 De omgeving is een stuk warmer. Waarschijnlijk neemt de ballon warmte op van de omgeving.

Opgave 2 Vliegtuigstrepen

9 De relatieve vochtigheid van de lucht op die hoogte is groter dan 100%. Er heeft nog geen condensatie plaatsgevonden door gebrek aan condensatiekernen. Het vliegtuig levert deze kernen, waarna er net zo veel waterdamp bevriest tot de waterdampconcentratie 4 Pa is geworden.

10 De extra wolken zorgen voor een beperkte uitstraling waardoor de temperatuur minder daalt (vooral 's nachts). De wolken weerkaatsen zonlicht, waardoor de temperatuur juist meer daalt, vooral overdag.

11 De CO_2 die de motoren produceren versterkt het broeikaseffect.

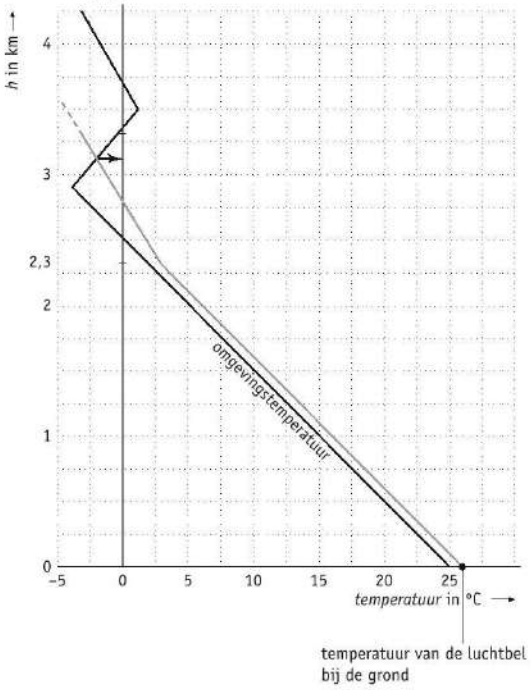
12 Vliegtuigstrepen ontstaan als de temperatuur en de luchtvochtigheid bepaalde waarden hebben.

Opgave 3 Een cumuluswolk

13 Er geldt voor de warmte die de luchtbel heeft opgenomen: $Q = m \cdot c \cdot \Delta T$
Invullen:
$Q = 7{,}3 \cdot 10^6 \times 1{,}0 \cdot 10^3 \times 1{,}0 = 7{,}3 \cdot 10^9$ J
De tijd die het duurt:
tijd = $Q/P = 7{,}3 \cdot 10^9 / (8{,}0 \cdot 10^4 \times 62) = 1472$ s = 25 min.

14 Voor de warmtestraling geldt:
vermogen per m² : $P/A = \sigma T^4$
invullen: $P/A = \sigma T^4 = 5{,}670 \cdot 10^{-8} (273 + 40)^4 =$
544 W/m²
Instraling van de zon is 580 W/m².
Weerkaatsing is 30% van 580 = 174 W/m².
Uitstraling naar de luchtbel = 62 W/m².
Warmte uit de atmosfeer is 324 W/m².
De warmte die de grond in gaat is dus:
580 + 324 − 174 − 544 − 62 = 124 W/m².

15 De temperatuur van de luchtbel daalt 1,0 °C per 100 m. Teken een lijn evenwijdig aan de getekende lijn en begin bij 26 °C, bij het pijltje. De lijn die je tekent loopt door tot de temperatuur van 3,0 °C en je bent dan op een hoogte van 2,3 km. Vandaar ga je omhoog met een stijging van 0,60 °C per 100 m is 6,0 °C per 1,0 km. Die lijn gaat iets steiler en snijdt de lijn van het temperatuurprofiel bij een hoogte van 3,13 km.



Opgave 4 Bepaling van het epicentrum van een aardbeving

16 Invullen:

$$v_p = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho}} = \sqrt{\frac{123 \cdot 10^9 + \frac{4}{3} \times 63 \cdot 10^9}{3000}}$$

$$= 8{,}3 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

$$v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{63 \cdot 10^9}{3000}} = 4{,}6 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

© Noordhoff Uitgevers bv

17 De afstanden:
Begin met de tijdsverschillen tussen de primaire golf (het begin van de trilling) en de secundaire golven (het stippellijntje):
BUG: 11,5 s
WIB: 14,0 s
NE31: 18,8 s
LES: 19,0 s
CLZ: 33 s
Stel de afstand tot epicentrum en waarnemingsstation is x.
Voor de tijd dat de primaire golven aankomen geldt:
$t_p = \frac{x}{8307}$

Voor de tijd dat de primaire golven aankomen geldt:
$t_p = \frac{x}{4583}$

Voor het tijdsverschil tussen beide golven:

$$\Delta t = \frac{x}{4583} - \frac{x}{8307} = x\left(\frac{1}{4583} - \frac{1}{8307}\right)$$
$$= x \times 9{,}782 \cdot 10^{-5}$$

en dus:
$x = \Delta t \times 10223$ m
Je kunt nu de afstanden uitrekenen:

BUG: 11,5 s	is 118 km
WIB: 14,0 s	is 143 km
NE31: 18,8 s	is 192 km
LES: 19,0 s	is 194 km
CLZ: 33 s	is 337 km

18 Ergens in de buurt van Roermond.

19 De tijden zijn gemeten vanaf het centrum van de aardbeving, terwijl de afstanden gemeten worden tot het epicentrum.
De primaire golf en de secundaire golf nemen waarschijnlijk niet dezelfde weg.

Opgave 5 Paleomagnetisme en de beweging van tektonische platen

20 6,3% per eeuw betekent dat je na 100/6,3 = 16 eeuwen een omkering krijgt.

21 Het aardmagneetveld houdt kosmische straling tegen. Het stralingsgevaar zal dus sterk toenemen zonder aardmagneetveld.

22 Tegelijkertijd komt er lava uit de aarde die naar links gaat en naar rechts. Dat betekent dus dat dan het aardmagneetveld ook dezelfde richting heeft, of je nu naar links of naar rechts kijkt.

23 Onnauwkeurigheden links en rechts middel je tegen elkaar uit.

24 Na 8,9 miljoen jaar werd het breedste stuk omgepoold (figuur 16,65). Dat komt in figuur 16.67 uit op ongeveer 170 km.

25 170 km = $1{,}70 \cdot 10^7$ cm
De snelheid is dus $1{,}70 \cdot 10^7 / 8{,}9 \cdot 10^6 = 1{,}9$ cm/jaar.

Proefwerkopgaven

1 **a** $A = \pi r^2 = \pi \times 2^2 = 12{,}6$ cm^2 = 0,00126 m^2
$p = F/A \rightarrow F = pA = 0{,}00126 \times 1{,}0 \cdot 10^5 = 1{,}3 \cdot 10^2$ N
b $a = F/m = 126/0{,}20 = 6{,}3 \cdot 10^2$ m/s^2

2 **a** Waar de isobaren dicht tegen elkaar aanliggen zijn de drukverschillen (per 100 km bijvoorbeeld) het grootst. Daar is de wind het sterkst en dat is in de buurt van Engeland.
b Rond het lagedrukgebied gaat de wind tegen de wijzers van de klok in evenwijdig aan de isobaren. In Nederland komt de wind dan uit het westen: westenwind.
c Er is een koufront langsgekomen.

3 **a** De pijl staat loodrecht op het vlak van de cirkelboog die de zon langs de hemel aflegt. Dus de pijl wijst naar het noorden.
b Op 21 maart staat de zon onder een hoek van 38°. De wijzer staat hier loodrecht op: 90 – 38 = 52°, de breedtegraad van Nederland.
c 360° komt overeen met 24 uur. 6° dus met 24 uur / 60 = 24 min. De klok staat een uur verder, dus 60 – 24 = 36 minuten voor.
d Daar komt in de zomer nog een uur bij: 1 uur en 36 minuten. De zonnewijzer geeft dus 12 uur aan als je horloge op 10:24 staat.

4 **a** De afstand van Venus tot de zon is 0,1496 / 0,1082 = 1,38 maal zo klein en het vermogen daarom $1{,}38^2$ maal zo groot: 1, 91.
$1{,}91 \times 1{,}368 = 2{,}62$ kW/m^2
b Er is veel bewolking die de zonnestralen terugkaatst.
c 70% wordt teruggekaatst, dus 30% opgenomen: 0,78 kW/m^2.
d Er wordt in alle richtingen warmte uitgezonden. De oppervlakte waar warmte uitgezonden wordt is de oppervlakte van een bol: $4\pi r^2$. De loodrechte oppervlakte van de planeet die warmte opvangt is πr^2. Dat scheelt een factor 4.
e Per m^2 wordt dus 0,78 / 4 = 0,20 kW/m^2 uitgezonden. Stefan-Boltzmann:
$I = \sigma T^4 = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \times T^4 = 196$ W/m^2
$T = 243$ K (= –30 °C)
f Het broeikaseffect is veel sterker dan op aarde.

© Noordhoff Uitgevers bv

Hoofdstuk 17
Gravitatie

Introductie

1 Geo betekent aarde, dus geocentrisch: de aarde in het centrum. Helio betekent zon, dus heliocentrisch: de zon in het centrum.

2 **a** In januari staat de aarde het dichtst bij de zon: perihelium.

b $d = \frac{1}{2}(1{,}47 + 1{,}52) \cdot 10^{11} = 1{,}495 \cdot 10^{11}$ m
$c = (1{,}495 - 1{,}47) \cdot 10^{11} = 0{,}025 \cdot 10^{11}$ m
$e = 0{,}025/1{,}495 = 0{,}02$

c Bij een cirkelbaan is $c = 0$, dus de excentriciteit ook.

d Perihelium is 46 miljoen km en aphelium is 70 miljoen km. (Wikipedia)
Dus $d = \frac{1}{2}(46 + 70) = 58$ miljoen km.
$c = 58 - 46 = 12$ miljoen km
$e = 12/58 = 0{,}21$

3 Als de aarde van het aphelium naar het perihelium beweegt, staat de vector van de aantrekkingskracht door de zon gedeeltelijk in de bewegingsrichting. De snelheid neemt daartoe toe. In omgekeerde richting neemt de snelheid juist af. Bij het aphelium is de snelheid dus kleiner.

4 Bij een cirkel is de halve lange as gelijk aan de straal.

5 **a** Je weet de constante niet, die is namelijk anders dan bij de beweging van de aarde om de zon.

b Bereken met de gegevens van Io de constante:

$$\frac{1{,}8^2}{4{,}2^3} = 0{,}0437$$

met de tijd in dagen en de straal in 10^8 m.
Vul dat in:

$$\frac{16{,}7^2}{r^3} = 0{,}0437 \rightarrow r = 19$$

Dus $r = 19 \cdot 10^8 = 1{,}9 \cdot 10^9$ m.

17.1 Gravitatiekracht en energie

1 $F_g = G\frac{mM}{r^2} = 6{,}6726 \cdot 10^{-11} \frac{1 \times 5{,}972 \cdot 10^{24}}{(6{,}371 \cdot 10^6)^2}$

$= 9{,}818$ N
Dit is ongeveer gelijk aan mg: $1 \times 9{,}81$ N.

2 **a** Massa aarde is $5{,}972 \cdot 10^{24}$ kg.
Massa maan is $0{,}0735 \cdot 10^{24}$ kg.
Afstand aarde-maan is $384{,}4 \cdot 10^6$ m.

b Dat scheelt 6 op de 384, dus ongeveer 1,5%.

c $F_g = G\frac{mM}{r^2} =$

$$6{,}6726 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{7{,}35 \cdot 10^{22} \times 5{,}972 \cdot 10^{24}}{(384{,}4 \cdot 10^6)^2}$$

$= 1{,}98 \cdot 10^{20}$ N

d Je vult dezelfde getallen in, alleen m en M in een andere volgorde, maar dat maakt voor een vermenigvuldiging niet uit. Volgens de derde wet van Newton geldt altijd dat de kracht die A op B uitoefent even groot is als de kracht die B op A uitoefent.

3 Pulsje

4 **a** $r = 30 \cdot 10^{-12}$ m
massa proton $= 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg
massa elektron $= 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg
$F_g = G\frac{mM}{r^2}$

$$= 6{,}6726 \cdot 10^{-11} \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27} \times 9{,}11 \cdot 10^{-31}}{(30 \cdot 10^{-12})^2}$$

$= 1{,}13 \cdot 10^{-46}$ N

b $F_g = f\frac{qQ}{r^2}$

$$= 8{,}99 \cdot 10^9 \frac{1{,}60 \cdot 10^{-19} \times 1{,}60 \cdot 10^{-19}}{(30 \cdot 10^{-12})^2}$$

$= 2{,}56 \cdot 10^{-7}$ N
Vergeleken met de gravitatiekracht is de elektrische kracht gigantisch veel groter.

5 **a** Je brengt op de staaf een spiegeltje en laat een laserstraal op het spiegeltje vallen. De teruggekaatste straal laat je op grote afstand op een scherm vallen met een maatverdeling. Een zeer kleine draaiing zal een grote verschuiving van de lichtvlek op de schaalverdeling geven.

b $F_g = G\frac{mM}{r^2} =$

$$6{,}74 \cdot 10^{-11} \frac{0{,}73 \times 158}{(0{,}23)^2}$$

$= 1{,}47 \cdot 10^{-7}$ N

c Met de gravitatieconstante kun je de massa van de aarde bepalen. (Zie vraag 1.)

6 $g = \frac{GM}{R^2} \rightarrow 9{,}813 = 6{,}6726 \cdot 10^{-11} \frac{5{,}972 \cdot 10^{24}}{R^2}$

Dus $R = 6{,}372 \cdot 10^6$ km.

© Noordhoff Uitgevers bv

7 **a** $g = \frac{GM}{R^2} = 6{,}6726 \cdot 10^{-11} \frac{0{,}0735 \cdot 10^{24}}{(1{,}738 \cdot 10^6)^2}$

$g = 1{,}62$ m/s² (9,81/6 = 1,64)

b Als je met dezelfde snelheid af kunt zetten is de hoogte omgekeerd evenredig met g (je kunt dit aantonen door de $E_k = E_z$ toe te passen). Op de maan zou je dus 6 maal zo hoog kunnen springen.

c Op Saturnus geldt:
$M = 568 \cdot 10^{24}$ kg, $R = 58{,}2 \cdot 10^6$ m

$$g = \frac{GM}{R^2} \rightarrow g = 6{,}6726 \cdot 10^{-11} \frac{568 \cdot 10^{24}}{(58{,}2 \cdot 10^6)^2}$$

$g = 11{,}2$ m/s²

d De straal is ook veel groter.

8 Excel maakt het rekenen gemakkelijk!

hemel-lichaam	soort	massa t.o.v. zon	straal t.o.v. zon	M(kg)	r(m)	g(m/s²)
Zon	normale ster	1	1	1.9884E+30	6.963E+08	274
Betel-geuze	rode superreus	15	700	2.9826E+31	4.874E+11	9E-03
Proxima Centauri	rode dwerg	0,123	0,21	2.4457E+29	1.462E+08	763
Sirius B	witte dwerg	0,98	0,0084	1.9486E+30	5.849E+06	3800787
Krab-pulsar	neutronen ster	2	2,80E-05	3.9768E+30	1.950E+04	698103777838
		G	6,6726E-11			

9 **a** Eerst de massa uitrekenen:
$m = V \cdot \rho = 33 \cdot 10^9 \times 3 \cdot 10^3 = 1 \cdot 10^{14}$ kg

$$g = \frac{GM}{R^2} \rightarrow g = 6{,}6726 \cdot 10^{-11} \frac{1 \cdot 10^{14}}{(2 \cdot 10^3)^2}$$

$g = 2 \cdot 10^{-3}$ m/s²

b De versnelling is zo klein dat er geen grote snelheden zullen ontstaan. Verder is het de vraag of de komeet zoveel gas om zich heen heeft dat de parachute kan werken.

10 $E_g = -\frac{GmM}{r}$

$$\frac{dE_g}{dr} = -1\left(-\frac{GmM}{r^2}\right) = \frac{GmM}{r^2} = F_g$$

11 Er geldt: $E_k + E_g = 0$.
In de ruimte zijn zowel E_k als E_g beide nul. Op het aardoppervlak geldt:

$$E_k = -E_g = \frac{GmM}{r} = \frac{6{,}6726 \cdot 10^{-11} \times 100 \times 5{,}972 \cdot 10^{24}}{6{,}371 \cdot 10^6}$$

$E_k = 6{,}25 \cdot 10^9$ J

12 **a** In de ruimte houdt de satelliet deze extra energie als kinetische energie over. De satelliet houdt dus snelheid.

b $E_k = 6{,}25 \cdot 10^9$ J
$\frac{1}{2}mv^2 = 6{,}25 \cdot 10^9$
$\frac{1}{2} \times 100 \times v^2 = 6{,}25 \cdot 10^9$
$v = 1{,}12 \cdot 10^4$ m/s

13 **a** De totale energie kan nul zijn omdat de gravitatie-energie een negatieve waarde heeft.

b Er geldt: $E_k + E_g = 0$.
De som van beide energieën is zowel in de ruimte als op aarde gelijk aan 0.
$E_k - \frac{GmM}{R} = 0$
$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GmM}{R}$
$\frac{1}{2}v^2 = \frac{GM}{R}$
$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

14 **a, b en c**

hemel-lichaam	soort	massa t.o.v. zon	straal t.o.v. zon	M(kg)	r(m)	Ontsnapping (m/s)
Zon	normale ster	1	1	1.9884E+30	6.963E+08	6.17E+05
Betelgeuze	rode superreus	15	700	2.9826E+31	4.874E+11	9.04E+04
Proxima Centauri	rode dwerg	0,123	0,21	2.4457E+29	1.462E+08	4.72E+05
Sirius B	witte dwerg	0,98	0,0084	1.9486E+30	5.849 E+06	6.67E+06
Krab-pulsar	neutronen ster	2	2,80E-05	3.9768E+30	1.950E+04	1.65E+08
Mercurius				3.30E+23	2.44E+06	4.25E+03
Venus				4.87E+24	6.05E+06	1.04E+04
Aarde				5.97E+24	6.37E+06	1.12E+04
Maan				7.35E+22	1.74E+06	2.38E+03
Mars				6.42E+23	3.39E+06	5.03E+03
Jupiter				1.90E+27	6.99E+07	6.02E+04
Saturnus				5.68E+26	5.82E+07	3.61E+04
Uranus				8.68E+25	2.54E+07	2.14E+04
Neptunus				1.02E+26	2.46 E+07	2.36E+04
Io				8.90E+22	1.82E+06	2.55E+03
	G		6.6726E-11			

15 Tijdens de lancering neemt de snelheid in de eerste tientallen km sterk toe. De raket heeft de ontsnappingssnelheid pas bereikt als er vrijwel geen lucht meer is, en er dus ook geen last van de luchtweerstand meer is. Dat is boven de 10 km al het geval.

16 Pulsje

17 De aarde draait naar het oosten, want je ziet overdag de zon van het oosten naar het westen gaan.
Als je de satelliet richting oosten lanceert, krijgt hij de draaisnelheid van de aarde alvast mee.

18 Met het Excelbestand van vraag 14 vind je een ontsnappingssnelheid van bijna 2,6 km/s. De brokstukken vallen dus terug naar Io.

17.2 Een rondje rond de aarde

19 $F_{mpz} = mv^2/r = F_g = \frac{GmM}{r^2}$

$\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2}$

$v^2 = \frac{GM}{r}$

$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

20 $r = 6{,}371 \cdot 10^6 + 355 \cdot 10^3 = 6{,}726 \cdot 10^6$ m

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}6726 \cdot 10^{-11} \times 5{,}972 \cdot 10^{24}}{6{,}726 \cdot 10^6}}$$

$= 7{,}70 \cdot 10^3$ m/s

21 $v = \frac{2\pi r}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi \times 6{,}726 \cdot 10^6}{7{,}70 \cdot 10^3} = 5{,}49 \cdot 10^3$ s

Dit is 91,5 min.

22 a De satelliet hangt relatief laag, waardoor nauwkeurige foto's te maken zijn. Na 16 rondjes komt de satelliet weer over dezelfde plek. Hij heeft dan heel de aarde gezien.

b $r = 6{,}371 \cdot 10^6 + 670 \cdot 10^3 = 7{,}041 \cdot 10^6$ m

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \times 7{,}041 \cdot 10^6}{1{,}5 \times 3600} = 8{,}19 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

23 a $\sqrt{\frac{GM}{r}} = \frac{2\pi r}{T}$

$\frac{GM}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$

$T^2 GM = 4\pi^2 r^3$

$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} =$ constant

b constant $= \frac{4\pi^2}{GM} = \frac{4\pi^2}{6{,}6726 \cdot 10^{-11} \times 5{,}972 \cdot 10^{24}}$

$= 9{,}91 \cdot 10^{-14}$ ($s^2\ m^{-3}$)

c $T = 23$ uur en 56 min $= 8{,}616 \cdot 10^4$ s

$\frac{T^2}{r^3} = 9{,}91 \cdot 10^{-14}$

$\frac{(8{,}616 \cdot 10^4)^2}{r^3} = 9{,}91 \cdot 10^{-14}$

$r = 4{,}215 \cdot 10^7$ m

(Dit is een hoogte van $4{,}215 \cdot 10^7 - 6{,}371 \cdot 10^6$ $= 3{,}578 \cdot 10^4$ km.)

24 $v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}6726 \cdot 10^{-11} \times 5{,}972 \cdot 10^{24}}{6{,}871 \cdot 10^6}} =$

$7{,}62 \cdot 10^3$ m/s $= 27 \cdot 10^3$ km/h

Op deze hoogte is de afstand die de satelliet moet afleggen om één rondje rond de aarde te maken gelijk aan $x = 2\pi r = 2\pi(6{,}371 \cdot 10^6 + 500 \cdot 10^3) = 4{,}3172 \cdot 10^7$ m $= 4{,}3172 \cdot 10^4$ km.

De tijd die daarvoor nodig is $t = \frac{x}{v} = \frac{4{,}3172 \cdot 10^4}{27 \cdot 10^3} = 1{,}6$ h.

25 a 1/82 deel van 384 400 is 4688 km.

b 81/82 deel van 384 400 is 379 712 km.

26 a De aarde draait naar het oosten, de vloedgolf beweegt dus naar het westen, met de maan mee. Het is dus eerder hoog water in Scheveningen dan in Harwich.

b Tussen volle maan en nieuwe maan in. Dus tijdens eerste kwartier en laatste kwartier. Dan werken de krachten van de maan en de zon loodrecht op elkaar.

c Dit komt door de traagheid van het water. Voordat het water omhoog komt, is de maan al een stukje verder gedraaid.

d Bij Zeeland is de Noordzee veel smaller dan bij Scheveningen. Hierdoor wordt het water opgestuwd.

17.3 Een rondje rond de zon

27 Door botsingen van grotere brokstukken met planeten kan de draairichting veranderen.

28 Mercurius, 7°

29 ab Wikipedia: de zon bevat 99,86% van de totale massa, de planeten dus 0,14%.
Omdat de zon een massa heeft van $1{,}9984 \cdot 10^{30}$ kg is de totale massa:
$100/99{,}86 \times 1{,}9984 \cdot 10^{30} = 2{,}001 \cdot 10^{30}$ kg.

30 Reken de straal van Jupiter om naar AE:
$7{,}88 \cdot 10^{11}/149\ 597\ 870\ 700 = 5{,}27$ AE

$\frac{T^2}{r^3}$(Aarde) $= \frac{T^2}{r^3}$(Jupiter)

Neem als eenheid voor tijd het aardjaar.

$\frac{1^2}{1^3}$(Aarde) $= \frac{T^2}{(5{,}27)^3}$(Jupiter)

$T = 12{,}1$ jaar

31 $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$

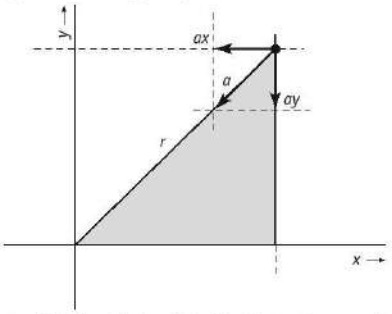
$$\frac{(1{,}54 \times 24 \times 3600)^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{6{,}6726 \cdot 10^{-11} \times 4{,}2 \cdot 10^{16}}$$

$r = 1{,}08 \cdot 10^5$ m $= 108$ km

32 a In de derde wet van Kepler komt alleen de massa voor van de aarde. Niet van de satelliet.

b De afstand tussen de aarde en de satelliet kun je berekenen door Pythagoras toe te passen op de x- en y-coördinaat.

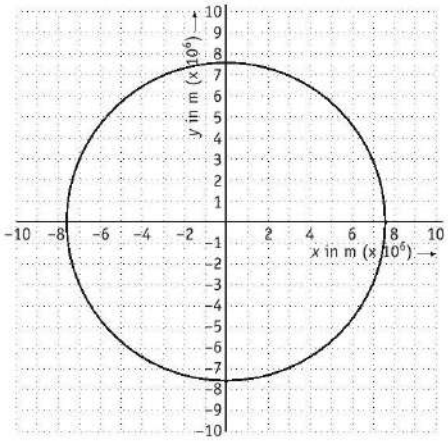
c Gelijkvormige driehoeken: $\frac{a}{ay} = \frac{r}{y}$
Omschrijven geeft: $ay = a \cdot (y/r)$.
Omdat de richting van de r-vector tegengesteld is aan de a-vector is er nog een minteken nodig:
$ay = -a \cdot (y/r)$. Voor de x-richting kun je een soortgelijke redenering toepassen.



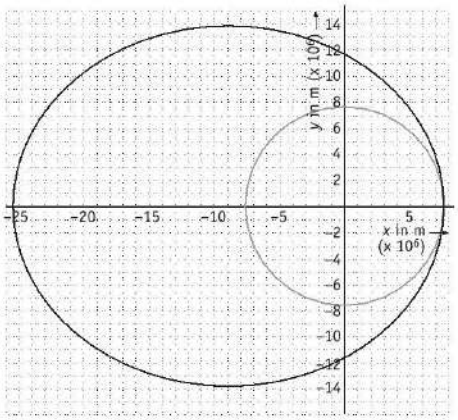
d Omdat de richting bij elk tijdstapje verandert krijg je een onnauwkeurig antwoord als je te grote tijdstapjes kiest.
Als je het model uitvoert, duurt één heel rondje ongeveer 6000 tijdstapjes. Dus de tijdstappen zijn klein genoeg.

© Noordhoff Uitgevers bv

33 a



b Dat is de beginwaarde van de x: $7{,}578 \cdot 10^6$ m.
cd Er ontstaat nu een ellips:

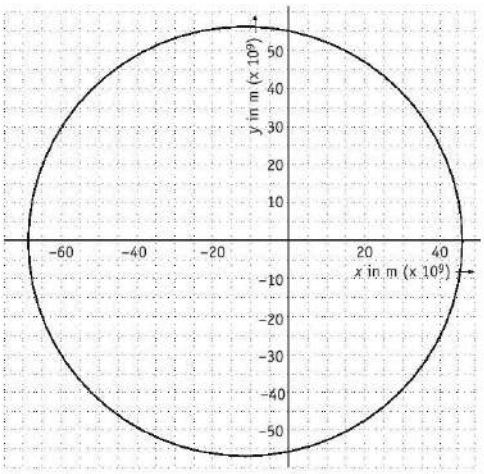


e Voeg bij de tabelinstellingen vy toe (vx is daar nul) en kies uitlezen. Je vindt dan 2,7 km/s.
f Hoe verder je weggaat, des te groter is de gravitatie-energie dus des te kleiner de bewegingsenergie en de snelheid.
g De cirkel gaat nu de andere kant op, de vorm verandert niet.

34 a Bij een grafisch model hoef je geen rekening te houden met de volgorde van de berekeningen. Je ziet bovendien goed wat met elkaar verband houdt. Als je gewend bent met grafische modellen te werken is dat handiger.
Een model met regels is simpeler als je er gewend bent mee te werken. Je ziet duidelijker welke wiskunde achter het model zit.
b Je krijgt nu een baan waarbij het startpunt in het perihelium zit van de ellips.

35 a Je moet de massa van de aarde vervangen door de massa van de zon. De x-startwaarde moet je ook aanpassen aan de afstand van de planeet tot de zon en de startsnelheid v_x moet je aanpassen aan de snelheid van de aarde om de zon. Verder de stapgrootte en de totale meettijd met een factor 1000 vergroten. De omlooptijd is nu in dagen.

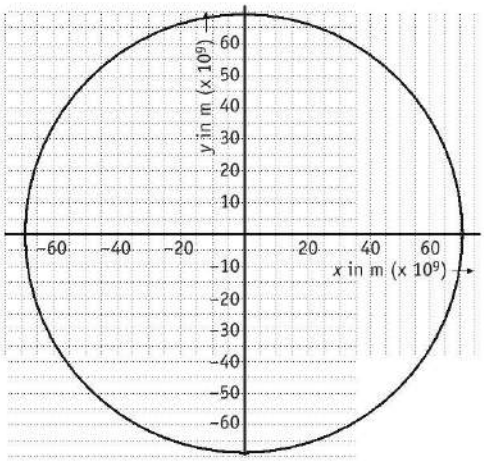
b



c Uitlezen geeft 69 miljoen km.
d Voeg t toe in de tabel en lees uit: 7522200 s = 87,1 dag.

e $v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}6726 \cdot 10^{-11} \times 1{,}9884 \cdot 10^{30}}{69 \cdot 10^9}} =$

$v = 4{,}4 \cdot 10^4$ m/s
Klopt:



17.4 Gravitatie in het heelal

36 a Het deel dat afgeschermd is, is gelijk aan de verhouding van de oppervlakten. Die verhouding is gelijk aan het kwadraat van de verhoudingen van de stralen van de zon en de aarde.

Deel afgeschermd is $\left(\frac{6{,}371 \cdot 10^6}{6{,}963 \cdot 10^8}\right)^2 = 8{,}372 \cdot 10^{-5}$.

Dus dat is 0,008372%.
b Deel afgeschermd is nu $\left(\frac{69{,}91 \cdot 10^6}{6{,}963 \cdot 10^8}\right)^2 = 1{,}008 \cdot 10^{-2}$.

Dus dat is 1,008%.
c Nee, die afstand is zo groot, dat het geen rol speelt.
d Dat maakt ook niet uit. Beide afstanden spelen wel een rol als je van dichterbij waarneemt. Dan mag je de lichtstralen namelijk niet meer als evenwijdig beschouwen.

© Noordhoff Uitgevers bv

37 a $T = 0{,}837 \text{ dag} = 7{,}23 \cdot 10^4 \text{ s}$
$M = 0{,}90 \times 1{,}9884 \cdot 10^{30} = 1{,}79 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

$$\frac{(7{,}23 \cdot 10^4)^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{6{,}6726 \cdot 10^{-11} \times 1{,}79 \cdot 10^{30}}$$

$r = 2{,}51 \cdot 10^9 \text{ m}$

b $v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \times 2{,}51 \cdot 10^9}{7{,}23 \cdot 10^4} = 2{,}18 \cdot 10^5 \text{ m/s}$

c De transit duurt 1,81 uur = 6516 s.
De diameter van de ster is dus
$x = vt = 2{,}18 \cdot 10^5 \times 6516 = 1{,}42 \cdot 10^9 \text{ m}$.

d De verzwakking is het kwadraat van de verhoudingen van de diameters:

$$\left(\frac{d_{\text{planeet}}}{1{,}42 \cdot 10^9}\right)^2 = 0{,}000152$$

$d_{\text{planeet}} = 1{,}75 \cdot 10^7 \text{ m}$

38 a $R = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2 \times 6{,}6726 \cdot 10^{-11} \times 5{,}972 \cdot 10^{24}}{(2{,}998 \cdot 10^8)^2}$

$= 8{,}87 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

b $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{5{,}972 \cdot 10^{24}}{\frac{4}{3}\pi(8{,}87 \cdot 10^{-3})^3} = 2{,}04 \cdot 10^{30} \text{ kg m}^{-3}$

c $\rho = 1{,}84 \cdot 10^{19} \text{ kg m}^{-3}$

39 a $R = \frac{2GM}{c^2}$ en $M = \rho V = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$
Invullen levert:

$$R = \frac{2G\frac{4}{3}\pi\rho R^3}{c^2} \rightarrow \frac{1}{R^2} = \frac{\frac{8}{3}\pi\rho G}{c^2}$$

$$R = \frac{c}{\sqrt{\frac{8}{3}\pi\rho G}}$$

b De dichtheid van water is 998,2 kg m^{-3}.
De horizonstraal wordt dan:

$$R = \frac{c}{\sqrt{\frac{8}{3}\pi\rho G}} = \frac{2{,}998 \cdot 10^8}{\sqrt{\frac{8}{3}\pi \times 998{,}2 \times 6{,}6726 \cdot 10^{-11}}}$$

$= 4{,}013 \cdot 10^{11} \text{ m}$
De massa is dan: $\frac{4}{3}\rho\pi R^3 = 2{,}703 \cdot 10^{38} \text{ kg}$.

c $2{,}703 \cdot 10^{38} / 1{,}9884 \cdot 10^{30} = 1{,}359 \cdot 10^8$ zonmassa's

d De dichtheid van lucht is 1,293 kg/m^3. Dat is een factor 998,2/1,293 = 772,0 maal zo klein.
Dat betekent een straal die $\sqrt{772{,}0} = 27{,}78$ maal zo groot is. De massa wordt dan $(27{,}78)^3$ / 772,0 maal zo groot, dat is 27,78 maal zo groot.
Dus $3{,}776 \cdot 10^9$ zonmassa's.

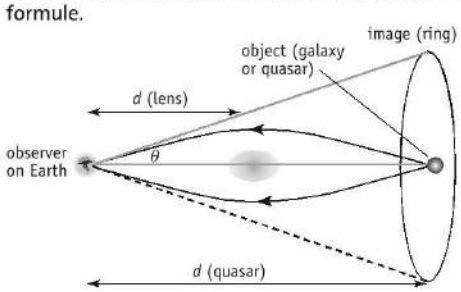
40 Niets, want de massa verandert hier in principe niet door.

41 $R = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2 \times 6{,}6726 \cdot 10^{-11} \times 4{,}5 \cdot 10^6 \times 1{,}9884 \cdot 10^{30}}{(2{,}998 \cdot 10^8)^2}$

$= 1{,}33 \cdot 10^{10} \text{ m}$

42 Volgens de wet van Wien geldt:
$\lambda_{max} T = k_W$
$\lambda_{max} = 2{,}898 \cdot 10^{-3} / 100 \cdot 10^6 = 2{,}9 \cdot 10^{-11} \text{ m}$
Volgens *Binas* tabel 19B is dat harde röntgenstraling.

43 a De lens buigt het licht dat van één object komt, zodat het vanaf de aarde als een ring zichtbaar wordt. In de tekening staan de onderdelen van de formule.



b $M_{\text{lens}} = \frac{5 \cdot 10^{20} \cdot \theta^2 \cdot d_{\text{quasar}} \cdot d_{\text{lens}}}{(d_{\text{quasar}} - d_{\text{lens}})}$

$$M_{\text{lens}} = \frac{5 \cdot 10^{20} \times (3{,}4 \cdot 10^{-4})^2 \times 10 \times 1{,}5}{(10 - 1{,}5)}$$

$= 1{,}0 \cdot 10^{14}$ zonmassa's

c Een sterrenstelsel bevat circa 10^{11} sterren.
Antwoord D is dus het juiste antwoord.

Toepassing

Opgave 1 Satelliet

1 Bij een cirkelbeweging rond de aarde geldt:

$$F_{mpz} = \frac{mv^2}{r} = F_g = \frac{GmM}{r^2}$$

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2}$$

$$v^2 = \frac{GM}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\sqrt{\frac{GM}{r}} = \frac{2\pi r}{T}$$

$$\frac{GM}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

$$T^2 GM = 4\pi^2 r^3$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

2 De toename van de gravitatie-energie is
$E_{g(\text{boven})} - E_{g(\text{beneden})}$
Dat is:

$$-17{,}399 \cdot 10^9 - \left(\frac{-GmM}{R}\right) =$$

$$\frac{GmM}{R} - 17{,}399 \cdot 10^9 =$$

$$\frac{6{,}6726 \cdot 10^{-11} \times 300 \times 5{,}972 \cdot 10^{24}}{6{,}371 \cdot 10^6} - 17{,}399 \cdot 10^9$$

$= 1{,}37 \text{ GJ}$

3 Als de satelliet daalt, dan neemt de kinetische energie toe (zie figuur 17.36), dus de snelheid van de satelliet neemt toe.
De lengte van een omloop neemt af, omdat de hoogte afneemt.
De omlooptijd wordt dus om twee redenen kleiner.

© Noordhoff Uitgevers bv

4 De totale energie is op 500 km is:
$8{,}696 - 17{,}399 = -8{,}703$ GJ.
De totale energie op 450 km is:
$8{,}760 - 17{,}520 = -8{,}760$ GJ.
Er is energie verloren gegaan aan warmte door wrijving: $-8{,}703 + 8{,}760 = 0{,}057$ GJ.
$W = F \cdot s$
$F = W/s = 5{,}7 \cdot 10^7 / 7{,}2 \cdot 10^{11} = 7{,}9 \cdot 10^{-5}$ N

5 De aarde draait naar het oosten (de zon komt in het oosten op). Het lijkt daardoor dat de satelliet een afwijking naar het westen heeft (zoals de zon ondergaat in het westen).

Opgave 2 Ringen van Saturnus

6 De straal van een dvd-schijfje is 6 cm.
De dikte van het schijfje zou dan $100/137 \cdot 10^6 \times 6 = 4{,}4 \cdot 10^{-6}$ cm $= 0{,}44$ nm zijn.
Dat is gelijk aan enkele atomen. De ringen van Saturnus zijn dus naar verhouding veel dunner.

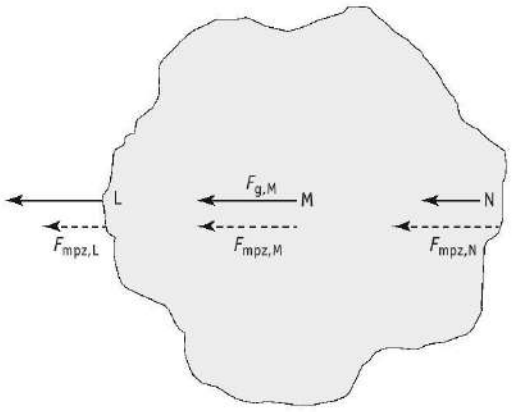
7 De aarde bevond zich in 1612 in het draaivlak van de ringen, waardoor Galilei precies tegen de dunne zijkant aankeek en deze door het geringe oplossende vermogen van zijn telescoop niet kon zien.

8 $I = I_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{d_{1/2}}}$
$17 = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{59}}$
$\log 0{,}17 = \frac{x}{59}\log\left(\frac{1}{2}\right)$
$x = 151$ m
Vermenigvuldig nog met $\sin 30° = 0{,}5$:
$d = 75$ m

9 Beide stellingen zijn juist.
1 Als de deeltjes in de ring stil zouden staan, zouden ze door de zwaartekracht naar Saturnus vallen, maar als ze voldoende snel draaien, levert de zwaartekracht de benodigde middelpuntzoekende kracht.
2 De deeltjes bewegen net als de manen in een cirkel om Saturnus heen. Dit gebeurt ook bij een stilstaande Saturnus. De draaiing van de ringen is alleen afhankelijk van de gravitatiekracht en onafhankelijk van de draaiing van de planeet.

10 Aan de buitenkant neemt de omlooptijd toe. Daardoor raken de deeltjes daar achterop, dus C is het juiste antwoord.

11 Teken de krachtpijl van de benodigde middelpuntzoekende kracht in N groter dan de krachtpijl van de benodigde middelpuntzoekende kracht in M.
Teken de krachtpijl van de gravitatiekracht in L groter dan de krachtpijl van de gravitatiekracht in M en teken de krachtpijl van de gravitatiekracht in N kleiner dan de krachtpijl van de gravitatiekracht in M.
In L is de gravitatiekracht groter dan de benodigde middelpuntzoekende kracht en in N is de gravitatie kracht kleiner dan de benodigde middelpuntzoe kende kracht.
Het rotsblok valt dus uit elkaar.



Opgave 3 Pioneer-10

12 $s = vt$ met $s = 63{,}1 \cdot 10^{16}$ m $= 4{,}22 \cdot 10^6$ AE

$v = 2{,}6$ AE per jaar $\rightarrow t = \frac{4{,}22 \cdot 10^6}{2{,}6} = 1{,}6 \cdot 10^6$ jaar

13 Tim heeft gelijk. Door de gravitatie van het zonnestelsel beweegt Pioneer-10 nagenoeg de hele tijd en de hele afstand tot Aldebaran met een snelheid lager dan 2,6 AE per jaar.

14 Voor de snelheid van Pioneer-10 geldt:
$v = 2{,}6$ AE/jaar $= 2{,}6 \times 149{,}6 \cdot 10^9$
$= 3{,}89 \cdot 10^{11}$ m/jaar.
Dat is $3{,}89 \cdot 10^{11} / 3{,}16 \cdot 10^7 = 1{,}2 \cdot 10^4$ m/s.
Ontsnappingssnelheid:

$$v = \frac{GM}{r} = \sqrt{\frac{6{,}6726 \cdot 10^{-11} \times 1{,}9884 \cdot 10^{30}}{6{,}2 \cdot 10^{12}}}$$

$= 6{,}5 \cdot 10^3$ m/s
(Dus de snelheid van Pioneer-10 is groot genoeg.)

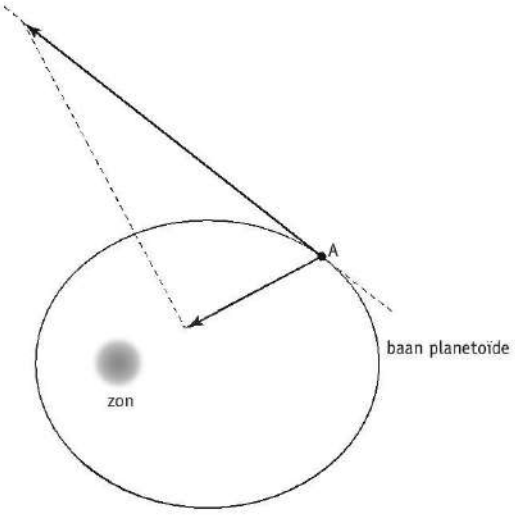
15
$$F = \frac{\Delta m}{\Delta t}v$$
$$F = \frac{\Delta \rho V}{\Delta t}v$$
$$F = \frac{\Delta \rho A x}{\Delta t}v$$
$$F = \frac{\rho A \Delta x}{\Delta t}v$$
$$F = \rho A \frac{\Delta x}{\Delta t}v = \rho A v^2$$

© Noordhoff Uitgevers bv

16 $F = ma = \rho A v^2 = \rho \pi r^2 v^2$
$241 \times 8{,}74 \cdot 10^{-10} = \rho \times \pi \times \left(\frac{2{,}74}{2}\right)^2 \times (1{,}23 \cdot 10^4)^2$
$\rho = 2{,}36 \cdot 10^{-16}$ kg m^{-3}

Opgave 4 Planetoïde

17 De snelheidsvector heeft de richting van de raaklijn aan de ellips. De lengte van de snelheidsvector is 2,25 keer zo groot als de component in de richting van de zon, dus:
$v_A = 2{,}25 \cdot v_{zon} = 2{,}25 \times 8{,}0 = 18$ kms^{-1}.



18 De totale energie is constant. Dichter bij de zon heeft een planetoïde minder gravitatie-energie dan verder weg van de zon. Dus is de kinetische energie en daarmee de snelheid dichterbij de zon groter dan verder weg van de zon.

19 De aantrekking van de aarde op een massa van 1 kg is:

$F_g = G\frac{mM}{r^2} =$

$6{,}6726 \cdot 10^{-11} \frac{1 \times 5{,}972 \cdot 10^{24}}{(5{,}44 \cdot 10^8)^2} = 1{,}35 \cdot 10^{-3}$ N

met $r_{aarde} = 5{,}38 \cdot 10^8 + 6{,}371 \cdot 10^6 = 5{,}44 \cdot 10^8$ m

Voor de aantrekkingskracht van de zon geldt op soortgelijke manier:
$r_{zon} = 1{,}496 \cdot 10^{11} + 5{,}44 \cdot 10^8 = 1{,}501 \cdot 10^{11}$ m

$6{,}6726 \cdot 10^{-11} \frac{1 \times 1{,}9884 \cdot 10^{30}}{(1{,}501 \cdot 10^{11})^2} = 5{,}89 \cdot 10^{-3}$ N

De zon trekt dus harder aan de planetoïde.

Proefwerkopgaven

1 $F_g = G\frac{mM}{r^2} =$
$6{,}6726 \cdot 10^{-11} \frac{70 \times 50}{(2{,}0)^2} = 5{,}8 \cdot 10^{-8}$ N
Deze krachten zijn onmerkbaar klein.

2 **a** In de formule zit r in de noemer. De gravitatie-energie is dus in oneindig 0 J. Maar daar is de gravitatie-energie ook maximaal. Als nul het maximum is, zijn alle andere waarden dus negatief.
b In oneindig.

3 **a** $R = R_a + h = 6{,}4 \cdot 10^6 + 6{,}37 \cdot 10^6 = 1{,}28 \cdot 10^7$ m
b $F_{mpz} = m_s v^2 / r$ met $r = R_a + h$ en $v = 2\pi (R_a + h)/T$
en m_s = massa van de satelliet
$F_{mpz} = m_s 4\pi^2 r / T^2 = 4{,}7 \cdot 10^2$ N
c $F_z = G m_s M_a / r^2 = 4{,}7 \cdot 10^2$ N

4 **a** $g = \frac{Gm}{R^2} \rightarrow g = 6{,}6726 \cdot 10^{-11} \frac{7 \cdot 10^{20}}{(500 \cdot 10^3)^2}$

$g = 0{,}2$ m/s^2
b $F_z = mg = 100 \times 0{,}2 = 2 \cdot 10^1$ N
c $v = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2 \times 6{,}6726 \cdot 10^{-11} \times 7 \cdot 10^{20}}{500 \cdot 10^3}}$
$= 4 \cdot 10^2$ m/s

5 Neem een voorwerp van 1 kg.
De minimale kinetische energie om te ontsnappen is
$E_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2}(11{,}2 \cdot 10^3)^2 = 6{,}27 \cdot 10^7$ J.
Bij 15,01 km/s geldt
$E_k = \frac{1}{2}(15{,}01 \cdot 10^3)^2 = 11{,}27 \cdot 10^7$ J
De resterende energie is dan
$11{,}27 \cdot 10^7 - 6{,}27 \cdot 10^7 = 5{,}00 \cdot 10^7$ J
Hier hoort een snelheid bij van:
$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \times 1 \times v^2 = 5{,}00 \cdot 10^7$
$v = 1{,}00 \cdot 10^4$ m/s

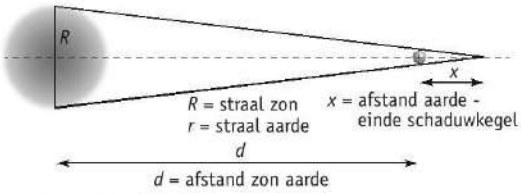
6 **a** $R = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2 \times 6{,}6726 \cdot 10^{-11} \times 65}{(2{,}998 \cdot 10^8)^2} = 9{,}7 \cdot 10^{-26}$ m
b Je bent niet langer zichtbaar. Nabije materie wordt opgezogen in het zwarte gat. Zo'n klein zwart gat zou echter snel verdwijnen.

© Noordhoff Uitgevers bv

Hoofdstuk 18
Astrofysica

Introductie

1 a



Opzoeken in *Binas*:
$R = 6{,}963 \cdot 10^8$ m
$r = 6{,}371 \cdot 10^6$ m
Bekijk de bovenste driehoek(en):
Er geldt:

$$\frac{R}{r} = \frac{d+x}{x}$$

Invullen:

$$\frac{6{,}963 \cdot 10^8}{6{,}371 \cdot 10^6} = 109{,}3 = \frac{d+x}{x}$$

$d + x = 109{,}3 \cdot x$
$d = 108{,}3 \cdot x$

$$x = \frac{d}{108{,}3} = \frac{0{,}1496 \cdot 10^{12}}{108{,}3} = 1{,}38 \cdot 10^9$$

Het einde van de schaduwkegel bevindt zich op $1{,}38 \cdot 10^9$ m. Het Lagrangepunt L2 zit op $1{,}5 \cdot 10^9$ m. Zie figuur 18.2.

b Omdat de zonnepanelen van Gaia zonlicht nodig hebben.

2 In de vergelijking kun je links en rechts de massa van Gaia (m) wegstrepen.

3

$$\frac{v^2}{d+x} = G\left(\frac{M_{zon}}{(d+x)^2} + \frac{M_{aarde}}{x^2}\right) \quad (1)$$

$$v = \frac{2\pi r_{zon}}{T} = \frac{2\pi(d+x)}{T} \quad (2)$$

$T = 365 \times 24 \times 3600$ s
$d = 0{,}1496 \cdot 10^{12}$ m
$x = 1{,}5 \cdot 10^9$ m
$G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}$ Nm²kg⁻² (*Binas* tabel 7)
$M_{zon} = 1{,}988 \cdot 10^{30}$ kg (*Binas* tabel 32C)
$M_{aarde} = 5{,}972 \cdot 10^{24}$ kg (*Binas* tabel 31)
Reken eerst de snelheid v uit met vergelijking (2):

$$v = \frac{2\pi(d+x)}{T} = \frac{2\pi(0{,}1496 \cdot 10^{12} + 1{,}5 \cdot 10^9)}{365 \times 24 \times 3600}$$

$= 3{,}0 \cdot 10^4$ m/s
Die snelheid vul je in in vergelijking (1) en aan de linkerkant van de vergelijking staat dan:

$$\frac{(3{,}0 \cdot 10^4)^2}{(0{,}1496 \cdot 10^{12} + 1{,}5 \cdot 10^9)} = 6{,}0 \cdot 10^{-3}$$

Aan de rechterkant van vergelijking (1) staat dan:

$$6{,}6726 \cdot 10^{-11}\left(\frac{1{,}988 \cdot 10^{30}}{(1{,}511 \cdot 10^{11})^2} + \frac{5{,}972 \cdot 10^{24}}{(1{,}5 \cdot 10^9)^2}\right)$$

$= 6{,}0 \cdot 10^{-3}$ m/s²
Conclusie: L2 ligt inderdaad op $1{,}5 \cdot 10^9$ m ofwel $1{,}5 \cdot 10^6$ km.

4 Gaia doet zijn waarnemingen met twee optische telescopen en een digitale camera van 1 gigapixel.

5 Loodrecht op de verbindingslijn zon-aarde: dan blijft de afstand tot de aarde en de zon nagenoeg constant en ontvangen de zonnepanelen van Gaia altijd zonlicht.

18.1 Het waarnemen van straling uit het heelal

1 a Er geldt: $E_{foton} = \frac{hc}{\lambda}$
Formule ombouwen: $\lambda = \frac{hc}{E_{foton}}$

Invullen: $\lambda = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34} \times 2{,}998 \cdot 10^8}{700 \times 1{,}602 \cdot 10^{-19}} = 1{,}77 \cdot 10^{-9}$ m

$= 1{,}77$ nm

b De golflengte is $1{,}5 / 1{,}77 \cdot 10^{-9} = 8{,}5 \cdot 10^8$ maal zo groot. De energie van het radiofoton is dan $8{,}5 \cdot 10^8$ keer zo klein.

2 a De minimale energie is $1{,}0 \cdot 10^{-13}$ J.
10 röntgenfotonen hebben een energie van 10×70 keV $= 700 \cdot 10^3$ eV $= 1{,}121 \cdot 10^{-13}$ J.
De minimale belichtingstijd is dan:
$\frac{1{,}0 \cdot 10^{-13}}{1{,}121 \cdot 10^{-13}} = 0{,}89$ seconde.

b De oppervlakte van de spiegel is
$\pi r^2 = \pi 2^2 = 12{,}57$ m²
De spiegel vangt per seconde 125,7 fotonen met een energie van $125{,}7 \times \frac{hc}{\lambda} =$

$$\frac{125{,}7 \times 6{,}626 \cdot 10^{-34} \times 2{,}998 \cdot 10^8}{500 \cdot 10^{-9}} = 4{,}994 \cdot 10^{-17} \text{ J}$$

De minimale belichtingstijd is dan:
$\frac{1{,}0 \cdot 10^{-13}}{4{,}994 \cdot 10^{-17}} = 2{,}0 \cdot 10^3$ seconde $= 33$ minuten.

3 De oppervlakte van twee pupillen is $\pi r^2 \times 2 = \pi(0{,}5 \times 10^{-2})^2 \times 2 = 7{,}85 \cdot 10^{-5} \times 2 = 1{,}57 \cdot 10^{-4}$ m².
De oppervlakte van de spiegel is $\pi r^2 = \pi(5)^2 = 78{,}5$ m².

De spiegel vangt $\frac{78{,}5}{1{,}57 \cdot 10^{-4}} = 0{,}5 \cdot 10^6$ keer zo veel licht.
Je kunt het ook berekenen met de verhoudingen van de beide stralen:

$$\frac{A_{spiegel}}{2 \cdot A_{pupil}} = \frac{\pi R_s^2}{2\pi R_p^2} = \frac{R_s^2}{2 \times R_p^2} = \frac{5{,}0^2}{2 \times (5 \cdot 10^{-3})^2} = 5 \cdot 10^5.$$

© Noordhoff Uitgevers bv

4 **a** Er geldt: $S = \frac{1{,}22 \cdot \lambda}{D} \cdot \frac{180}{\pi}$

$D = 10$ m

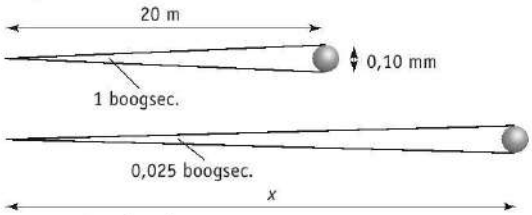
$\lambda = 1000 \cdot 10^{-9}$ m

Invullen: $S = \frac{1{,}22 \cdot 1000 \cdot 10^{-9}}{10} \cdot \frac{180}{\pi} = 6{,}99 \cdot 10^{-6}$

Het scheidend vermogen van de GTC op La Palma is $7{,}0 \cdot 10^{-6}$ graad.

b $7{,}0 \cdot 10^{-6} \times 3600 = 0{,}025$ boogsec.

c



Met verhoudingen:

$\frac{x}{20} = \frac{1}{0{,}025} \rightarrow x = \frac{20}{0{,}025} = 800$ m

De afstand is 0,80 km.

5

- Nederland ligt laag. Daardoor zit er een dikkere luchtlaag boven Nederland in vergelijking met de luchtlaag boven het Andesgebergte in Chili.
- Het klimaat in de Andes is minder instabiel.
- De telescoop ligt boven de laag waarin wolken worden gevormd.
- In de Andes is minder atmosferische turbulentie.

6 **a** $v = \Delta s/\Delta t$. In 1 jaar neemt de straal 0,1% toe, dus $\Delta s = 0{,}001 \times 0{,}16$ lichtjaar $= 0{,}00016 \times 9{,}46 \cdot 10^{15}$ m $= 1{,}51 \cdot 10^{12}$ m. Verder is $\Delta t = 365 \times 24 \times 3600 = 3{,}15 \cdot 10^{7}$ sec. Voor de expansiesnelheid volgt: $v = 4{,}8 \cdot 10^{4}$ m/s $= 5 \cdot 10^{1}$ km/s.

b Als de expansiesnelheid altijd constant geweest is geldt dat de expansie $t = \Delta s / v$, met $\Delta s = 0{,}16$ lichtjaar $= 1{,}51 \cdot 10^{15}$ m en $v = 4{,}8 \cdot 10^{4}$ m/s. Er volgt $t = 3{,}15 \cdot 10^{10}$ s $= 1 \cdot 10^{3}$ jaar.

7 Er geldt: $E_{foton} = \frac{hc}{\lambda}$.

Formule ombouwen: $\lambda = \frac{hc}{E_{foton}}$

Invullen: $\lambda = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34} \times 2{,}998 \cdot 10^{8}}{9{,}4 \cdot 10^{10} \times 1{,}602 \cdot 10^{-19}} = 1{,}3 \cdot 10^{-17}$ m

(harde gammastraling)

8 Reken eerst de golflengtes uit die horen bij de twee gegeven frequenties:

$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2{,}998 \cdot 10^{8}}{3{,}50 \cdot 10^{8}} = 0{,}86$ m

$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2{,}998 \cdot 10^{8}}{8{,}3 \cdot 10^{9}} = 0{,}036$ m

Ja. 21 cm (0,21 m) zit tussen de beide golflengtes in.

9 **a** Gebruik de formule: $S = \frac{1{,}22 \cdot \lambda}{D} \cdot \frac{180}{\pi}$.

$D = 2{,}7 \cdot 10^{3}$ m $= 2700$ m

$\lambda = 0{,}10$ m

Invullen:

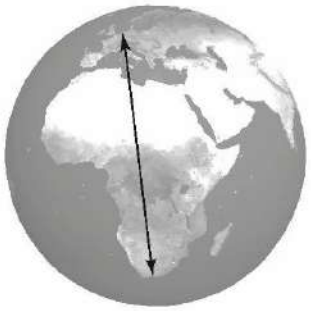
$S = \frac{1{,}22 \cdot 0{,}10}{2700} \cdot \frac{180}{\pi} = 2{,}6 \cdot 10^{-3}$ graad

Het scheidend vermogen van de WSRT is $2{,}6 \cdot 10^{-3}$ graad $= 9{,}3$ boogsec. ($1° = 3600$ boogsec.)

b De hele rij zorgt voor een heldere waarneming: meer energie die per seconde wordt opgevangen.

c De afmeting D van de WSRT is wel groter, maar de golflengte λ die de radiotelescoop waarneemt is vele malen groter en het scheidend vermogen S is evenredig met λ/D. Zie formule.

10 **a** Bijvoorbeeld: Ga naar Google Earth en meet de diameter van de aarde en de afstand tussen Nederland en Zuid-Afrika.



Meet de diameter van de aarde (d) in het plaatje en meet de afstand (a) tussen Nederland en Zuid-Afrika. Zoek de werkelijke diameter op van de aarde over de polen: 12714 km.

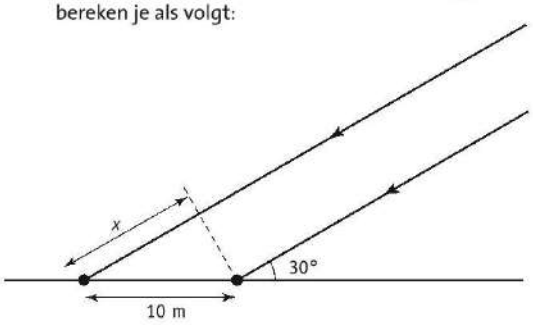
afstand Nederland-Zuid-Afrika is dan:

$\frac{a}{d} \times 12714 = 10170$ km

De afstand is $1{,}0 \cdot 10^{4}$ km $= 1{,}0 \cdot 10^{7}$ m.

b $S = \frac{1{,}22 \cdot 0{,}10}{1{,}0 \cdot 10^{7}} \cdot \frac{180}{\pi} = 7{,}0 \cdot 10^{-7}$ graad $= 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ boogsec.

11 De extra afstand die de stralen moeten afleggen bereken je als volgt:



$\cos\alpha = \frac{\text{aanliggende}}{\text{schuine}} = \frac{x}{10} \rightarrow x = 10\cos(30°) = 8{,}7$ m

Het tijdsverschil is de afstand gedeeld door de lichtsnelheid want het signaal gaat met de lichtsnelheid:

tijdverschil $= \frac{8{,}7 \text{ m}}{2{,}998 \cdot 10^{8} \text{ m/s}} = 2{,}9 \cdot 10^{-8}$ s

© Noordhoff Uitgevers bv

12 a 1 terabyte = 1 TB = 1024^4 byte = $1{,}1 \cdot 10^{12}$ byte
b Per dag wordt er 8 × 24 = 192 terabyte opgeslagen. 500 GB = 0,5 TB. Er zijn dus 192/0,5 = 284 van deze schijven per dag nodig.

13

A – CHANDRA	röntgengolflengten
B – Hubble	zichtbaar licht + ultraviolet
C – VLT	zichtbaar licht + infrarood
D – ALMA	millimeter en submillimeter
E – WSRT	350 MHz – 8,3 Ghz
F – LOFAR	10 – 240 Mhz

De informatie is te vinden op www.astronomie.nl.

18.2 Het spectraalonderzoek van licht

14 Emissielijnen. Het licht van de zon gaat niet *door* de corona naar de aarde, maar de corona zendt zelf licht uit.

15 a De F en G lijn zijn afkomstig van waterstof (H).
b De D1 en D2 lijn zijn afkomstig van natrium (Na).

16 Dit wordt veroorzaakt door absorptie van zonlicht in de atmosfeer van de aarde door zuurstofmoleculen.

17 a Dat kan omdat de maan het licht van de zon reflecteert. De spectrale classificatie van de maan is gelijk aan die van de zon.
b Het spectrale type van de maan is dus G2; gelijk aan dat van de zon.

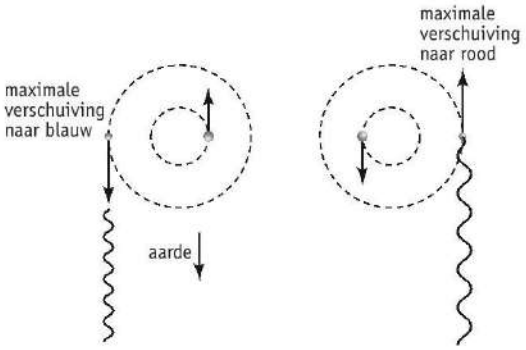
18 a

Achernar	B3 V	16000 K
Wega	A0 V	10000 K
Procyon A	F5 IV-V	6700 K
Rigil Kent A	G2 V	5700 K
Zon	G2	5800 K
Arcturus	K2 III	4400 K
Barnard	M4 V	3000 K

b Zie a. Als ook opgave 19 gemaakt is, weet je nu dat de volgorde van heet naar koud is: O (ongeveer 50000 K) B A F G K M (ongeveer 2000 K). Je kunt dit onthouden met het zinnetje 'Oh Be A Fine Girl/Guy, Kiss Me'.

19 a Om helium te ioniseren is een hoge temperatuur nodig. Spectraallijnen van geïoniseerd helium in een sterspectrum (zoals bij O-sterren) laten zien dat de ster heter is dan een ster met enkel neutraal helium (zoals bij B-sterren).
b Hoe sterker de He^+-lijnen en hoe zwakker de He^0-lijnen, hoe heter de ster.

20 a Ze zijn een halve keer om hun gezamenlijke middelpunt gedraaid: de omlooptijd is dus 30 dagen.



21 Het tweede object geeft veel minder licht dan de ster waarvan we de lijnen wel zien, bijvoorbeeld omdat hij veel kleiner en/of koeler is (en dus lichtzwakker). Het tweede object kan ook een witte dwerg, neutronenster, zwart gat, of planeet zijn.

22 Er kunnen verschillende zaken aan de hand zijn: je kijkt loodrecht op het baanvlak waarin beide sterren bewegen *of* de omloopstijd is heel veel groter dan een jaar.

23 a $\lambda = \lambda_o\left(1 + \frac{v}{c}\right)$

$\lambda = \lambda_o + \frac{\lambda_o v}{c}$

$\lambda - \lambda_o = \frac{\lambda_o v}{c}$

$\Delta\lambda = \frac{\lambda_o v}{c} \rightarrow v = \frac{\Delta\lambda \cdot c}{\lambda_o}$ (1)

b λ_o = 656,28 nm en λ = 656,32 nm. De golflengte wordt groter en dus treedt roodverschuiving op.
c $\Delta\lambda = 656{,}32 - 656{,}28 = 0{,}04$ nm $= 0{,}04 \cdot 10^{-9}$ m
Invullen in (1):

$$v = \frac{0{,}04 \cdot 10^{-9} \times 2{,}998 \cdot 10^8}{656{,}28 \cdot 10^{-9}} = 18273 \text{ m/s}$$

De snelheid is 18 km/h en de richting is weg van de waarnemer.

18.3 Het continu spectrum van sterren

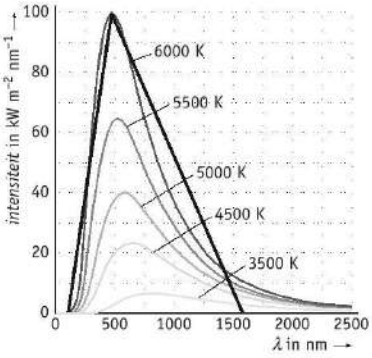
24 a Er geldt: $\lambda_{max}T = k_w \rightarrow \lambda_{max} = \frac{k_w}{T} = \frac{2{,}8978 \cdot 10^{-3}}{45000} = 6{,}44 \cdot 10^{-8}$. De golflengte is 64,4 nm.
b Zichtbaar licht loopt van 380 nm tot 760 nm. Er is hier geen sprake van zichtbaar licht. *Binas* tabel 19B: 64,4 nm is (ver) ultravioletstraling. Sommigen zouden zelfs zeggen röntgenstraling.

c $\lambda_{max} = \frac{k_w}{T} = \frac{2{,}8978 \cdot 10^{-3}}{2500} = 1{,}159 \cdot 10^{-6}$ m = 1159 nm en dat is infraroodstraling.

25 a Verticaal staat stralingsvermogen per m^2 en per nm. Horizontaal staan nm. De oppervlakte heeft dan als eenheid: stralingsvermogen per m^2 en per nm maal nm. $kW \cdot m^{-2} \cdot nm^{-1}$ maal nm = $kW \cdot m^{-2}$ (kW/m^2).

© Noordhoff Uitgevers bv

b Schat de oppervlakte af met bijvoorbeeld een driehoek en bepaal dan van die driehoek de oppervlakte:



Oppervlakte driehoek is ½ maal basis maal hoogte.
0,5 × (1600 – 100) × 100 kW/m² = 7,5 · 10⁷ W/m².
De berekening: $I = \sigma T^4 = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \times 6000^4 = 7{,}3 \cdot 10^7$ W/m².
Conclusie: klopt vrij goed.

c Het stralingsvermogen I per m² is evenredig met T^4.
De temperatuur T wordt 10 maal zo groot.
Conclusie: I wordt 10^4 maal zo groot.

26 a Er geldt: $L = P_{bron} = 4\pi r^2 \sigma T^4$.

$$T^4 = \frac{P_{bron}}{4\pi r^2 \sigma} = \frac{3{,}84 \cdot 10^{26}}{4\pi(6{,}96 \cdot 10^8)^2 \times 5{,}67 \cdot 10^{-8}} = 1{,}113 \cdot 10^{15}$$

$$T = \sqrt[4]{1{,}113 \cdot 10^{15}} = 5{,}78 \cdot 10^3 \text{ K}$$

b Vermogen van de stralingsbron is evenredig met T^4 en evenredig met r^2. Bij ster A is de straal r 10 maal zo groot en de lichtsterkte (het uitgestraalde vermogen) dus 100 maal zo groot.
Bij ster B is de straal 300 maal zo groot en de lichtsterkte dus $300^2 = 90000 = 9 \cdot 10^4$ maal zo groot.

c Temperatuur van de zon = temperatuur ster A = temperatuur ster B = 5780 K. Alle drie G2-sterren.
Zon is G2 V-ster (dwerg).
Ster A is G2 III-ster (reus).
Ster B is G2 I-ster (superreus).
Antwoord C is correct.

27 a De koudste ster moet het grootst zijn om toch te komen aan dezelfde lichtsterkte: ster C is de grootste.

b Ster C:

$$\frac{P_C}{P_{bron}} = \frac{4\pi r_C^2 \sigma T_C^4}{4\pi r_{zon}^2 \sigma T_{zon}^4} = \frac{r_C^2 T_C^4}{r_{zon}^2 T_{zon}^4}$$

$$10^4 = \frac{r_C^2 \times 2500^4}{r_{zon}^2 \times 5780^4} = \frac{r_C^2}{r_{zon}^2} \times 0{,}035$$

$$\left(\frac{r_C}{r_{zon}^2}\right)^2 = \frac{10^4}{0{,}035} = 2{,}86 \cdot 10^5$$

$$\frac{r_C}{r_{zon}} = 2{,}86 \cdot 10^5 = 535 = 5{,}4 \cdot 10^2$$

Ster D:

$$\frac{P_D}{P_{bron}} = \frac{r_D^2 T_D^4}{r_{zon}^2 T_{zon}^4}$$

$$10^4 = \frac{r_D^2 \times 32000^4}{r_{zon}^2 \times 5780^4} = \frac{r_D^2}{r_{zon}^2} \times 940$$

$$\left(\frac{r_D}{r_{zon}}\right)^2 = \frac{10^4}{940} = 10{,}6$$

$$\frac{r_D}{r_{zon}} = \sqrt{10{,}6} = 3{,}3$$

28 Oppervlakte $A = \pi r^2 = \pi 4{,}1^2 = 52{,}8$ m².
Hoeveelheid energie per seconde = $1{,}368 \cdot 10^3 \times 52{,}8 = 7{,}2 \cdot 10^4$ J/s.

29 a $A = 1{,}5$ dm²
De zonneconstante is $1{,}368 \cdot 10^3$ W.
De hoeveelheid energie die elke seconde op je hand valt is dan: $1{,}5 \cdot 10^{-2} \times 1{,}368 \cdot 10^3 = 20{,}5$ W = 21 W.

b Het vermogen P van de lamp is 100 W. Het vermogen van de straling is dan: 0,95 × 100 = 95 W.
Om een stralingsenergie per seconde van 20,5 W op je hand te krijgen moet je je hand op een afstand r van de lamp houden:

$$I = 20,5 = \frac{L}{4\pi r^2}$$

$$4\pi r^2 = \frac{95}{20{,}5} = 4{,}63 \rightarrow r^2 = 0{,}37 \rightarrow r = \sqrt{0{,}37} = 0{,}61 \text{ m}$$

30 Lichtsterkte van de zon is $3{,}85 \cdot 10^{26}$ W.
Afstand zon - Mars is $0{,}228 \cdot 10^{12}$ m.
Afstand zon - Jupiter is $0{,}7883 \cdot 10^{12}$ m.

Zonneconstante Mars = $\frac{3{,}85 \cdot 10^{26}}{4\pi \times (0{,}228 \cdot 10^{12})^2} = 5{,}89 \cdot 10^2$ W.
Zonneconstante Jupiter = $\frac{3{,}85 \cdot 10^{26}}{4\pi \times (0{,}7883 \cdot 10^{12})^2} = 4{,}93 \cdot 10^1$ W.

31 a Totale energie per jaar: $3 \cdot 10^6$ J × $6 \cdot 10^8$ × 50 × 365 = $3{,}29 \cdot 10^{19}$ J/jaar = $3 \cdot 10^{19}$ J/jaar.

b Aantal jaren: $\frac{3{,}85 \cdot 10^{26}}{3{,}29 \cdot 10^{19}} = 1{,}17 \cdot 10^7$ jaar
= 11,7 miljoen jaar

32 De zonneconstante is $1{,}368 \cdot 10^3$ W. Bij een rendement van 25% zijn er dus

$$\frac{2 \cdot 10^{13}}{0{,}25 \cdot 1{,}368 \cdot 10^3} = 5{,}85 \cdot 10^{10} \text{ m}^2 = 5{,}85 \cdot 10^4 \text{ km}^2$$

Dit is ongeveer 242 × 242 km². Het aardoppervlak is $4\pi (6{,}371 \cdot 10^3) = 5{,}101 \cdot 10^8$ km². De panelen bedekken $100\% \cdot 5{,}85 \cdot 10^4 / 5{,}101 \cdot 10^8 = 0{,}01\%$ van het aardoppervlak (waarbij we de kromming van het aardoppervlak verwaarlozen omdat, blijkt achteraf, dit percentage zo klein is).

© Noordhoff Uitgevers bv

33 Stralingsflux $I = \frac{L}{4\pi r^2}$

$$\frac{I_{Polaris}}{I_{Castor}} = \frac{\frac{L_P}{4\pi r_P^2}}{\frac{L_C}{4\pi r_C^2}} = \frac{\frac{L_P}{r_P^2}}{\frac{L_C}{r_C^2}} = \frac{L_P \cdot r_C^2}{L_C \cdot r_P^2}$$

$$= \frac{48 \times 1^2}{1 \times (8{,}5)^2} = 0{,}66$$

De stralingsflux van Polaris is 66% van die van Castor.

34 a Antares A spectraaltype M1 I
temperatuur 3000 K
lichtsterkte 90000 maal zon
- De oppervlakte-temperatuur is laag ten opzichte van de zon dus een rode superreus.
- Ook het spectraaltype is die van een rode superreus: M is de koelste type ster en I staat voor superreus.

b $\frac{I_{zon}}{I_{Antares}} = \frac{P_{zon}}{P_{Antares}} = \frac{1}{90000} = \frac{4\pi r_{zon}^2 \sigma T_{zon}^4}{4\pi r_{Antares}^2 \sigma T_{Antares}^4}$

$$\frac{1}{90000} = \frac{r_{zon}^2 T_{zon}^4}{r_{Antares}^2 T_{Antares}^4} = \frac{1^2}{1100^2} \cdot \left(\frac{T_{zon}}{T_{Antares}}\right)^4$$

$$\left(\frac{T_{zon}}{T_{Antares}}\right)^4 = \frac{\frac{1}{90000}}{\frac{1}{1100^2}} = \frac{1100^2}{90000} = 13{,}44$$

$$\left(\frac{T_{zon}}{T_{Antares}}\right)^4 = 13{,}44$$

$$\frac{T_{zon}}{T_{Antares}} = \sqrt[4]{13{,}44} = 1{,}9$$

De temperatuur van Antares is 1,9 maal zo klein als de temperatuur van de zon. Dat komt overeen met de constatering dat Antares een rode reus is.

18.4 De bouw en evolutie van sterren

35 a T = 3980 dus log T = 3,6
Aflezen uit het diagram: $\log \frac{L}{L_{zon}} \approx -1$ (hoofdreeks)
$10^{-1} = \frac{L}{L_{zon}} \rightarrow L = 0{,}1 \times L_{zon}$

T = 3980 dus log T = 3,6
Aflezen uit het diagram: $\log \frac{L}{L_{zon}} \approx 4$
$10^4 = \frac{L}{L_{zon}} \rightarrow L = 10^4\, L_{zon}$

b De Ko I-ster zendt bij dezelfde temperatuur van haar oppervlak ongeveer 10000 keer zo veel energie uit per seconde. Dat kan alleen als de Ko I-ster veel groter is dan de Ko V-ster.

c De ene (superreus) staat veel verder weg dan de andere (dwergster).

36 a Als je de totale reactievergelijking van waterstoffusie opschrijft volgt:
$4\,{}_1^1H \rightarrow {}_2^4He + 2\,{}_1^0e^+ + 2\nu$ + energie(fotonen)
De temperaturen in sterkernen zijn zo hoog dat waterstof en helium volledig geïoniseerd zijn. De elektronen bewegen vrij rond. Van de vier vrije elektronen van H zullen er twee met de twee positronen die vrijkomen bij de kernreacties annihileren. Daarbij wordt ook massa omgezet in energie. Houden we hiermee rekening dan is de beginmassa 4 × H-atoom en de eindmassa 1 × He-atoom. Het massaverlies in de totale reactie is:
massa H = 1,007825 tabel 25
massa He = 4,002603 tabel 25
massaverlies = 4 × 1,007825 u − 4,002603 u = 0,028697 u
Van elke 4,0313 u verdwijnt 0,028697 u.

Dat is $\frac{0{,}028697}{4{,}0313} \times 100\% = 0{,}71185\ \%$.

Van elke kg waterstof gaat 7,1185 g 'verloren'.

b $E = m \cdot c^2 = 0{,}0071185 \times (2{,}9979 \cdot 10^8)^2 = 6{,}3978 \cdot 10^{14}$ J

c stralingsvermogen = lichtsterkte = $3{,}85 \cdot 10^{26}$ W (bron 10)
1 kg geeft $6{,}40 \cdot 10^{14}$ J.

aantal kg per s: $\frac{3{,}85 \cdot 10^{26}}{6{,}40 \cdot 10^{14}} = 6{,}02 \cdot 10^{11}$ kg

= 602 miljoen ton per seconde

d 'Verlies' is 0,712 % van 602 miljoen ton = 429 miljoen ton per seconde.

37 Gemiddelde dichtheid van de zon is 1400 kg/m³. Het gas staat onder zeer hoge druk waardoor de deeltjes dichter op elkaar worden geperst.

38 De massa van de zon is $1{,}988 \cdot 10^{30}$ kg. 10% van deze massa is waterstofgas dat in de loop der tijd fuseert tot helium. Elke seconde verliest de zon $6{,}02 \cdot 10^{11}$ kg waterstof.
resterende tijd (in s):

$$\frac{0{,}1 \times 1{,}988 \cdot 10^{30}}{6{,}02 \cdot 10^{11}} = 3{,}3 \cdot 10^{17}\ s = 1{,}05 \cdot 10^{10}\ jaar = 1{,}1 \cdot 10^{10}\ jaar$$

(10,5 miljard jaar).

39 a Hoe meer massa hoe langer de ster energie kan omzetten: levensduur evenredig met massa M.
Hoe meer lichtsterkte (dus massaverlies) hoe korter de levensduur: levensduur evenredig met $\frac{1}{L}$.
Conclusie: levensduur evenredig met $\frac{M}{L}$.

b levensduur zon: $10 \cdot 10^9$ jaar

$$t_{ster} = 10 \cdot 10^9 \frac{\text{aantal zonsmassa's}}{\text{aantal zonslichtsterktes}}$$

$$= 10^{10} \frac{\frac{M}{M_{zon}}}{\frac{L}{L_{zon}}}$$

c $t_{ster} = 10 \cdot 10^9 \frac{30}{10^2} = 3 \cdot 10^6$ jaar

d 61 Cygni B: 0,5 M_{zon} en 0,05 L_{zon}
aantal maal zo lang: $\frac{0{,}5}{0{,}05}$ = 10 maal zo lang

40 Pers je alle lege ruimte uit een waterstofatoom dan moet je kijken naar de verhouding *volume proton* en *volume atoom*.
Neem volume proton = 1.
Volume bol is evenredig met straal³.
Volume atoom = $(5{,}0 \cdot 10^4)^3 = 125 \cdot 10^{12} = 1{,}25 \cdot 10^{14}$.
Dichtheid neemt toe met een factor $1{,}25 \cdot 10^{14}$ als alle lege ruimte weg is.

© Noordhoff Uitgevers bv

41 a Massa bevolking is $7 \cdot 10^9 \times 50 = 3{,}5 \cdot 10^{11}$ kg $= 4 \cdot 10^{11}$ kg.

b Dichtheid neutronenster is $7 \cdot 10^{14} \times 1000$ kg/m^3 = $7 \cdot 10^{17}$ kg/m^3

$$\rho = \frac{m}{V} \rightarrow V = \frac{m}{\rho} = \frac{3{,}50 \cdot 10^{11}}{7 \cdot 10^{17}} = 0{,}0000005 \text{ m}^3 = 0{,}5 \text{ cm}^3$$

42 G = gravitatieconstante = $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2
M = massa zon = $1{,}988 \cdot 10^{30}$ kg
R = straal neutronenster = $1{,}0 \cdot 10^4$ m
Voor de ontsnappingssnelheid v geldt:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2 \times 6{,}67 \cdot 10^{-11} \times 1{,}4 \times 1{,}988 \cdot 10^{30}}{1{,}0 \cdot 10^4}}$$

$$= \sqrt{3{,}71 \cdot 10^{16}} = 1{,}9 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$= \frac{1{,}9 \cdot 10^8}{2{,}998 \cdot 10^8} \text{ maal lichtsnelheid} = 0{,}64\, c$$

43 Voor de lichtsnelheid geldt dan:

$$c = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \rightarrow c^2 = \frac{2GM}{R}$$

$$\text{en: } R = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2 \times 6{,}67 \cdot 10^{-11} \times 1{,}4 \times 1{,}988 \cdot 10^{30}}{(2{,}998 \cdot 10^8)^2}$$

$$= 4{,}1 \cdot 10^3 \text{ m} = 4{,}1 \text{ km}$$

44 De nevel dijt uit met een snelheid van 1500 km/s en de afstand is 6500 lichtjaar (ly); $T = 0{,}033$ s.

a De afstand is 6500 lichtjaar: het licht heeft er 6500 jaar over gedaan om ons te bereiken in 1054. De werkelijke leeftijd is dan 6500 + (2016 – 1054) = 6500 + 962 = 7462 jaar (als het nu 2016 is).

b De uitdijsnelheid is 1500 km/s: elke seconde wordt de Krabnevel 3000 km breder. De waargenomen middellijn is:
$3000 \times 962 \times 365 \times 24 \times 3600$ km $= 9{,}1 \cdot 10^{13}$ km = $9{,}1 \cdot 10^{16}$ m
de diameter in lichtjaar (ly): $\frac{9{,}1 \cdot 10^{16}}{9{,}46 \cdot 10^{15}} = 9{,}6$ ly

De diameter is volgens Wikipedia 11 lichtjaar.

45 a $\frac{dT}{dt} = 4{,}2 \cdot 10^{-13}$ en $T = 0{,}033$ s
Elke seconde neemt de pulsduur toe met $4{,}2 \cdot 10^{-13}$ s. Als bij de vorming van de pulsar de pulsduur 0 s is, moet de pulsar $0{,}033/4{,}2 \cdot 10^{-13}$ s = 2490 jaar geleden zijn ontstaan.

b De waargenomen pulsduur-leeftijd (2491 jaar) is langer dan de waargenomen supernova-leeftijd (962 jaar). Bedenk dat met onze aannames in het jaar 1054 de pulsduur $T = 0{,}033 - 4{,}2 \cdot 10^{-13} \times 962 \times 365 \times 24 \times 3600 = 0{,}020$ seconde was (zie ook c). Het licht dat ons toen bereikte was echter van het moment van de supernova-explosie. Uit de pulsduur-leeftijd zou toen gevolgd hebben $0{,}02/4{,}2 \cdot 10^{-13} = 1509$ jaar. De pulsar zou al 1509 jaar hebben bestaan voor de explosie, wat niet kan. Of de pulsduur neemt niet gelijkmatig toe of de pulsar startte met een zekere frequentie.

c 1054 is 692 jaar geleden (als het nu 2016 is). De afname van de pulsduur is dan:
$962 \times 365 \times 24 \times 3600 \times 4{,}2 \cdot 10^{-13} = 0{,}013$ sec.
De pulsperiode in het begin was:
$0{,}033 - 0{,}013 = 0{,}020$ s.

18.5 Het heelal waarin we leven

46 $r = 65000$ lichtjaar (ly); 1 ly = $9{,}461 \cdot 10^{15}$ m
Op 65000 ly van het centrum zijn er nog sterren in de Melkwegschijf en deze bewegen met een snelheid van 255 km/s in cirkelbanen rond het centrum (zie bron 17).

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{mM}{r^2} \rightarrow \frac{v^2}{r} = G\frac{M}{r^2} \rightarrow v^2 = G\frac{M}{r}$$

$$M = \frac{v^2 r}{G} = \frac{(255 \cdot 10^3)^2 \times 65000 \times 9{,}461 \cdot 10^{15}}{6{,}67 \cdot 10^{-11}}$$

$= 5{,}995 \cdot 10^{41}$ kg.
De massa van de zon is: $1{,}988 \cdot 10^{30}$ kg.
Het aantal zonmassa's is:
$\frac{5{,}995 \cdot 10^{41}}{1{,}988 \cdot 10^{30}} = 3{,}0 \cdot 10^{11}$ zonmassa's = 300 miljard zonmassa's.

47 a Een omloop rond dit centrum duurt 250 miljoen jaar (zie bron 17). De zon bestaat $4{,}65 \cdot 10^9$ jaar (bron 14).
Aantal omlopen: $\frac{4{,}65 \cdot 10^9}{250 \cdot 10^6} = 18{,}8$ keer.

b De aarde bestaat ongeveer even lang als ons zonnestelsel en heeft dus $4{,}7 \cdot 10^9$ rondjes rond de zon gedraaid.

48 a De lichtsterkte neemt met een factor 2 af elke 1300 lichtjaar. Wij zitten 28000 lichtjaar van het centrum van het melkwegstelsel:
$2^{\frac{28000}{1300}} = 2^{21{,}5} = 3{,}0 \cdot 10^6$
De stralingsflux neemt af met een factor 3 miljoen.

b In infrarood licht neemt de lichtsterkte met een factor 2 af elke $8{,}5 \times 1300 = 11050$ lichtjaar.

c $2^{\frac{28000}{11050}} = 2^{2{,}5} = 5{,}8$

d Ja, infrarood komt beter door het interstellaire stof.

49 a Het volume van de schijf is de oppervlakte van de schijf maal de dikte: $\pi r^2 \times$ dikte =
$\pi\,(50000 \times 9{,}461 \cdot 10^{15})^2 \times 2000 \times 9{,}461 \cdot 10^{15} = 1{,}33 \cdot 10^{61}$ m^3
Volume van 200 miljard sterren = $200 \times 10^9 \times \frac{4}{3}\pi r^3 = 2{,}83 \cdot 10^{38}$ m^3 (met voor zon $r = 6{,}963 \cdot 10^8$ m)
Het deel dat wordt ingenomen door sterren:
$\frac{2{,}83 \cdot 10^{38}}{1{,}33 \cdot 10^{61}} = 2{,}1 \cdot 10^{-23}$ deel.

b Volume atoom = $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(1 \cdot 10^{-10})^3 = 4{,}19 \cdot 10^{-30}$ m^3

Volume kern = $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\,(1 \cdot 10^{-15})^3 = 4{,}19 \cdot 10^{-45}$ m^3

Deel dat wordt ingenomen door de kern is het $1{,}0 \cdot 10^{-15}$ deel.

c Er is in de Melkweg dus veel en veel meer lege ruimte dan verhoudingsgewijs in een atoom.

50 a De snelheid van de zon op 28000 lichtjaar is 250 miljoen jaar voor een omloop:

$$v = \frac{2\pi \times 28000 \times 9{,}461 \cdot 10^{15}}{250 \times 10^6 \times 365 \times 24 \times 3600} = 2{,}11 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{mM}{r^2} \rightarrow \frac{v^2}{r} = G\frac{M}{r^2} \rightarrow M = \frac{v^2 r}{G} =$$

$$\frac{(2{,}11 \cdot 10^5)^2 \times 28000 \times 9{,}461 \cdot \times 10^{15}}{6{,}67 \cdot 10^{-11}}$$

$$= 1{,}77 \cdot 10^{41} \text{ kg}$$

© Noordhoff Uitgevers bv

b De lichtgevende massa in het melkwegstelsel is een derde van de totale massa: $\frac{1}{3} \times 6{,}0 \cdot 10^{41}$ kg = $2{,}0 \cdot 10^{41}$ kg (bron 17). 75% bevindt zich binnen de 28000 lichtjaar = $1{,}5 \cdot 10^{41}$ kg . Er is dus $1{,}77 \cdot 10^{41} - 1{,}5 \cdot 10^{41} = 0{,}27 \cdot 10^{41}$ kg donkere materie in dit gebied. Conclusie: er is meer lichtgevende materie.

c Dan moet de donkere materie de buitenste delen van het melkwegstelsel domineren.

51 Dat weten we zeker als de snelheid ten gevolge van de expansie groter is dan 1000 km/s. Volgens de wet van Hubble is dat bij een afstand d van:
$v = H \cdot d$.

$$d = \frac{v}{H} = \frac{1000 \frac{\text{km}}{\text{s}}}{21{,}7 \frac{\text{km}}{(\text{s} \cdot 10^6 \text{ ly})}} = \frac{1000}{21{,}7\left(\frac{1}{10^6 \text{ ly}}\right)} =$$

$$\frac{1000}{21{,}7} \times (10^6 \text{ ly}) = 46 \cdot 10^6 \text{ ly}$$

52 a $\lambda_o = 656{,}3$ nm; $v = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \cdot c$
$v = 35 \cdot 10^6$ m/s

$$v = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \cdot c \rightarrow \Delta\lambda = \frac{v\lambda}{c} = \frac{35 \cdot 10^6 \times 656{,}3 \cdot 10^{-9}}{2{,}998 \cdot 10^8} =$$

$7{,}7 \cdot 10^{-8}$ m = 77 nm
$\lambda_{\text{nieuw}} = 656{,}3 + 77 = 733$ nm

b Er geldt: $\Delta\lambda = \lambda_o \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$

$$\frac{v}{c} = \frac{35 \cdot 10^6}{2{,}998 \cdot 10^8} = 0{,}117$$

$$\Delta\lambda = \lambda_o \sqrt{\frac{1 + 0{,}117}{1 - 0{,}117}} = \lambda_o \sqrt{\frac{1{,}117}{0{,}883}} = 1{,}125\lambda_o$$

$1{,}125\lambda_o = 1{,}125 \times 656{,}3 = 738$ nm

53 a $z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_o}$ en $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_o$

$$z = \frac{\lambda - \lambda_o}{\lambda_o} = \frac{\lambda}{\lambda_o} - 1 = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} - 1$$

b $\lambda_o = 121{,}6$ nm en $\lambda = 885{,}2$ nm

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_o} = \frac{885{,}2 - 121{,}6}{121{,}6} = 6{,}280$$

c $z + 1 = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$

Noem $(z + 1)^2$ even x en laat zien dat $\frac{v}{c} = (x^2 - 1)/(x^2 + 1)$
$= [(z + 1)^2 - 1] / [(z + 1)^2 + 1] = [7{,}28^2 - 1]/[7{,}28^2 + 1] =$
$52/54 = 0{,}9630$
Er volgt $v = 0{,}9630\, c = 0{,}9630 \times 2{,}998 \cdot 10^8$
$= 2{,}887 \cdot 10^8$ m/s.

54 a Zij komt met een snelheid van 300 km/s naar ons toe (bron 18). De afstand is 2 miljoen lichtjaar (bron 18).

$$\text{tijd} = \frac{\text{afstand}}{\text{snelheid}} = \frac{2 \cdot 10^6 \times 9{,}461 \cdot 10^{15}}{300 \cdot 10^3}$$

$= 6{,}31 \cdot 10^{16}$ s $= 2 \cdot 10^9$ jaar

b Zie Youtube: zoek op Andromeda collision.

55 Hubble-horizon $= r_o = ct_o$
t_o is de huidige leeftijd van het heelal.
$t_o = \frac{1}{H_o}$

a leeftijd is $13{,}8 \cdot 10^9$ jaar
$r_o = 13{,}8 \cdot 10^9$ lichtjaar

b Hubble-volume $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(13{,}8 \cdot 10^9)^3 = 1{,}1 \cdot 10^{31}$ ly^3
Aantal kubussen: 1 kubus is $(1000 \cdot 10^6 \text{ ly})^3 =$
$1 \cdot 10^{27}$ ly^3.
Er passen dus $\frac{1{,}1 \cdot 10^{31}}{1 \cdot 10^{27}} = 1{,}1 \cdot 10^4$ kubussen in.

56 A, (C) en D.
A: de wet van Hubble laat zien dat het universum expandeert. Dit impliceert dat het universum vroeger kleiner was en ook in een extreem gecondenseerde staat moet hebben verkeerd. Dit *is* het principe van de oerknal.
B: Enkel waterstof en helium zijn geproduceerd in de oerknal. Dat enkel die twee elementen toen zijn gemaakt is ook een bewijs voor de oerknal (waar we hier niet verder op ingaan). De overige elementen zijn in de loop der tijd door sterren gemaakt.
C: Het ontbreken van sterren die ouder zijn dan 13,8 miljard jaar ondersteunt het idee van de oerknal. Als we sterren zouden ontdekken die ouder zijn dan het heelal, moet er iets mis zijn met onze ideeën over de oerknal.
D: De achtergrondstraling *is* een overblijfsel van de oerknal. Het laat ons zien dat het heelal ooit geconcentreerder en heter is geweest.
E: Zware sterren kunnen zwarte gaten produceren aan het eind van hun leven. Dit is niet gerelateerd aan de oerknal.

57 Van 3000 K naar 2,73 K.

a Wet van Wien: $\lambda_{max}T = 2{,}8978 \cdot 10^{-3}$
De temperatuur is afgenomen met een factor: 3000/2,73 = 1099.
De golflengte is $1099 = 1{,}10 \cdot 10^3$ maal zo groot geworden.

b De afstand tussen twee punten in het heelal was toen $1{,}10 \cdot 10^3$ keer zo klein. Dit is alles wat je kunt zeggen. Als het heelal altijd oneindig uitgestrekt is geweest, is het namelijk enkel maar zinvol te spreken over hoe de afstand tussen twee punten in de loop der tijd is veranderd.

Toepassing

Opgave 1 Een dag op Bèta Pictoris B

1 9 AE (astronomische eenheid) is $9 \times 1{,}5 \cdot 10^{11} = 1{,}35 \cdot 10^{12}$ m $= 1 \cdot 10^{12}$ m.

2 Cirkelbaan van Kepler: $\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$ (*Binas* tabel 35)

$$M = \frac{r^3 4\pi^2}{T^2 G} = \frac{(1{,}35 \cdot 10^{12})^3 \times 4\pi^2}{(20 \times 365 \times 24 \times 3600)^2 \times 6{,}67 \cdot 10^{-11}}$$

$= 3{,}66 \cdot 10^{30}$ kg
massa zon $= 1{,}9884 \cdot 10^{30}$ kg

aantal zonsmassa's: $\frac{3{,}66 \cdot 10^{30}}{1{,}9984 \cdot 10^{30}} = 1{,}8$

© Noordhoff Uitgevers bv

3 2300 nm = $2{,}3 \cdot 10^{-6}$ m is infrarood (zie *Binas* tabel 19B)

4 Door het dopplereffect. Op gebieden op het ene halfrond van de planeet beweegt de atmosfeer van de planeet van ons af (λ wordt groter dan 2300,000 nm) en op gebieden op het andere halfrond naar ons toe (λ wordt kleiner dan 2300,000 nm). Daardoor raakt de lijn 'uitgesmeerd'.

5 $\Delta\lambda = 2300{,}192 - 2300 = 0{,}192$ nm

$$v = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \cdot c = \frac{0{,}192}{2300} \times 2{,}998 \cdot 10^8 = 2{,}5 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

6 De planeet draait in een tijd $T = 2\pi r / v$ om zijn as.
$T = 2 \cdot \pi \cdot 1{,}65 \cdot 69{,}91 \cdot 10^6 / 2{,}5 \cdot 10^4 = 2{,}9 \cdot 10^4$ s
$= 8{,}05$ uur

Opgave 2 De golfbeweging van de zon in het Melkwegstelsel

7 $z(t) = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ en $T = \sqrt{\frac{\pi}{G \cdot \rho}}$

$$T = \sqrt{\frac{\pi}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 8{,}22 \cdot 10^{-21}}} = 2{,}39 \cdot 10^{15} \text{ s}$$

$= 7{,}6 \cdot 10^7$ jaar
0,0035 zonsmassa's / ly^3 =

$$\frac{0{,}0035 \times 1{,}9884 \cdot 10^{30}}{(9{,}461 \cdot 10^{15})^3} = 8{,}22 \cdot 10^{-21} \text{ kg/m}^3$$

8 Elke halve periode: 76/2 miljoen jaar; 38 miljoen jaar.

9 Binnen de foutenmarge (van 20%) kan de 38 miljoen jaar net in overeenstemming zijn met de 26 – 31 miljoen jaar. De verstoring van de Oortwolk kan ervoor zorgen dat kometen richting de zon vallen. Als zo'n object (dat 5-10 km in doorsnede is) op aarde inslaat zal dat enorme effecten hebben op de dampkring rond de aarde. Er zal op grote schaal leven (uit)sterven.

Opgave 3 Spectroscopische dubbelster

10 A en B liggen op een lijn die steeds door M gaat. A en B moeten dan dezelfde omlooptijd hebben.

11 Van het niveau met hoofdquantumgetal $n = 6$ naar $n = 2$.

12 Ster A heeft een kleinere baansnelheid dan ster B omdat A dichter bij het middelpunt M zit. De Dopplerformule ($v = (\Delta\lambda/\lambda) \cdot c$) vertelt je dan dat de golflengteverandering $\Delta\lambda$ voor ster A kleiner zal zijn dan voor ster B. L_2 hoort dus bij ster A.

13 Het punt b moet je intekenen op de top van de golfbeweging L_1 (je kunt het dus drie keer intekenen). In situatie b beweegt ster B (die hoort bij L_1) het snelst van ons weg. Dit komt overeen met de maximale roodverschuiving; λ is dan het grootst.

14 Aflezen in figuur 18.56 geeft $\Delta\lambda_A = 0{,}041$ nm. Met $v = (\Delta\lambda/\lambda) \cdot c = (0{,}041/410{,}17) \cdot 2{,}998 \cdot 10^{30}$ m/s = $3{,}0 \cdot 10^4$ m/s = 30 km/s.
Aflezen in de figuur geeft $\Delta\lambda_B = 2\Delta\lambda_A = 60$ km/s.
Aflezen in de figuur geeft $T = 1{,}38 \cdot 10^6$ s. Er geldt $v = 2\pi r / T$. Dus $3{,}0 \cdot 10^4 = 2\pi r_A / 1{,}38 \cdot 10^6$ waaruit volgt $r_A = 6{,}6 \cdot 10^9$ m. Dus geldt: $r_B = 2r_A = 13{,}2 \cdot 10^9$ m.

15 De gravitatiekrachten zijn actie-en reactiekrachten, dus gelijk aan elkaar. Er geldt $F_{mpz,A} = F_{mpz,B}$. Invullen levert $m_A v_A^2 / r_A = m_B v_B^2 / r_B$. Met $v = 2\pi r/T$ geeft dit: $m_A 4\pi^2 r_A / T^2 = m_B 4\pi^2 r_B / T^2$. Wegdelen levert: $m_A r_A = m_B r_B$, oftewel $m_A/m_B = r_B/r_A = 2$.

Opgave 4 De dichtheid van sterren in onze Melkweg

16 $r = 500$ lichtjaar
$z = 0$
$n = 0{,}3 \cdot e^0 \cdot e^{\frac{-500}{7500}} = 0{,}280$ ly^{-3}

17 0,28 ster per ly^3 is 1 ster per 3,6 ly^3.
Gemiddelde afstand tussen 2 sterren:
$\sqrt[3]{3{,}6} = 1{,}5$ lichtjaar.

18 $r = 2800$ lichtjaar
$z = 50$ lichtjaar
$n = 0{,}3 \cdot e^{\frac{-50}{1000}} \cdot e^{\frac{-28000}{7500}} = 0{,}0062$

19 0,0062 ster per (ly)^3 is 1 ster per 161 (ly)^3.
Gemiddelde afstand tussen 2 sterren:
$\sqrt[3]{161} \cdot = 5{,}4$ lichtjaar.

20 Proxima Centauri ligt op $4{,}0 \cdot 10^{16}$ m.
Dit is $\frac{4{,}0 \cdot 10^{16}}{9{,}461 \cdot 10^{15}} = 4{,}2$ lichtjaar.
De overeenkomst is redelijk goed, vooral als je bedenkt dat we slechts een *gemiddelde* afstand tussen sterren hebben berekend.

Proefwerkopgaven

1 a De twee lijnen bij ongeveer 589,2 en 589,8 zijn absorptielijnen van natrium. De lijn bij 656 is een absorptielijn van waterstof. De lijnen bij 588 en 668 zijn absorptielijnen van helium.

b De zon roteert rond zijn as. Er zijn dus delen van de zon die naar de aarde toe bewegen en delen die van de aarde af bewegen. Door het dopplereffect verbreden de lijnen.

2 a In tabel 21 van *Binas* is af te lezen dat het hier gaat om de lijn die hoort bij de overgang van de tweede aangeslagen toestand naar de eerste aangeslagen toestand: 656 nm. De verschoven lijn moet daarbij in de buurt liggen omdat $\Delta\lambda/\lambda$ (= v/c) gelijk is aan 0,005: de verschuiving is 0,5%.

b $v = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} c$

daaruit volgt:

$$\Delta\lambda = \frac{v\lambda}{c} = \frac{1{,}5 \cdot 10^6 \times 656 \cdot 10^{-9}}{3{,}0 \cdot 10^8} = 3{,}3 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

ofwel: 3,3 nm

© Noordhoff Uitgevers bv

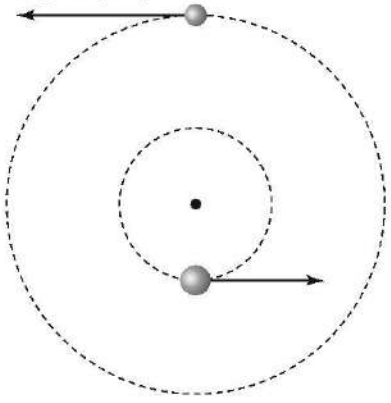
c Hier treedt verschuiving op naar kleinere golflengte ('blauwverschuiving'). Dit deel van de Krabnevel beweegt naar ons toe!

3 **a** De afstand van de aarde tot de zon bedraagt $0{,}1496 \cdot 10^{12}$ m (*Binas* tabel 31).
De omtrek van de aardbaan is dan: $2\pi r = 9{,}40 \cdot 10^{11}$ m.
Tijd nodig voor 1 rondje is een jaar:
$T = 365 \times 24 \times 3600 = 3{,}15 \cdot 10^{7}$ s.
Baansnelheid is dan: omtrek : T = $9{,}40 \cdot 10^{11} : 3{,}15 \cdot 10^{7} = 2{,}98 \cdot 10^{4}$ m/s.
b De snelheidscorrectie is dus maximaal $+ 2{,}98 \cdot 10^{4}$ m/s of $- 2{,}98 \cdot 10^{4}$ m/s.
c 0 m/s

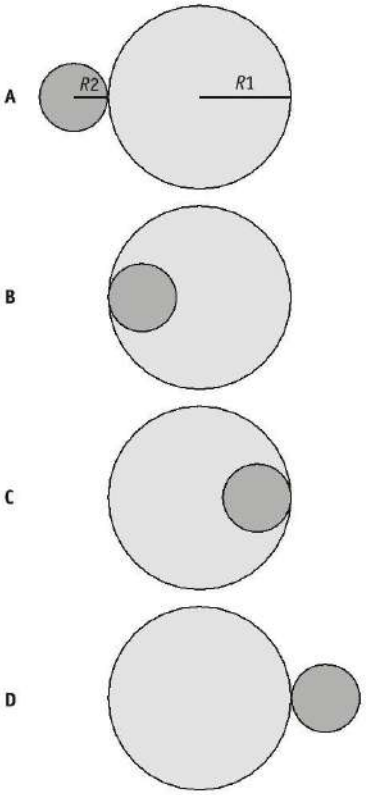
4 De temperatuur van de zon is nu 5780 K en toen 5000 K. De temperatuur was toen een factor 5000 : 5780 = 0,865 lager. In de formule voor de lichtsterkte $L = P_{bron} = 4\pi r^2 \cdot \sigma \cdot T^4$ staat de temperatuur tot de vierde macht. Door de lagere temperatuur neemt de lichtsterkte af met een factor $0{,}865^4 = 0{,}560$.
De straal van de zon was toen 1,05 groter. In bovengenoemde formule staat de straal van de zon in het kwadraat. Door de grotere straal neemt de lichtsterkte toe met een factor $1{,}05^2 = 1{,}1025$.
De lichtsterkte neemt in totaal toe met een factor $0{,}560 \cdot 1{,}1025 = 0{,}617$.
De zonneconstante toen was $1{,}368 \cdot 10^3 \times 0{,}617 = 845$ W/m².

5 Voor de tangens van de hoek geldt:
$\tan^{-1}(\alpha) = 200 \cdot 10^9$ m : $(50 \times 9{,}461 \cdot 10^{15}$ m) = $4{,}23 \cdot 10^{-7}$
Voor α volgt dan een hoek van $2{,}4 \cdot 10^{-5}$ graad = $2{,}4 \cdot 10^{-5} \times 3600 = 0{,}09$ boogsec.
De Hubble Ruimtetelescoop kan deze twee sterren onderscheiden.

6 We hebben te maken met een dubbelster. De twee sterren bewegen tegen elkaar in. Zie de figuur hieronder. Ze passeren elkaar dan met een snelheid van 30 + 40 = 70 km/s.



De tijdstippen A, B, C en D horen bij de hieronder geschetste situaties: $R1$ is de straal van de ene ster en $R2$ de straal van de andere.



Er geldt:
In de tijd van A naar D is de afstand afgelegd:
$2\,(R1 + R2)$ in een tijd van 8 uur.
In de tijd van B naar C is de afstand afgelegd:
$2\,(R1 - R2)$ in een tijd van 1 uur en 18 minuten.
$2\,(R1 + R2) = 8 \times 3600 \times 70$
$2\,(R1 - R2) = (1 \times 3600 + 18 \times 60) \times 70$
Herschrijven:
$R1 + R2 = (8 \times 3600 \times 70)\,/2 = 1008000$ km
$R1 - R2 = ((1 \times 3600 + 18 \times 60) \times 70)/2 = 163800$ km
$R1 + R2 = 1008000$ km
$R1 - R2 = 163800$ km
$R1 = 585900$ km $= 5{,}86 \cdot 10^5$ km
$R2 = 422100$ km $= 4{,}22 \cdot 10^5$ km

© Noordhoff Uitgevers bv

Hoofdstuk 19
Quantumfysica

Introductie

1 a Een elektron in aangeslagen toestand keert, eventueel in stappen, terug naar de grondtoestand. Daarbij kan een foton worden uitgezonden in het frequentiegebied van zichtbaar licht.

b Kleuren van een T-shirt: het T-shirt bevat kleurstoffen, in het algemeen complexe moleculen met veel energieniveau's. Uit wit licht van bijvoorbeeld de zon worden bepaalde kleuren geabsorbeerd en andere kleuren gereflecteerd. Bij de absorptie gaan elektronen in de kleurstof naar een hoger energieniveau en vallen dan in stapjes terug, waarbij de energie ofwel wordt uitgezonden, bijvoorbeeld in de vorm van infrarode straling, of wordt omgezet in trillingsenergie van moleculen in het T-shirt (met andere woorden: in warmtestraling of in warmte).

2 Bijvoorbeeld: gebeurtenissen op atomaire schaal zijn vaak niet met zekerheid te voorspellen. Het zijn fundamenteel kansprocessen.
Of: een voorwerp kan niet tegelijkertijd een scherp bepaalde plaats en een scherp bepaalde snelheid hebben.
Waarschijnlijk wordt hier in het hoofdstuk wel iets over uitgelegd.

3 a Elektronen kunnen in een atoom alleen bepaalde waarden van de energie hebben (zie ook hoofdstuk 12 bron 9, over het atoommodel van Bohr). Spectraallijnen ontstaan doordat atomen dus ook alleen licht van bepaalde golflengten kunnen uitzenden of absorberen.
Per atoom zijn de energieniveaus verschillend.

b Blijkbaar liggen in die moleculen de energieniveaus dichter bij elkaar dan in een atoom.

c De isotopen van een element verschillen in het aantal neutronen dat zich in de kern bevindt.

d Kerndeeltjes kunnen ook in een aangeslagen toestand verkeren. Als ze naar een lager energieniveau gaan wordt daarbij een gammafoton uitgezonden. Verschillende isotopen hebben dus een verschillend aantal kerndeeltjes. Daardoor zullen ook de energieniveaus verschillen en dus zal het spectrum van de uitgezonden straling anders zijn.

e De energieniveaus van de kerndeeltjes in een kern liggen blijkbaar veel verder uit elkaar dan die van de elektronen in een atoom.

f Hoe kleiner het deeltje, hoe kleiner de golflengtes (en dus: hoe groter de verschillen tussen de energieniveaus).

19.1 De aanloop naar de quantumfysica

1 Hiermee wordt bedoeld dat alleen bepaalde banen mogelijk zijn en dat de banen genummerd kunnen worden.

2 a $F_{mpz} = \frac{m_e v^2}{r} = F_e = f\frac{e^2}{r^2}$

Hieruit volgt $v^2 = \frac{fe^2}{m_e r}$

b De quantisatieregel zegt dat $2\pi rmv = nh$.

Hieruit volgt dat $v_n^2 = \frac{n^2h^2}{4\pi^2 m_e^2 r_n^2}$.

c $v_n^2 = \frac{n^2h^2}{4\pi^2 m_e^2 r_n^2}$ en $v^2 = \frac{fe^2}{m_e r}$ zodat

$\frac{n^2h^2}{4\pi^2 m_e^2 r_n^2} = \frac{fe^2}{m_e r}$

Hieruit volgt $r_n = \frac{n^2h^2}{4\pi^2 m_e fe^2}$

Met $v^2 = \frac{fe^2}{m_e r}$ volgt dan

$v_n^2 = \frac{fe^2}{m_e\left(\frac{n^2h^2}{4\pi^2 m_e fe^2}\right)} = \frac{4\pi^2 f^2 e^4}{n^2h^2}$.

d Gebruik van het resultaat van c geeft:

$E_n = \frac{1}{2}m_e \cdot v_n^2 - \frac{fe^2}{r_n}$

$= \frac{1}{2}m_e \cdot \frac{4\pi^2 f^2 e^4}{n^2h^2} - \frac{fe^2}{\frac{n^2h^2}{4\pi^2 m_e fe^2}}$

$= -\frac{2\pi^2 m_e f^2 e^4}{n^2h^2}$

e De getalswaarden van h, f, e staan in *Binas* in tabel 7A en die van m_e in tabel 7B. Invullen in de formules voor r_1 (zie c) en E_1 (zie d) geeft het gewenste resultaat.

3 a Waterstof bestaat uit een kern (proton) en 1 elektron. Hetzelfde geldt ook voor enkelvoudig geïoniseerd helium, ook al zitten er nu twee protonen in de kern.

b Als je de afleiding van de formule voor E_n bekijkt, dan blijkt dat de factor e^4 voortkomt uit het kwadraat van de kernlading maal het kwadraat van de elektronlading. In helium is de kernlading tweemaal zo groot als in waterstof, maar de elektronlading is hetzelfde. De factor e^4 verandert dus in $(2e)^2 \times e^2 = 4e^2$.

© Noordhoff Uitgevers bv

c De lading van het elektron blijft gelijk en de lading van de kern wordt tweemaal zo groot. Nagaan van de afleiding geeft dan dat de baanstraal van het elektron in de grondtoestand wordt gegeven door:
$r_1 = \frac{h^2}{8\pi^2 mfe^2}$.

d $r_{1,\text{Helium}} = {}^1\!/_2\, r_{1,\text{Waterstof}}$, dus ${}^1\!/_2 \cdot 5{,}26 \cdot 10^{-11}$ m $= 2{,}63 \cdot 10^{-11}$ m

e Bij scheikunde heb je (waarschijnlijk) al geleerd dat er in het laagste energieniveau twee elektronen passen. Beide elektronen zitten bij helium dus in de laagste baan en dit betekent (zie d) dat een heliumatoom dus een twee maal zo kleine diameter heeft als een waterstofatoom. Het waterstofatoom is dus groter.

4 a Volgens het model van De Broglie beweegt het elektron in een cirkel rond de kern en gedraagt zich daarbij als een staande golf. Dit betekent dat de golf langs de cirkelbaan wel netjes op zichzelf moet aansluiten. Anders zou er van de golf, vanwege interferentie, niets overblijven. Dit kan alleen als de baan precies een geheel aantal golflengten lang is, ofwel: $2\pi r = n\lambda_n$. Hieruit volgt het gevraagde direct.

b Invullen van $\lambda = \frac{h}{mv}$ in $2\pi r = n\lambda_n$ geeft direct het gewenste resultaat, als mv via kruislings vermenigvuldigen van de rechterkant van de vergelijking naar de linkerkant wordt gehaald.

5 a en b $\frac{\Delta P}{\Delta r}(r)$ geïntegreerd over r kan geen 1 zijn, omdat op de verticale as de kans per volume staat en langs de horizontale as de afstand tot de kern.

De r in $\frac{\Delta P}{\Delta v}(r)$ geeft aan dat $\frac{\Delta P}{\Delta v}$ alleen van r afhangt

en dus overal op dezelfde afstand van de kern hetzelfde is.
Omdat de totale waarschijnlijkheid om het elektron

ergens aan te treffen moet $\frac{\Delta P}{\Delta v}$ worden geïntegreerd

over de gehele ruimte en niet alleen over r.

c De oppervlakte van een bol op afstand r van de kern is gelijk aan $4\pi r^2$. Het volume van een bolschil met dikte dr op een afstand r van de kern is dus gelijk aan $4\pi r^2 dr$.
Zodoende is $\int 4\pi r^2 \frac{\Delta P}{\Delta v} \cdot dr$ wel een integraal over het totale volume.

d In de buurt van de kern is $4\pi r^2$ klein, vandaar de dip in het midden van de grafiek. Op grotere afstand gaat $\frac{\Delta P}{\Delta v}$ naar 0, dus de grafiek als geheel ook, en ergens daar tussenin is de grafiek maximaal.

e Het klopt.

6 a In opdracht 2 heb je afgeleid dat:

$v^2 = \frac{fe^2}{m_e r}$ en dus $E_k = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{fe^2}{2r}$.
Je hebt ook gebruikt dat de elektrische energie

gelijk is aan $E_e = -\frac{fe^2}{r}$ en dus $E_e = -2E_k$.
Voor de totale energie geldt dan, voor ieder energieniveau dat:
$E_{tot} = E_k + E_e = E_k - 2E_k = -E_k$
De nulpuntsenergie is de kinetische energie die toch nog aanwezig is in de grondtoestand. Hiervoor geldt dus
$E_{k,1} = -E_1 = --13{,}6 = 13{,}6$ eV

7 Deze is 4 maal zo groot, zie opdracht 3, dus: 54,4 eV.

8 De energie van een foton is $E = hf = \frac{hc}{\lambda}$ zodat

$$\frac{1}{\lambda_{n,m}} = \frac{E_n - E_m}{hc} = \frac{2\pi^2 mf^2e^4}{n^2h^3c} - \frac{2\pi^2 mf^2e^4}{m^2h^3c}$$
$$= -\frac{2\pi^2 mf^2e^4}{h^3c}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

9 a In opdracht 3b bleek dat de factor e^4 voortkomt uit het kwadraat van de kernlading maal het kwadraat van de elektronlading. De kernlading is nu Ze in plaats van e. Dit wordt dus Z^2e^4 in plaats van e^4.

b Voor tweemaal geïoniseerd lithium moeten de energieniveaus worden vermenigvuldigd met 3^2. De nulpuntsenergie komt dan dus uit op 9× die van waterstof dus $9 \times 13{,}6 = 122$ eV.

19.2 Deeltjes en golven

10 De benen van een stemvork bewegen tegengesteld. Als de benen van de stemvork en het oor in één vlak liggen, produceren ze golven die in tegenfase zijn. Omdat de afstand van de benen klein is ten opzichte van de golflengte, komen beide golven bijna in tegenfase aan in het oor en hoor je dus niets.

11 a $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{400} = 0{,}85$ m

b De lengtes in de figuur staan allemaal in verhouding met de golflengte. Als de golflengte kleiner wordt dan wordt de afstand AB dus ook kleiner.

c In een klaslokaal heb je ook te maken met de reflecties van het geluid tegen de wanden van het lokaal. Hierdoor wordt het interferentiepatroon onduidelijker.

d Als het geluid van de twee luidsprekers in tegenfase is ontstaat in het midden geen buik- maar een knooplijn.

12 a De golven die aankomen bij de twee spleten, A en B, zijn in fase. Vervolgens worden ze na het diafragma in alle richtingen afgebogen en komen elkaar weer tegen. Bij de middellijn tussen A en B zijn ze in fase en versterken elkaar: een buik vanuit A komt een buik vanuit B tegen en een dal vanuit A komt een dal vanuit B tegen.

b Waar de golven vanuit A en B in fase zijn ontstaat, door constructieve interferentie, een maximum. Waar ze in tegenfase zijn ontstaat, door destructieve interferentie, een minimum.

© Noordhoff Uitgevers bv

13 Voor het centrale maximum is het faseverschil tussen de samenkomende golven 0. Voor het maximum daarnaast is het faseverschil precies 1. De afstanden van dat punt tot A respectievelijk B is dan precies 1 golflengte. Punt C zit weer 1 maximum verder: het faseverschil tussen de samenkomende golven is daar 2 en dus is de AC-BC tweemaal de golflengte.

14 $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{(m^2v^2)}{m} = \frac{p^2}{2m}$

Hieruit volgt $p = \sqrt{2mE_k}$.

15 Voor de eenheid van p geldt dat:
$[p] = [mv] = [m][v] = \text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

16 a Invullen van de gegevens geeft:
$p = \sqrt{2mE_k} = \sqrt{2 \cdot 970 \cdot 6{,}23 \cdot 10^5}$
$= 3{,}48 \cdot 10^4\ \text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

b Uit $E_k = \frac{p^2}{2m}$ volgt:

$m = \frac{p^2}{2E_k} = \frac{(1{,}43 \cdot 10^{-2})^2}{2 \cdot 3{,}42 \cdot 10^{-20}} = 2{,}99 \cdot 10^{-25}\ \text{kg}.$

17 Met gebruik van $E_k = 13{,}6$ eV (zie opdracht 6a) vinden we:
$p = \sqrt{2mE_k} = \sqrt{2 \times 9{,}11 \cdot 10^{-31} \times 13{,}6 \times 1{,}60 \cdot 10^{-19}}$
$= 1{,}99 \cdot 10^{-24}\ \text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

Dit geeft $v = \frac{p}{m} = \frac{1{,}99 \cdot 10^{-24}}{9{,}11 \cdot 10^{-31}} = 2{,}2 \cdot 10^6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

18 De aanname van Compton dat de elektronen vrij zijn is gerechtvaardigd omdat de energie van de gamma-fotonen ($\approx 10^6$ eV) veel groter is dan de ionisatie-energie van de elektronen.

19 De fotonenergie wordt gegeven door

$E_f = hf = \frac{hc}{\lambda}$. Dan volgt $p_f = \frac{E_f}{c} = \frac{hc}{\lambda c} = \frac{h}{\lambda}$.

20 a De openingen van de spleten moeten zo groot zijn dat de molekulen er doorheen kunnen. Interferentie treedt alleen op als de bundels elkaar achter de spleten overlappen. Hiervoor moet er voldoende buiging plaatsvinden, en dit gebeurt alleen als de golflengte veel groter is dan de opening van de spleet, en dus ook (veel) groter dan het molekuul.

b De golflengte is (veel) groter dan 5 nm. Dan is de impuls kleiner dan

$\frac{h}{\lambda} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}}{5 \cdot 10^{-9}} = 1{,}3 \cdot 10^{-25}\ \text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

c De punten verschijnen een voor een op het scherm (deeltjesgedrag) maar ze vormen samen wel een duidelijk interferentiepatroon (golfgedrag).

21 Uit $p = \sqrt{2ME_k}$ volgt:

$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_eE_k}}$

$= \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ E_k\,(\text{eV})}} = \frac{1{,}2 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{E_k\,(\text{eV})}}$

22 Met gebruikmaking van opgave 21 volgt:

a 10^2 eV:

$\lambda = \frac{1{,}2 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{E_k\,(\text{eV})}} = \frac{1{,}2 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{10^2}} = 1{,}2 \cdot 10^{-10} = 0{,}1\ \text{nm}$

b 10^2 keV:

$\lambda = \frac{1{,}2 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{E_k\,(\text{eV})}} = \frac{1{,}2 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{10^5}} = 3{,}8 \cdot 10^{-12} = 4\ \text{pm}$

23 Met gebruikmaking van opgave 21 volgt:

a 80 eV:
$\lambda = \frac{1{,}2 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{E_k\,(\text{eV})}} = \frac{1{,}2 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{80}} = 1{,}3 \cdot 10^{-10} = 13\ \text{nm}$
Scheidend vermogen: maximaal rond de 20 nm.

b 160 keV:

$\lambda = \frac{1{,}2 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{E_k\,(\text{eV})}} = \frac{1{,}2 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{160 \cdot 10^3}} = 3 \cdot 10^{-12} = 3\ \text{pm}$

Scheidend vermogen: maximaal rond de 5 pm.

24 Methode: schat de grootte van het kleinste detail met behulp van een geodriehoek en vergelijk met de aangegeven schaal: Dit geeft ongeveer:

a 0,02 nm
b 3 nm
c 0,05 µm
d 2 nm

25 Geschat scheidend vermogen in figuur 19.15 (zie opdracht 24): 0,02 nm.
Vergeleken met de golflengte (volgens de methode van opgaven 23): net iets beter dan rond de10 pm, ofwel 0,01 nm.
Conclusie: De kwaliteit van de lenzen was dus bepalender.

26 a $\lambda = \frac{1{,}2 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{100 \cdot 10^3}} = 3{,}8 \cdot 10^{-12} = 3{,}8\ \text{pm}$

b gammastraling

c reden 1:
Gammastraling heeft een veel te groot doordringend vermogen, en reageert nauwelijks op de aanwezigheid van het virus.
reden 2:
De elektronenmicroscoop dankt zijn bestaan aan de uitvinding van magnetische lenzen, waarmee de elektronenbundel kan worden geconvergeerd. Zulke lenzen bestaan niet voor gammastraling.

19.3 Waarschijnlijkheid en complementariteit

27 a Oppervlakte van de blauwe piek gedeeld door het totaal geeft ongeveer 20%.

b Trek een gemiddelde lijn door de pieken, zodat er één gladde heuvel overblijft. Waar de grafiek boven deze lijn uitsteekt is sprake van constructieve en waar hij eronder zit van destructieve interferentie.

© Noordhoff Uitgevers bv

28 a De fotonen worden individueel, stuk voor stuk door de opstelling geschoten en vervolgens waargenomen, en gedragen zich in die zin als deeltjes. De plek waar ze zullen worden waargenomen wordt echter bepaald door een kansproces, dat weer wordt bepaald door het golfkarakter van het foton. Bij de waarneming wordt ieder foton afzonderlijk maar op één plek geteld, duidelijk weer een vorm van deeltjesgedrag. Maar omdat de fotonen één voor één door de opstelling reizen kan het niet zo zijn dat een foton interfereert met een ander foton. Het moet zich dus zelf als een golf gedragen en ook met zichzelf interfereren.

b In het waterstofatoom is maar één elektron aanwezig. De energie van dat elektron heeft een welbepaalde waarde doordat het elektron zich in het atoom gedraagt als een staande golf, en de energie komt overeen met de frequentie van die golf maal de constante van Planck.

c Door een foton van de geschikte golflengte kan bijvoorbeeld dit ene elektron in het waterstofatoom naar een andere energietoestand worden geëxciteerd. Dit is gedrag dat we in het algemeen toch wel met een deeltje associëren.

29 a Volgens de onbepaaldheidsrelatie is $\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$.
Met $\Delta x = 0{,}10$ nm volgt

$$\Delta p \geq \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}}{4\pi \cdot 0{,}10 \cdot 10^{-9}} = 5{,}3 \cdot 10^{-25} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b $\Delta v \geq \frac{\Delta p}{m} = \frac{5{,}2 \cdot 10^{-25}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}} = 5{,}8 \cdot 10^{5}$ m/s

30 a $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}}{58 \cdot 1{,}2} = 9{,}5 \cdot 10^{-36}$ m

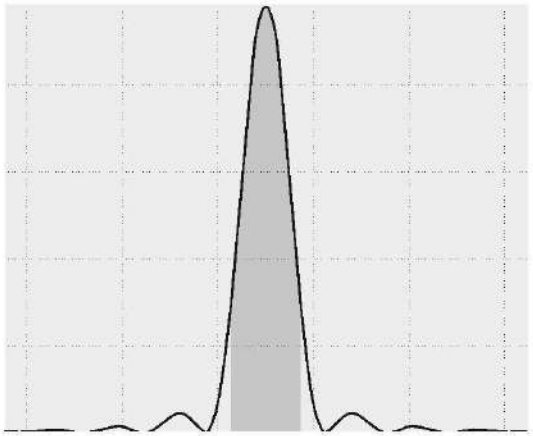
b De afmeting van een atoom is in de orde van 100 pm, dat is $1 \cdot 10^{-10}$ m. De golflengte van Jeanette is dus 25 ordes kleiner.

c Uit $\Delta x = 1 \cdot 10^{-10}$ m = 0,1 nm volgt
$\Delta p \geq 5 \cdot 10^{-25}$ kg · m · s^{-1}. Zie opgave 29a.

d Hieruit volgt dat

$$\Delta v \geq \frac{5 \cdot 10^{-25}}{58} \text{ dus} \geq 1 \cdot 10^{-26} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$ Zie opgave 30b.

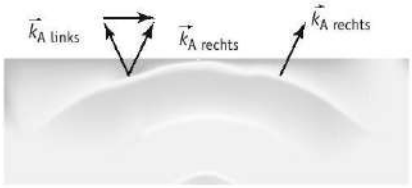
31 a en b Zie onderstaande figuur.



32 a Voor een willekeurige golf geldt $k = \frac{1}{\lambda}$ en voor een quantumgolf geldt $p = \frac{h}{\lambda}$. Gecombineerd geeft dit $p = hk$ voor een quantumgolf en invullen in de onbepaaldheidsrelatie van Heisenberg geeft inderdaad $\Delta x \Delta k \geq = \frac{1}{4\pi}$.

b Er moet niet alleen gekeken worden naar de plaats op het golffront, maar er moet ook rekening mee gehouden worden dat de flanken van de golf veel zwakker zijn dan het deel dat naar voren gaat. Een schatting van de juiste keuze voor Δk schuift hierdoor een stuk op naar het midden.

c Zie figuur:



$\Delta\vec{k} = \vec{k}_{A\ rechts} - \vec{k}_{A\ links}$

$\vec{k}_{A\ rechts}$ is naast $\vec{k}_{A\ links}$ gezet en de verschilvector $\Delta\vec{k}$ is aangegeven.
De lengte ervan is ongeveer de helft van $\vec{k}_{A\ links}$ zelf.

d De lengte van $\vec{k}$ is gelijk aan $1/\lambda$ en de lengte van $\Delta\vec{k}$ is daar de helft van. In de tekening is te zien dat Δx ongeveer driekwart golflengte groot is, dus $\Delta x\, \Delta k_x \approx 0{,}4$ en dit is inderdaad een stuk groter dan $(4\pi)^{-1}$.

19.4 Deeltjes in een put

33 De afgeleide nul stellen levert $5r^{-2} - 14r^{-3} = 0$, dus $r = 14/5 = 2{,}8$. De functie krijgt dan de waarde −0,89.

34 a Orde van grootte houdt in dat alleen naar de macht van 10 wordt gekeken, en niet naar het getal (tussen 0 en 1) dat ervoor staat. Invullen van de waarden voor h, m_e, f en e levert dan het gevraagde resultaat.

b De afgeleide gelijk aan nul stellen levert $r = 2 \cdot 10^{-9}$. Afronden op de orde van grootte geeft dus 10^{-9} m.

35 a Invullen geeft:
$p = \sqrt{2mE_k} \approx \sqrt{2 \times 9 \cdot 10^{-31} \times 10^{-18}}$

$\approx \sqrt{10^{-48}} = 10^{-24}$ kg · m · s^{-1}

b Er is geen gebiedje Δp dat in orde van grootte kleiner is dan p, en waar toch een flink deel van het golfpakket in past.

c Uit de onbepaaldheidsrelatie volgt

$$\Delta x \geq \frac{h}{4\pi\, \Delta p} \text{ dus } \Delta x \geq \frac{10^{-33}}{10^{1} \times 10^{-24}}$$

dus $\Delta x \geq 10^{-10}$.
Het atoom moet minimaal ongeveer deze grootte hebben.

© Noordhoff Uitgevers bv

36 a De nulpuntsenergie is altijd de energie die het deeltje nog heeft in de grondtoestand. Dit geldt dus ook voor het deeltje in een energieput.

b Invullen van $E_1 = \frac{h^2}{8mL^2}$ in de formule voor E_n geeft direct het gewenste resultaat.

37 a De breedte van het blokje is minimaal 0,5 golflengte. De maximale golflengte is dan 20 µm.

b Invullen van $\lambda = 20$ µm in $p_x = \frac{h}{\lambda}$ geeft $p_x = 3{,}3 \cdot 10^{-29}$ kg·m·s^{-1}

c $E_1 = \frac{p^2}{2m}$ en $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$

De bijdrage van p_x is dus

$$\frac{(3{,}3 \cdot 10^{-29})^2}{2 \times 9{,}11 \cdot 10^{-31}} = 6{,}0 \cdot 10^{-28} \text{ J}$$

d bijdrage p_y: $6{,}0 \cdot 10^{-30}$ J
bijdrage p_z: $6{,}0 \cdot 10^{-26}$ J

e kinetische energie totaal: $6{,}0 \cdot 10^{-26}$ J

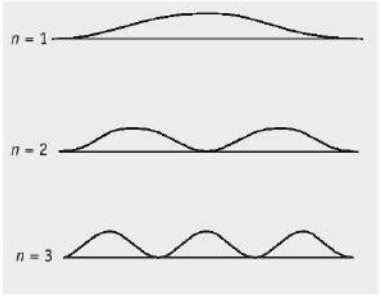
38 a De golflengte is maximaal 2 × de lengte van het draadje, dus 200 µm.

b Wat kleiner,want de waarschijnlijkheid piekt in het midden en is bij de rand heel klein, dus ongeveer 100 µm = $1 \cdot 10^{-4}$ m.

c Het betreft een staande golf die het gevolg is van constructieve interferentie van tegengesteld bewegende golven met dezelfde golflengte. De impulsen zijn dus even groot maar hebben een tegengesteld teken.
De onzekerheid in de impuls is dan ongeveer
$\Delta p = 2\frac{h}{\lambda} = 7 \cdot 10^{-30}$ kg·m^2·s^{-1}

d $\Delta x\, \Delta p = 1 \cdot 10^{-4} \times 7 \cdot 10^{-30} = 7 \cdot 10^{-34}$ kg·m^2·s^{-1}
Dit is inderdaad groter dan $h/4\pi$.

39 a Zie onderstaand figuur.



b Invullen in de formule voor de energie geeft:

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2} = \frac{(6{,}63 \cdot 10^{-30})^2}{8 \times 9{,}11 \times \cdot 10^{-31} \times (1{,}0 \cdot 10^{-9})^2} = 6{,}0 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

$E_2 = 2^2 E_1 = 2{,}4 \cdot 10^{-20}$ J

c $E_1 = E_2 - E_1 = 1{,}8 \cdot 10^{-20}$ J
$f = \frac{E}{h} = 2{,}7 \cdot 10^{13}$ Hz

d Dit is straling in het ver infrarood.

40 a Opdracht 34: 10^{-9} m
Opdracht 35: 10^{-10} m
(Het verschil kan gemakkelijk een kwestie van afronden zijn.)
Kijk je in tabel 19.31 op welke afstand de kans om het elektron binnen die afstand aan te treffen bijvoorbeeld rond de 70% is, dan kom je op iets minder dan $4a_0 = 2 \cdot 10^{-10}$ m.
Zit allemaal aardig bij elkaar in de buurt dus.

b De energie van gammastraling is typisch rond enkele MeV, ongeveer 10^6 maal groter dan de energie van fotonen van zichtbaar licht, zoals uitgezonden door een atoom.
Bij gebruik van het energieput-model is bovendien belangrijk dat kerndeeltjes een paar duizend keer zo zwaar zijn als een elektron.
Invullen geeft dan dat

$$\frac{h^2}{8m_{\text{kerndeeltje}} L_{\text{kern}}^2} = 10^6 \frac{h^2}{8m_e L_{\text{atoom}}^2}$$

dus

$$L_{\text{kern}}^2 \approx 10^{-6} \times \frac{m_e}{m_{\text{kerndeeltje}}} L_{\text{atoom}}^2$$

$$\approx 10^{-6} \times 10^{-3} L_{\text{atoom}}^2$$

Een kern is zodoende ongeveer $10^5 \times$ zo klein als een atoom, dus rond de 10^{-15} m.

c In *Binas* staat in tabel 7 al dat de massa van het proton, omgerekend in joule via $E = mc^2$, een waarde heeft van $1{,}5 \cdot 10^{-10}$ J.
We gebruiken nu het energieput-model en veronderstellen dat in het proton alle quarks in de grondtoestand zitten.
De massa van het proton is samengesteld uit de massa van 2 up-quarks, plus de massa van 1 down-quark plus de energie E_{quarks} van de quarks, gedeeld door c^2. De massa van het proton is 938 MeV/c^2, de massa van de quarks respectievelijk 3 en 5 MeV/c^2 dus de energie van de quarks moet 927 MeV bedragen. Verwaarlozen we het verschil tussen de quarks (ga even uit van 3 up-quarks), dan is de energie per quark 309 MeV ≈ $5 \cdot 10^{-11}$ J.
Vullen we dit in in de energieput-formule, dan geeft dit

$$L_{\text{quark}} = \frac{h^2}{8m_{\text{quark}} L^2} \text{ dus } L = h\sqrt{\frac{1}{8m_{\text{quark}} E_{\text{quark}}}}$$

Invullen van $m_{\text{quark}} = 3$ MeV/$c^2 = 5 \cdot 10^{-30}$ kg en $E_{\text{quark}} = 511$ MeV $= 8 \cdot 10^{-11}$ J geeft een schatting van 10^{-14} m.
Een iets betere benadering houdt nog iets meer rekening met de relativiteitstheorie: de quarks in het proton hebben vrijwel de lichtsnelheid (wat te zien is aan het gegeven dat hun energie veel groter is dan mc^2). Dan geldt volgens de relativiteitstheorie niet meer
$E_{\text{quark}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$ maar $p \approx E/c$, zodat de energieput-formule verandert in
$E_{\text{quark}} = pc = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{2L}$
Dit resulteert in een schatting van 10^{-15} m voor de grootte van het proton.

© Noordhoff Uitgevers bv

41 a In grotere moleculen zal het vaak voorkomen dat sommige elektronen veel ruimte hebben en volgens het energieput-model resulteert dit in kleinere verschillen tussen de energieniveaus.

b Uitwerken van $\frac{h^2}{8m_e L^2} \approx 10^{-19}$ J resulteert in een lengte van ongeveer 10^{-9} m.

c Uitwerken van $\frac{h^2}{8m_p L^2} \approx 10^{-13}$ J resulteert in een lengte van ongeveer 10^{-14} m.

42 a Het molecuul met $k = 1$ heeft 8 π-elektronen. In ieder energieniveau passen 2 elektronen, zodat in de laagste energietoestand de vier onderste niveaus helemaal vol zijn.

b Voor het molekuul met $k = 1$ geldt $L = 1{,}2$ nm.

Invullen in $E_n = \frac{n^2h^2}{8m_e L^2}$ geeft dan

$E_4 = 16 \times 4{,}2 \cdot 10^{-20} = 6{,}7 \cdot 10^{-19}$ J
$E_5 = 25 \times 4{,}2 \cdot 10^{-20} = 10{,}5 \cdot 10^{-19}$ J
zodat het verschil gelijk is aan $3{,}8 \cdot 10^{-19}$ J (= 2,4 eV).

c $E_f = 3{,}8 \cdot 10^{-19}$ J dus $\lambda = \frac{hc}{E_f} = 5{,}2 \cdot 10^{-7}$ m

43 a Minimale totale energie houdt in dat er zoveel mogelijk elektronen in de laagste energieniveaus moeten zitten. Met twee elektronen per niveau is het resultaat:
$(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, \ldots) = (2, 2, 2, 1, 0, \ldots)$

b $E_1 = \frac{h^2}{8me\,L^2} = 3{,}8 \cdot 10^{-21}$ J

dus $E_{grond} = 3{,}8 \cdot 10^{-21}(2 \times 1^2 + 2 \times 2^2 + 2 \times 3^2 + 1 \times 4^2)$
$= 1{,}7 \cdot 10^{-19}$ J = 1,0 eV

c De eerste aangeslagen toestand is (2, 2, 2, 0, 1, ...), met een energie
$E = 3{,}8 \cdot 10^{-21}(2 \times 1^2 + 2 \times 2^2 + 2 \times 3^2 + 1 \times 5^2) =$
$2{,}0 \cdot 10^{-19}$ J = 1,2 eV.
$\Delta E = (53 - 44) \cdot 3{,}8 \cdot 10^{-21} = 3{,}42 \cdot 10^{-20}$ J
dus $\lambda = hc/\Delta E = 6 \cdot 10^{-6}$ m

44 Golflengten: gebruik van $\lambda = \frac{hc}{E_f}$ resulteert voor de gemeten golflengten in:
869 nm voor $k = 4$
1003 nm voor $k = 5$
Deze golflengten liggen in het IR en zorgen zodoende niet voor een zichtbare kleur van de stof.

45 Werkblad

19.5 Quantumtunnelen

46 a Er zitten 4 halve golflengten in de energieput, dus $n = 4$.

b De kans om het deeltje precies in het midden aan te treffen is nul, want het midden is een knoop en de amplitudo is daar nul. Er is wel een kans om het deeltje net buiten de doos aan te treffen, dus is die kans groter.

47 a Twee maal differentiëren van $A\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$

geeft $-\frac{4\pi^2 A}{\lambda^2}\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$.

Vermenigvuldigen met $-\frac{h^2}{8\pi^2 m}$ geeft dan

$\frac{h^2}{2m\lambda^2} A\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$.

Hierin is $\frac{h^2}{2m\lambda^2} = \frac{p^2}{2m} = E_k$

en $A\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = \psi(x)$, dus de hele uitdrukking is gelijk aan $E_k\,\psi(x)$.

b en c Uit de berekening bij a blijkt dat

$E_k\,\psi(x)\,A\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ met

$E - E_p = E_k = \frac{h^2}{2m\lambda^2}$ zo'n oplossing is, dus hij bestaat (en dezelfde functie maar met een negatief argument is er nog een). Isoleren van λ uit deze laatste formule geeft ook nog

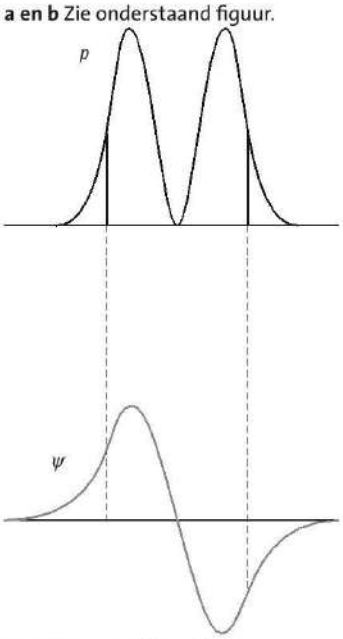
$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E - E_p)}}$$

d en e Twee maal differentiëren van $\psi(x) = Ae^{-\kappa x}$ geeft
$\psi''(x) = \kappa^2 Ae^{-\kappa x}$
Links en rechts vermenigvuldigen geeft
$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\psi'' = -\frac{h^2\kappa^2}{8\pi^2 m}\psi$
Hier staat een oplossing van de schrödingervergelijking als geldt dat

$$\kappa = \frac{2\pi}{h}\sqrt{-2m(E - E_p)}$$

Merk op dat $\psi(x) = Ae^{+\kappa x}$ ook een oplossing is. Deze is geschikt voor de andere kant van de energieput.

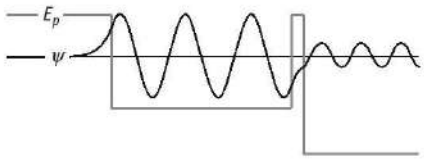
48 a en b Zie onderstaand figuur.



c Schatting: rond de 15%.

© Noordhoff Uitgevers bv

49 a en b
In figuur 19.38 is de potentiële energie buiten de energieput hetzelfde als binnen de put. Een deeltje dat door de energiebarrière heentunnelt heeft daarna dus dezelfde kinetische energie en dus dezelfde golflengte.
In figuur 19.39 is de potentiële energie buiten de put lager, dus heeft een ontsnappend deeltje een grotere kinetische energie en dus een kleinere golflengte.

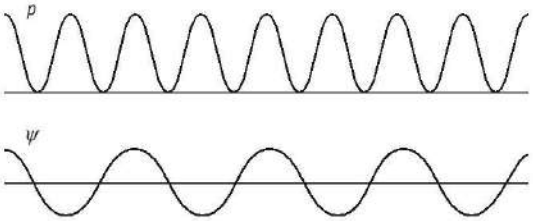
c


d De snelheid van het deeltje is buiten de put nu een stuk groter. De golf zal zich dus sneller uitbreiden in de ruimte buiten de put, zodat in minder tijd een groter deel van de waarschijnlijkheid buiten de put ligt.

50 a Dit heet alfa-verval.
b Alfa-straling, of alfa-deeltje, of heliumkern.
c De $t_{1/2}$ van U-238 is 4,5 miljard jaar; die van Po-214 160 µs.
d Hoe hoger en breder de wand des te groter de halveringstijd.

51 a De afstand tussen de punt en het preparaat is een barrière voor de elektronen waar de potentiële energie groter is dan de kinetische energie. De oplossing van de Schrödinger-vergelijking is dan een exponentieel afnemende functie (zie ook opdracht 47 d en e en figuur 19.37). De kans dat een elektron zich daar bevindt is dan ook exponentieel afnemend en derhalve de stroomsterkte ook.
b De grootte van de stroom is niet-lineair afhankelijk van de afstand tussen de punt en het preparaat. Als de hoogte constant gehouden wordt, moet hiervoor gecorrigeerd worden.
Het is eenvoudiger om de stroom constant te houden door de hoogte van de punt te variëren. De hoogte van de punt correspondeert direct met de hoogte van het preparaat.
Nog een reden is dat de kans nu kleiner is dat de punt het oppervlak raakt en daardoor beschadigd raakt.

52 a De ijzeratomen vormen een ring, die werkt als een soort spiegel voor de elektronen. Vanwege de cirkelsymmetrie zijn de staande elektrongolven nu cirkelvormig. Ze ontstaan uit interferentie van golven die vanuit het midden naar de rand gaan en daar weerkaatst worden naar het midden.
b In het midden van de cirkel zit een maximum.
c Aan het plaatje te zien lijkt er bij de rand, bij de ijzeratomen, een maximum, dus een buik te liggen. Tellen we die mee, dan komen we langs een lijn door het midden 9 buiken en 8 knopen tegen.
Tellen we in termen van cirkelvormige knooplijnen en buiklijnen, dan zijn er 4 knooplijnen en vier buiklijnen, plus een puntvormige buik in het midden.
d Van buik naar buik is telkens een halve golflengte. Langs de lijn door het midden tel je dus van links naar rechts dus acht halve, dus 4 hele golflengtes.
e De waarschijnlijkheid p wordt gevonden door de amplitudo van ψ te kwadrateren, zie onderstaand figuur.



f De elektronen die uit het oppervlak worden weggetrokken worden voortdurend aangevuld door elektronen die via de stroomkring naar het preparaat toestromen. De snelheid waarmee dit gebeurt is gelijk aan de tunnelstroom.

Toepassing

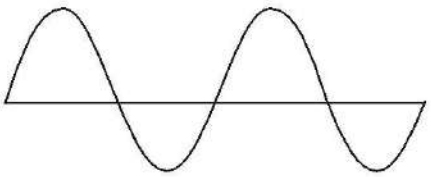
Opgave 1 Fluorescentiemicroscoop

1 Door de tussenstap(pen) in het terugvallen van de moleculen van de fluorescerende stof is de energie van de uitgezonden fotonen kleiner dan die van de fotonen waarmee de stof bestraald is. De frequentie is (volgens $E_f = hf$) dus lager, de golflengte (volgens $\lambda = c/f$) dus groter.
Het sperfilter zal dus grotere golflengtes doorlaten.

2 Invullen van $L = 9{,}8 \cdot 10^{-10}$ m in $E_n = \frac{n^2h^2}{8m_eL^2}$

geeft $E_n = n^2 \times 6{,}29 \cdot 10^{-29}$ J. Voor de overgang van $n = 3$ naar $n = 4$ geeft dit $\Delta E = 4{,}4 \cdot 10^{-19}$ J, zodat $f = E_f/h = 6{,}6 \cdot 10^{14}$ Hz.

3 $n = 4$:



In het midden zit bij $n = 3$ een buik, maar bij $n = 4$ een knoop. De kans het elektron in het midden aan te treffen verandert dus van maximaal (bij $n = 3$) in nul (bij $n = 4$).

© Noordhoff Uitgevers bv

4

E (in $h^2/8mL^2$)	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
28	2	2	2	0	0
35	2	2	1	1	0
40	2	1	2	1	0

E (in $h^2/8mL^2$)		
40	$2 \times 1^2 + 1 \times 2^2 + 2 \times 3^2 + 1 \times 4^2 = 40$	klopt
35	$2 \times 1^2 + 2 \times 2^2 + 1 \times 3^2 + 1 \times 4^2 = 35$	klopt
28	$2 \times 1^2 + 2 \times 2^2 + 2 \times 3^2 = 28$	klopt

5 Als $E = 12h^2/8mL^2$ dan wordt een elektron vanuit de grondtoestand aangeslagen naar het derde niveau. Het kan dan direct terugvallen naar de grondtoestand of via het tweede niveau naar de grondtoestand. Dat geeft 3 verschillende frequenties.

Opgave 2 Neutronenverstrooiing

6 Neutronen zijn neutraal. Daardoor verliezen ze alleen energie bij een botsing met een kern. De kans daarop is klein.

7 De golffunctie van een neutron is beperkt tot de kern, maar die van een elektron heeft ongeveer de omvang van het atoom. Als een röntgenfoton interactie heeft met een elektron is de positie waar dit plaatsvindt dus veel minder scherp bepaald dan de positie van de kern waar het neutron mee botst.

8 $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = 4{,}0 \cdot 10^{-8}\ \text{m} = 40\ \text{nm}$

9 Volgens de gegevens in *Binas* zijn bacteriën van de orde van 1 µm en is de molecuulstructuur van DNA van de orde van 1 nm. Een golflengte van $4 \cdot 10^{-8}$ m is te groot voor het onderzoeken van DNA, en klein genoeg om structuur te zien in een bacterie.

10 Gebruik van de energieput-formule geeft:

$$E_k = \frac{(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)h^2}{8mL^2}$$

$$= \frac{3n^2h^2}{8mL^2} = 8{,}0 \cdot 10^{-26}\ \text{J}$$

dus:

$$n = \sqrt{\frac{8mL^2E_k}{3h^2}}$$

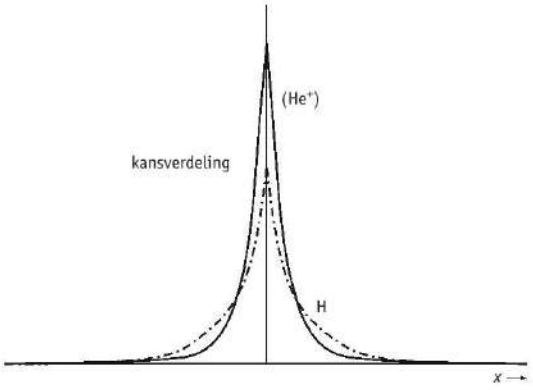
$$\sqrt{\frac{8 \times 1{,}67 \cdot 10^{-27} \times 0{,}10^2 \times 8{,}0 \cdot 10^{-26}}{3 \times (6{,}63 \cdot 10^{-34})^2}}$$

$$= 2{,}9 \cdot 10^6$$

Opgave 3 Geïoniseerd helium

11 De energiewaarden van helium zijn allemaal een factor 4,00 groter dan die van waterstof.
Dit wordt met de formule verklaard door het atoomgetal Z, dat een waarde 1 heeft voor waterstof en 2 voor helium, en dat in de formule kwadratisch voorkomt.

12 De kansverdeling in het heliumion is hoger en smaller:



13 Figuur 19.51 heeft 3 maxima. Dit komt overeen met de golffunctie met $n = 3$ in figuur 19.52.
(Bedenk hierbij dat de golffunctie gekwadrateerd moet worden om de kansverdeling te krijgen.)

Opgave 4 Quantumdots

14 L_x en L_y zijn even groot, zodat het in de formule voor de energie niet uitmaakt of n_x of n_y toeneemt. L_z is echter 10 × zo klein, zodat een toename van n_z een 100 × zo grote invloed op de energie heeft als eenzelfde toename van n_x of n_y.

15 De laagste frequentie hoort bij de overgang $(2, 1, 1) \rightarrow (1, 1, 1)$ (maar wegens de x,y-symmetrie geeft $(1, 2, 1) \rightarrow (1, 1, 1)$ hetzelfde resultaat).
Invullen geeft

$$\Delta E = (2^2 - 1^2)\frac{h^2}{8m_e L_x^2} = 1{,}80 \cdot 10^{-21}\ \text{J}$$

(want de bijdragen van p_x en p_y blijven gelijk) dus

$$f = \frac{\Delta E}{h} = 2{,}72 \cdot 10^{12}\ \text{Hz}$$

16 Invullen in de energieput-formule geeft:

$$E_k = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2}\right)$$

$$= \frac{h^2}{8m}\left(\frac{1}{1{,}0 \cdot 10^{-16}} + \frac{1}{1{,}0 \cdot 10^{-16}} + \frac{4}{1{,}0 \cdot 10^{-18}}\right)$$

$$= 2{,}4 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

© Noordhoff Uitgevers bv

17 Mogelijkheid 1:

toestand (n_x, n_y, n_z)	aantal elektronen
(1, 1, 1)	2
(2, 1, 1)	2
(1, 2, 1)	1

Mogelijkheid 2:

toestand (n_x, n_y, n_z)	aantal elektronen
(1, 1, 1)	2
(2, 1, 1)	1
(1, 2, 1)	2

De elektronen hebben in totaal minimale energie, maar er passen slechts twee elektronen in (1, 1, 1). Er moeten dus nog drie elektronen worden verdeeld over (2, 1, 1) en (1, 2, 1). Omdat deze toestanden dezelfde energie hebben zijn beide bovenstaande configuraties mogelijk.

Opgave 5 Caroteen

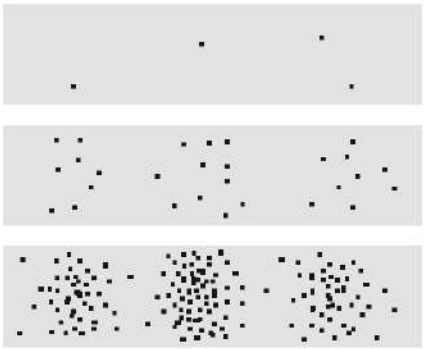
18 Een groot deel van het licht met golflengten beneden de ~500 nm wordt geabsorbeerd, dat wil zeggen de blauwe kleur wordt weggefilterd. Wat overblijft zijn de langere golflengten, dat wil zeggen in het rood tot groen. Samen geeft dit oranje.

19 Met 22 elektronen zijn de eerste 11 energietoestanden volledig bezet. De minimale energie die nodig is om een elektron aan te slaan komt dus overeen met een overgang van $n = 11$ naar $n = 12$.

20 Voor de overgang $n = 11 \rightarrow n = 12$ geldt:
$\Delta E = (12^2 - 11^2)\, h^2/8mL^2$ en invullen van de gegevens geeft dan $L = 1{,}77 \cdot 10^{-9}$ m.

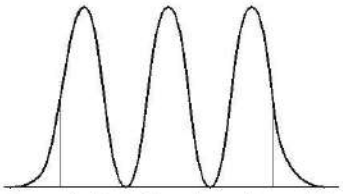
Proefwerkopgaven

1 a Bijvoorbeeld:



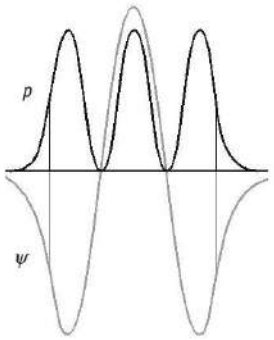
b Er bevindt zich steeds maar één enkel elektron in de opstelling. Toch ontstaat er op den duur een interferentiepatroon dat wijst op golfgedrag. Dit wijst er inderdaad op dat ieder elektron op zich golfgedrag vertoont.

2 a Zie onderstaand figuur.



b Oppervlakte buiten de rand vergelijken met het totaal → rond of iets meer dan 10%; zeg 12 ± 3%.

c



d Invullen van $n = 3$ en verdere gegevens geeft:

$$E_3 = \frac{n^2h^2}{8mL^2}$$

$$= \frac{3^2 \times (6{,}63 \cdot 10^{-34})^2}{8 \times 1{,}01 \times 1{,}66 \cdot 10^{-27} \times (1{,}50 \cdot 10^{-9})^2}$$

$$= 1{,}31 \cdot 10^{-22} \text{ J}$$

3 a Gegevens vlieg, huis- (*Binas* tabel 96):
$m = 150 \cdot 10^{-6}$ kg, $v_{max} = 2$ m/s.

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{150 \cdot 10^{-6} \times 2} = 2 \cdot 10^{-30} \text{ m}$$

b Gebruik van $E = hf$, met $E = \frac{1}{2}mv^2 = 3 \cdot 10^{-4}$ J geeft:

$$f = \frac{E}{h} = \frac{3 \cdot 10^{-4}}{6{,}63 \cdot 10^{-34}} = 5 \cdot 10^{29} \text{ Hz}$$

c Uit gebruik van $E_n = \frac{n^2h^2}{8mL^2}$ met $n = 1$ voor de nulpuntsenergie volgt dat een kleinere lengte resulteert in een grotere bijdrage aan de nulpuntsenergie.

d Invullen geeft $5{,}9 \cdot 10^{-65}$ J.

e Uit de onbepaaldheidsrelatie volgt:

$$\Delta p \geq \frac{h}{4\pi\Delta x} \text{ met } \Delta x = 2{,}5, \text{ zodat } \Delta p \geq 2 \cdot 10^{-35}$$

p zelf moet dus ook minimaal van de orde van 10^{-35} kg·m·s^{-1} zijn, zodat E een minimale waarde krijgt van ruim 10^{-66} J. Dit komt iets minder dan 2 ordes van grootte kleiner uit dan het resultaat van d.

© Noordhoff Uitgevers bv

4 **a** Gebruik van $E_n = \frac{n^2h^2}{8mL^2}$ met $n = 1$ geeft een energie van $3{,}8 \cdot 10^{-19}$ J per elektron en $7{,}6 \cdot 10^{-19}$ J voor twee elektronen.

b $\Delta E = (2^2 - 1^2) \times E_1 = 1{,}1 \cdot 10^{-18}$ J

c $f = \Delta E/h = 1{,}7 \cdot 10^{15}$ Hz en $\lambda = c/f = 1{,}8 \cdot 10^{-7}$ m.

d Invullen geeft als resultaat dat de energie per elektron in de grondtoestand $4\times$ zo klein wordt, ofwel $9{,}4 \cdot 10^{-20}$ J. In deze toestand E_1 passen twee elektronen.
Energieniveau E_2 heeft een $4\times$ zo hoge waarde, ofwel $3{,}8 \cdot 10^{-19}$ J per elektron en daarin zitten de overige twee elektronen.
Totale energie:
$2 \times 9{,}4 \cdot 10^{-20} + 2 \times 3{,}8 \cdot 10^{-19} = 9{,}5 \cdot 10^{-19}$ J
De oorspronkelijke energie van de vier elektronen was $4 \times 3{,}8 \cdot 10^{-19} = 1{,}5 \cdot 10^{-18}$ J. Er is dus bij de reactie iets minder dan $6 \cdot 10^{-19}$ J vrijgekomen.

5 **a** De energie per foton is gelijk aan $E_f = hc/\lambda = 4{,}97 \cdot 10^{-19}$ J. Het aantal fotonen is dus $N = 5{,}00 \cdot 10^{-10} / 4{,}97 \cdot 10^{-19} = 1{,}01 \cdot 10^9$.

b Dit is violet licht (*Binas* tabel 19A).

c Als licht in dit experiment een golfkarakter zou hebben zouden bij voldoende lichtintensiteit altijd (bij elke golflengte) elektronen vrijkomen. Dat dit bij rood licht niet gebeurt is te verklaren door aan te nemen dat licht uit deeltjes (fotonen) bestaat die bij violet licht voldoende en bij rood licht te weinig energie hebben om een elektron los te maken.

d $E = 120$ keV $= 1{,}92 \cdot 10^{-14}$ J.
Dan is:
$p = \sqrt{2mE} = \sqrt{2 \times 9{,}11 \cdot 10^{-31} \times 1{,}92 \cdot 10^{-14}}$
$= 1{,}87 \cdot 10^{-22}$ kg · m/s
zodat

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{1{,}87 \cdot 10^{-22}} = 3{,}5 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

Dit is ruim een orde van grootte kleiner dan de bohr-straal (die een soort maat geeft van de grootte van een atoom).

© Noordhoff Uitgevers bv

Hoofdstuk 20
Speciale relativiteitstheorie

Introductie

1 Voor de voorbeelden uit de introductie:

versneller	*energie*
radiobuis	$\sim 10^2$ eV
tv-beeldbuis	$\sim 10^4$ eV
elektronenmicroscoop	$\sim 10^5$ eV
protonentherapie	$\sim 10^8$ eV
CERN	$\sim 10^{12}$ eV

2 $1{,}0 \cdot 10^8$ m/s
De energie die het elektron dan krijgt is gelijk aan
30 keV = $30 \cdot 10^3 \times 1{,}602 \cdot 10^{-19} = 4{,}806 \cdot 10^{-15}$ J.

Voor de snelheid geldt dan: $E_k = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{E_k}{\frac{1}{2}m}}$

$v = \sqrt{\frac{4{,}806 \cdot 10^{-15}}{\frac{1}{2} \times 9{,}109 \cdot 10^{-31}}} = 1{,}0 \cdot 10^8$ m/s.

3 **a** eV is een eenheid voor energie. De eenheid van

eV/c^2 is dan: $\frac{\text{J}}{(\frac{\text{m}}{\text{s}})^2} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}} = \text{kg}$

b $1{,}78 \cdot 10^{-36}$ kg
1 eV/c^2 is dan gelijk aan:
$\frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}}{(2{,}998 \cdot 10^8)^2} = 1{,}78 \cdot 10^{-36}$ kg

4 **a** 99,99% van de lichtsnelheid
E_k = 50 GeV zodat uit $E_k = (\gamma - 1)mc^2$ volgt
$50 \cdot 10^9 = (\gamma - 1) \times 511 \cdot 10^3$
Dit levert $\gamma = 9{,}785 \cdot 10^4$ zodat
$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0{,}999999995c$
Het procentuele verschil met de lichtsnelheid is dan $5 \cdot 10^{-9}$%.

b Het proton heeft een massa die ongeveer 2000 zo groot is als die van het elektron. Daardoor is $(\gamma - 1)$ 2000 keer zo klein zodat $\gamma \equiv 50$ en levert een snelheid op van 99,98% van de lichtsnelheid.
Het procentuele verschil met de lichtsnelheid is dan 0,02%.

c In Hoofdstuk 19 heb je geleerd dat de kleinste structuur die nog waargenomen kan worden ongeveer gelijk is aan de golflengte van het deeltje dat je gebruikt om waar te nemen.
De golflengte van deze elektronen is gelijk aan

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \times 2{,}998 \cdot 10^8}{8{,}01 \cdot 10^{-9}} = 2{,}48 \cdot 10^{-17} \text{ m}.$$

In theorie zouden structuren met een afmeting in de orde van grootte van 10^{-17} m nog waargenomen kunnen worden. Vergelijk dit met de afmeting van een atoomkern; die is in de orde van grootte van 10^{-15} m.

20.1 De lichtsnelheid

1 **a** Volgens het principe van Fermat neemt licht de snelste route van A naar B. In figuur 20.5 is te zien dat de afstand die in lucht afgelegd wordt groter is dan de afstand in glas. Als dit de snelste route moet zijn, dan moet de snelheid in lucht dus groter zijn dan de snelheid in glas.

b Als de lichtsnelheid oneindig groot was, dan zou er geen snelste weg zijn; alle wegen waren dan even snel en dan zou het licht elke willekeurige weg kunnen volgen.

2 **a** 499,0 s
De afstand van de zon tot de aarde is $149{,}6 \cdot 10^6$ km.
Het licht doet daar dan

$$t = \frac{149{,}6 \cdot 10^9}{299792458} = 499{,}0 \text{ s over.}$$

Dat is 8 minuten en 19 seconden.

b De afstand tot Proxima Centauri is is $4{,}0 \cdot 10^{13}$ km.
Dit is een factor $\frac{4{,}0 \cdot 10^{13}}{149{,}6 \cdot 10^6} = 2{,}67 \cdot 10^5$ maal zo ver.
Het licht doet daar dan
$2{,}67 \cdot 10^5 \times 499{,}0 = 1{,}33 \cdot 10^8$ s over.
Dat is 4,23 jaar.

3 **a** In 24 uur legt de zon 360° af ten opzichte van een vast punt op aarde. In 8 minuten en 19 seconden is dat $\frac{499}{3600 \times 24} \times 360° = 2{,}1°$.

b Dat is circa 4 keer de diameter van de zon.

4 **a** Belangrijke factoren zijn de ontvangst (hoe sterk is het signaal van elke satelliet), de hoeveelheid satellieten die er ontvangen worden en de omgeving. In een stad is een nauwkeurige plaatsbepaling vaak lastig vanwege de vele gebouwen.

b Voor een goede plaatsbepaling maakt een verschil van enkele meters in horizontale richting niet veel uit. Voor een goede landing is een nauwkeurige bepaling in de hoogte – minder dan een meter – echter essentieel.

5 Pulsje

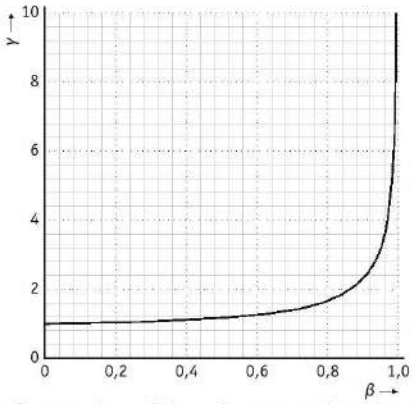
6 De snelheid van licht in water is kleiner dan in lucht. Dat komt vanwege de interactie met de elektronen die in water in veel grotere mate voorkomen (circa 1000×) dan in lucht. In water dat tegen het licht instroomt passeert het licht meer elektronen dan in water dat in dezelfde richting als het licht stroomt. Er ontstaat daardoor een faseverschil tussen beide lichtbundels.

© Noordhoff Uitgevers bv

7 circa 4 m/s
De zijkant van de opstelling is 2 meter, dan is de onderlinge afstand van de spiegels 2,8 m. De spiegels weerkaatsen de lichtbundels 8 keer, zodat de weglengte L ≈ 22,6 m. Met een golflengte van 600 nm volgt dan voor de snelheid bij het optreden van een faseverschil van een ½, dat $v = \frac{1}{2}\frac{\lambda c}{L} \approx 4$ m/s.

20.2 Lengte en tijd

8 a



b Aflezen in de grafiek geeft een waarde van ongeveer 0,85. Dit kunnen we controleren met een berekening:
$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \rightarrow \beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = 0{,}87$

c Aflezen in de grafiek geeft een waarde voor γ van ongeveer 3.
Controle: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{1-0{,}95^2} = 3{,}2$

9 a In het stelsel van de trein kost het de conducteur $\Delta t' = \frac{45}{1{,}5} = 30$ s.

b De relatieve snelheid tussen de trein en Hans is 140 km/h = 38,89 m/s.
Er geldt $\beta = \frac{v}{c} = \frac{38{,}89}{2{,}998 \cdot 10^8} = 1{,}30 \cdot 10^{-7}$.

c Met de formule $t = \gamma t' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot t'$ volgt:

$t = \frac{1}{\sqrt{1-(1{,}30 \cdot 10^{-7})^2}} \times 30$. Invullen in je rekenmachine geeft dan $t = 30$ s!

d $\Delta t = \gamma \Delta t'$ met $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \equiv \frac{1}{1-\frac{1}{2}\beta^2} \equiv \left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right)$

zodat $\Delta t = \left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right) \cdot \Delta t'$

e $2{,}5 \cdot 10^{-13}$ s
$\Delta t = \left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right) \cdot \Delta t' = \Delta t' + \frac{1}{2}\beta^2 \Delta t'$
$\Delta t - \Delta t' = \frac{1}{2}\beta^2 \Delta t' = \frac{1}{2} \times (1{,}30 \cdot 10^{-7})^2 \times 30$ s
Het tijdsverschil is dus $\Delta t - \Delta t' = 2{,}5 \cdot 10^{-13}$ s.
Dat is een kleiner tijdsverschil dan met de tot nu toe nauwkeurigste klok gemeten kan worden.

10 a $2{,}63 \cdot 10^{-3}$ s
De satelliet draait rondjes met een straal van 20240 + 6371 = 26611 km. De snelheid van de satellieten is dan $v = \frac{2\pi \times 26611 \cdot 10^3}{12 \times 3600} = 3{,}870 \cdot 10^3$ m/s.
De waarde van β is $\beta = \frac{v}{c} = 1{,}291 \cdot 10^{-5}$.
Het verschil in tijd die 1 s duurt is dan:
$\Delta t = \left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right) \cdot \Delta t' = \Delta t' + \frac{1}{2}\beta^2 \Delta t'$
$\Delta t - \Delta t' = \frac{1}{2}\beta^2 \Delta t' = \frac{1}{2} \times (1{,}291 \cdot 10^{-5})^2 \times 1$
$\Delta t - \Delta t' = 8{,}333 \cdot 10^{-11}$ s
Over een jaar gemeten betekent dit dan dat de klok in de satelliet achterloopt met:
$365 \times 24 \times 3600 \times 8{,}333 \cdot 10^{-11} = 2{,}63 \cdot 10^{-3}$ s.

b 788 km
De tijdsduur tussen het ontvangen en verzenden kan dus een fout hebben van $2{,}63 \cdot 10^{-3}$ s. De signalen gaan met de snelheid van het licht. Dat betekent dat de gemeten afstand een fout kan hebben van ongeveer $2{,}63 \cdot 10^{-3} \times 2{,}998 \cdot 10^8 = 7{,}88 \cdot 10^5$ m, dus 788 km!

11 3,00 miljard jaar
$\beta = 0{,}976$ volgt dat $\gamma = 4{,}59$. Stel dat de tijd die in het sterrenstelsel sinds haar ontstaan bij de Big Bang is verstreken $\Delta t'$. Op aarde is de tijd die verstreken is sinds het ontstaan van het heelal 13,8 miljard jaar. Dit is Δt. Rekening houdend met de tijdrek volgt uit $\Delta t = \gamma \Delta t'$ dat $\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{13{,}8}{4{,}59} =$ 3,00 miljard jaar.

12 Pulsje

13 a 660 m
De muonen kunnen niet harder gaan dan de lichtsnelheid. De afstand die ze dan maximaal kunnen afleggen voor ze vervallen is dan $x = v \cdot t = 2{,}998 \cdot 10^8 \times 2{,}2 \cdot 10^{-6} = 660$ m.

b $\gamma\beta = 15{,}2$
Er moet gelden: $v \cdot t = 10{,}0$ km.
Hierbij is de $v (= \beta c)$ de snelheid van het muon en Δt de, op aarde gemeten, levensduur van het muon.
Hiervoor geldt: $\Delta t = \gamma \cdot \Delta t'$ waarbij $\Delta t'$ de levensduur van het muon in z'n eigen stelsel. Dus $\Delta t' = 2{,}20\ \mu$s.
Er geldt dus: $10{,}0 \cdot 10^3 = \beta \cdot c \cdot \gamma \cdot \Delta t'$ zodat

$$\beta \cdot \gamma = \frac{10{,}0 \cdot 10^3}{c \cdot \Delta t'} = \frac{10{,}0 \cdot 10^3}{2{,}998 \cdot 10^8 \times 2{,}20 \cdot 10^{-6}} = 15{,}2.$$

c $\gamma\beta$ kan alleen een waarde hebben die veel groter is dan 1 als γ veel groter dan 1 is. Dan is $\beta \cong 1$.

d Omdat $\beta \cong 1$ is $\gamma \cong 15{,}2$.

e Dan is $\beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = 0{,}998$.
De muonen moeten dus minimaal een snelheid $v = 0{,}998c$ hebben.

14 a De muonen hebben een halveringstijd van 1,50 μs. Het aantal muonen loopt terug van 100 per seconde naar 25 muonen per seconde. Dat betekent dat het aantal muonen tweemaal is gehalveerd; er is een tijd van 3,00 μs verstreken in het stelsel van de muonen.

b $0{,}984c$
Aangezien de muonen ten opzichte van een waarnemer op de grond bewegen, heeft de tijd van 3,00 μs voor die waarnemer een andere waarde.
Voor deze tijd geldt: $\Delta t = \gamma \cdot \Delta t'$ waarbij $\Delta t'$ de tijd is gezien vanuit het muon zelf, dus
$\Delta t' = 3{,}00\ \mu$s.
Er moet gelden: $v \cdot t = 5{,}0 \cdot 10^3$ m.
Er geldt $\Delta t = \gamma \cdot \Delta t'$ met $\Delta t' = 3{,}00\ \mu$s.
zodat $5{,}0 \cdot 10^3 = \beta \cdot c \cdot \gamma \cdot \Delta t'$ en

$$\beta \cdot \gamma = \frac{5{,}0 \cdot 10^3}{c \cdot \Delta t'} = \frac{5{,}0 \cdot 10^3}{2{,}998 \cdot 10^8 \times 3{,}00 \cdot 10^{-6}} = 5{,}56$$

© Noordhoff Uitgevers bv

$\gamma\beta$ kan alleen een waarde hebben die veel groter is dan 1 als γ veel groter dan 1 is. Dan is $\beta \cong 1$ en volgt $\gamma \cong 5{,}6$. Dan is $\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0{,}984$.

c Uit $\gamma\beta = \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = 5{,}56$ volgt na omschrijven

$\beta = \dfrac{5{,}56}{\sqrt{1 + 5{,}56^2}} = 0{,}984$.

De muonen hebben dus een snelheid $v = 0{,}984c$.

15 $1{,}64 \cdot 10^{-14}$ s

Het deeltje legt 1,1 mm af met een snelheid van $0{,}99999c$. Volgens ons doet het deeltje daar dan

$$\Delta t = \frac{x}{v} = \frac{1{,}1 \cdot 10^{-3}}{0{,}99999 \times 2{,}998 \cdot 10^8} = 3{,}669 \cdot 10^{-12} \text{ s over.}$$

In het stelsel van het deeltje is dit:
$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \Delta t \sqrt{1-\beta^2} = 1{,}64 \cdot 10^{-14}$ s.

16 $0{,}735c$

Vanwege de tijdrek is de gemiddelde levensduur $\gamma\Delta t$. De snelheid van het deeltje is $v = \beta c$. Met een afstand van 1,3 km volgt dan
$1{,}3 \cdot 10^3 = v \cdot \Delta t = \gamma \cdot \beta c \cdot \Delta t' =$
$\gamma \cdot \beta \times 2{,}998 \cdot 10^8 \times 4{,}0 \cdot 10^{-6}$
zodat $1{,}084 = \gamma \cdot \beta = \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Hieruit volgt dat $\beta = 0{,}735$. Dus $v = 0{,}735c$.

17 a $6{,}427 \cdot 10^{-10}$ m

Voor lengtekrimp geldt: $x' = \gamma \cdot x$ waarin x' hier de afstand is volgens de auto en x de afstand voor een stilstaande waarnemer.

De krimpfactor is $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ met $\beta = \dfrac{\frac{1223{,}657}{3{,}6}}{2{,}998 \cdot 10^8}$

$= 1{,}133772 \cdot 10^{-6}$. Dit geeft in je rekenmachine een krimpfactor van 1,0. We kunnen dus niet eerst de krimpfactor uitrekenen. De aanpak is analoog aan opdracht 10 waarin we zagen dat voor kleine waarden van β, $\gamma \cong \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right)$.
De formule voor lengtekrimp, $x' = \gamma x$ kunnen we dus vervangen door $x' = \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right)x$. Het lengteverschil is dan:
$x' - x = \frac{1}{2}\beta^2 x = \frac{1}{2} \times (1{,}133772 \cdot 10^{-6})^2 \times 1000$
$= 6{,}427 \cdot 10^{-10}$ m.

b Een atoom heeft een orde van grootte van 10^{-10} m. De afstand wordt dus ongeveer een 'atoomlengte' korter.

18 $v = 2{,}98 \cdot 10^8$ m/s

Met $x' = \frac{x}{\gamma}$ volgt dat de krimpfactor gelijk moet zijn aan $\gamma = 10$.
$10 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \rightarrow \sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{10}$

$1 - \beta^2 = \frac{1}{100}$
$\beta^2 = 1 - \frac{1}{100} \rightarrow \beta = 0{,}995$ dus $v = 2{,}98 \cdot 10^8$ m/s

19 a De snelheid van het proton volgt uit:
$E_k = (\gamma - 1)\,mc^2$ met $E_k = 3{,}5 \cdot 10^{12}$ eV en de massa van het proton $m = 938{,}3 \cdot 10^6$ eV.
$\gamma - 1 = \frac{3{,}5 \cdot 10^{12}}{938{,}3 \cdot 10^6}$ zodat $\gamma = 3731$

Hieruit volgt dat $\beta \cong 1$, oftewel een snelheid die bijna gelijk is aan c.

b 7,24 m

De versneller heeft een omtrek van 27 km. Voor het proton wordt dit echter kleiner met een factor die gelijk is aan de krimpfactor.
Voor het proton is de omtrek dan $\frac{27 \cdot 10^3}{3731} = 7{,}24$ m.

c $8{,}4 \cdot 10^{-4}$

Voor het proton blijft de straal van de versneller ongewijzigd, maar de omtrek neemt met een factor 3731 af. En dus wordt ook π met dezelfde factor kleiner: $\pi' = \frac{\pi}{3731} = 8{,}4 \cdot 10^{-4}$.

20.3 Het Minkowskidiagram

20 a Dezelfde afstand in langere tijd dus minder snel.

b De rode lijn stelt een beweging voor van een deeltje dat in 5 seconden (of jaar) 2 lichtseconden (of lichtjaar) aflegt. De snelheid is dan 0,4 keer de lichtsnelheid: $0{,}4c$.

21 a A = 3; B = 2; C = 4; D = 1

b dezelfde helling

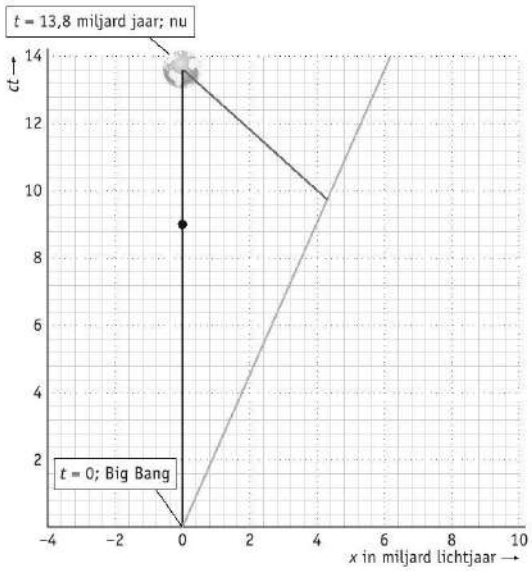
c Omdat de assen dezelfde eenheid hebben geeft de verhouding x-as en de ct-as de snelheid in fracties van de lichtsnelheid.

d $\beta = \frac{1 \text{ lichtseconde}}{(5-1)\text{seconde}} = 0{,}25c$

e De hoek is 14°. En tan(14) = 0,25. De tangens levert de snelheid uitgedrukt in de lichtsnelheid.

22 De snelheid van $2 \cdot 10^5$ km/s is 0,667 keer de lichtsnelheid. Dan is de tangens van de hoek met de ct-as ook 0,667. Die hoek is dan 33,7°. Dit geldt voor lijn B.

23 a,d



b 6 miljard lichtjaar

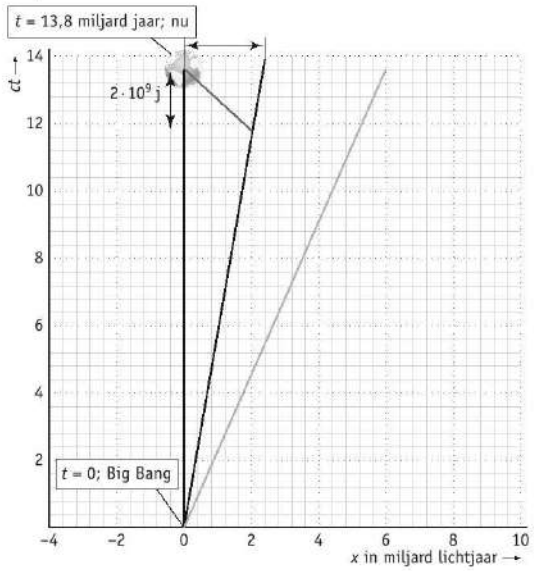
c $v = \frac{6}{13{,}8} = 0{,}435 \cdot c = 1{,}3 \cdot 10^8$ m/s

d lijn onder een hoek van 45°

e circa 4,2 miljard jaar

© Noordhoff Uitgevers bv

24 a,b



c circa 2,4 miljard lichtjaar

d $v = \frac{2}{11{,}8} = 0{,}17 \cdot c = 0{,}51 \cdot 10^8$ m/s

25 a Aflezen uit het diagram: 7 miljard jaar. Of eventueel de helft van de leeftijd van het heelal: 6,9 miljard jaar.

b $\beta = 0{,}976$

c 1,50 miljard jaar

1e methode:

Uit $\beta = 0{,}976$ volgt $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 4{,}59$. Dan is de leeftijd van het sterrenstelsel op de foto $\frac{7}{\gamma} = 1{,}5$ miljard jaar.

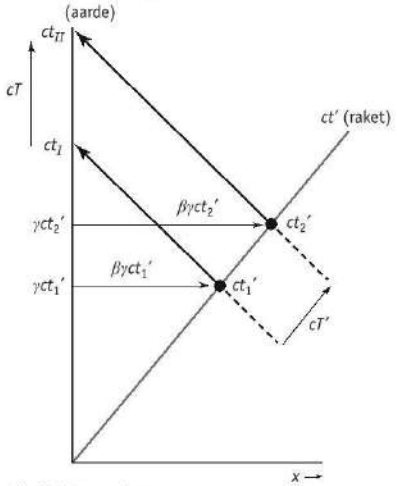
2e methode:

De huidige leeftijd van het sterrenstelsel is $\frac{13{,}8}{\gamma} = 3{,}00$ miljard jaar. De fotonen werden op ongeveer de helft van deze leeftijd uitgezonden: dus toen het stelsel 1,50 miljard jaar oud was.

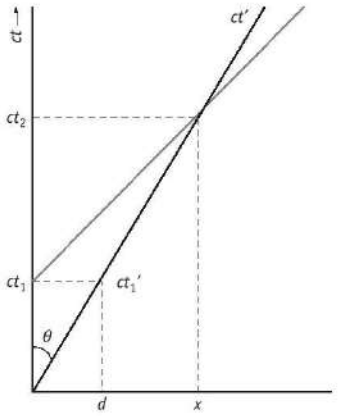
26 a Uit $\beta = 0{,}6$ volgt dat $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}6^2}} = 1{,}25$.

b Vanwege de tijdrek is de periode op aarde $\Delta t = \gamma \cdot \Delta t' = 1{,}25 \times 20 = 25$ d

c



27 a



b $t_1 = \frac{d}{v} = \frac{d}{\beta c}$

c $t_1 = \gamma t_1'$ zodat $t_1' = \frac{d}{\gamma\beta c}$

d Als het foton de auto passeert hebben ze dezelfde afstand afgelegd.
De auto legt een afstand $x = vt_2 = \beta c t_2$ af.
Voor het foton is dat $x = c(t_2 - t_1)$

zodat $t_2 - t_1 = \beta t_2 \rightarrow t_2 = \frac{t_1}{1-\beta} = \frac{d}{c} \cdot \frac{1}{\beta(1-\beta)}$.

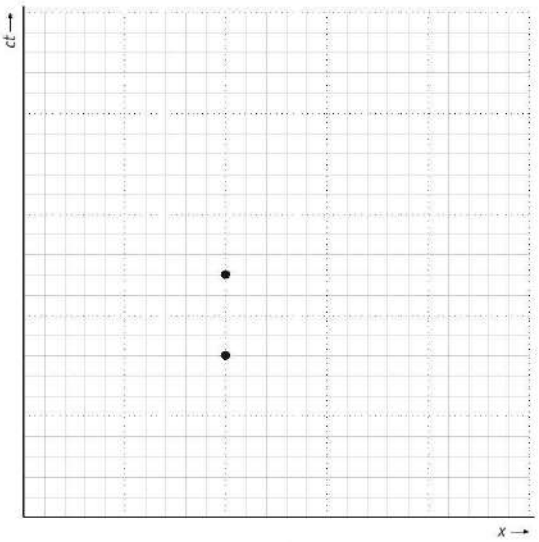
e $\beta = 0{,}5$
Uit de formule in d valt op te maken dat t_2 minimaal wordt als $\beta(1-\beta)$ maximaal is. Dat is het geval als $\beta = 0{,}5$ (afgeleide = 0; top parabool).

28 a Het licht dat van de springer komt die het verst van de jury verwijderd is doet er langer over om bij de jury te komen.

b De springer die het dichtst bij de jury in het water komt.

c De springer die dichter bij de jury in het water komt moet net iets later springen.

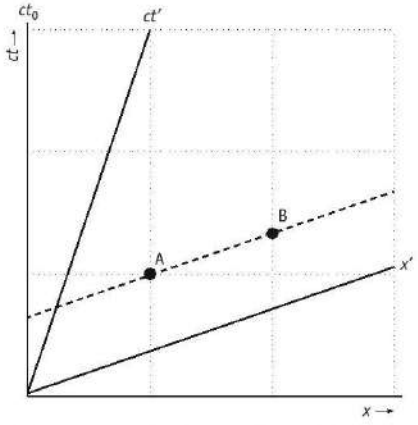
29



Het is onmogelijk om een stelsel te vinden waar de gebeurtenissen in een andere volgorde plaatsvinden.

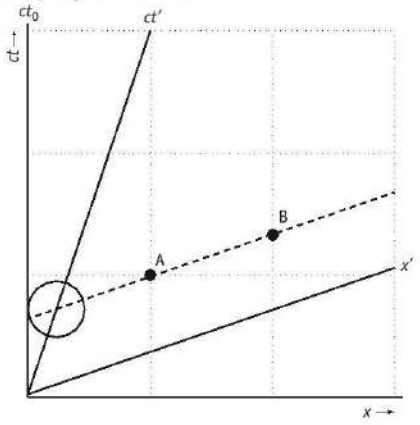
© Noordhoff Uitgevers bv

30 a,b

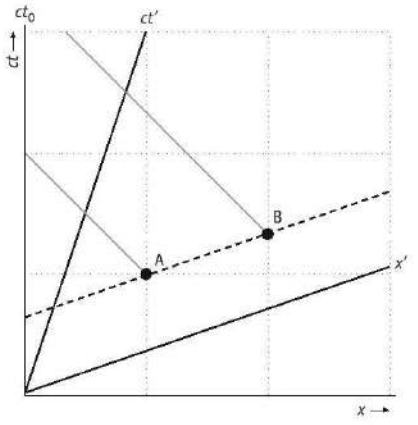


Voor het sterrenstelsel vinden de explosies gelijktijdig plaats omdat de lijn AB evenwijdig is met de x'-as.

c Het centrum is bij $x' = 0$; dus op het snijpunt van de stippellijn en de ct'-as.



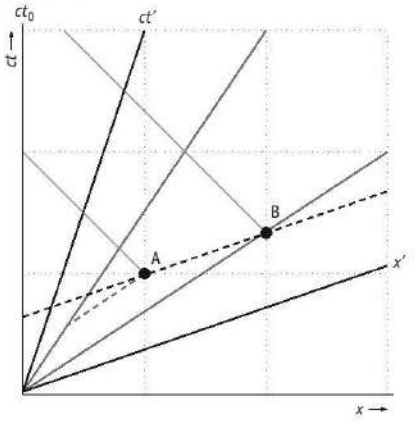
31 a,b



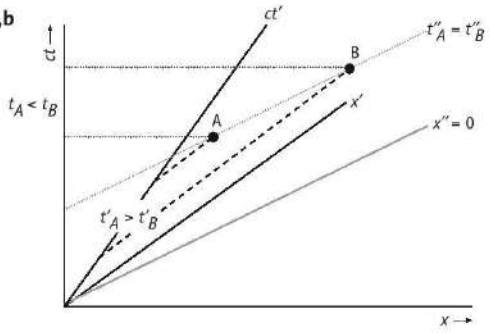
b Waarnemen betekent dat het licht van de explosie het stelsel bereikt. Het licht wordt weergegeven met de groene lijnen in de figuur.
De explosie van ster A wordt het eerst waargenomen.

c Op aarde wordt ook eerst de explosie van ster A waargenomen, dan die van ster B.

d We kunnen een stelsel vinden waar de beide explosies in een andere volgorde plaatsvinden maar het licht dat van de explosies komt zorgt voor de waarneming van de explosies. Te zien is dat we ook hier weer explosie A eerst waarnemen, en dan explosie B.



32 a,b



c De gebeurtenissen A en B vinden gelijktijdig plaats in een stelsel waarvan de x''-as evenwijdig is met de verbindingslijn AB. De snelheid van dat stelsel is dan $\beta c = \tan(30) \cdot c = 0{,}58c$. Voor elke snelheid groter dan $0{,}58c$ is de tijdsvolgorde omgekeerd.

33 Omdat de schaduw een situatie laat zien van voor het moment dat de kogel werd afgeschoten, zijn de fotonen die het trekken van de revolver en het schieten laten zien nog onderweg. Als het gat door de kogel veroorzaakt is, zou de kogel sneller gaan dan het licht. En dat kan niet. Daarom kan het gat niet door de kogel gemaakt zijn.

20.4 De lorentztransformaties

34 De lorentztransformaties zijn: $x = \gamma(x' + \beta ct')$ en $ct = \gamma(ct' + \beta x')$.
Voor de oorsprong van het bewegende stelsel geldt: $ct' = x' = 0$. Als je dit invult in de lorentztransformaties dan krijg je:
$x = \gamma(0 + 0) = 0$ en $ct = \gamma(0 + 0) = 0$. Dit betekent dat het overeenkomt met het punt $x = 0$ en $ct = 0$ in het ruststelsel, oftewel de oorsprong.

© Noordhoff Uitgevers bv

35 a De lorentztransformaties zijn afgeleid door aan te nemen dat het bewegende stelsel ten opzichte van het ruststelsel naar rechts beweegt. Je kunt natuurlijk ook stellen dat het ruststelsel, met dezelfde snelheid, ten opzichte van het bewegende stelsel naar links beweegt. Omdat de beweging de andere kant op gaat krijgt $\beta = \frac{v}{c}$ een minteken en geldt:
$x' = \gamma(x - \beta ct)$ en $ct' = \gamma(ct - \beta x)$.

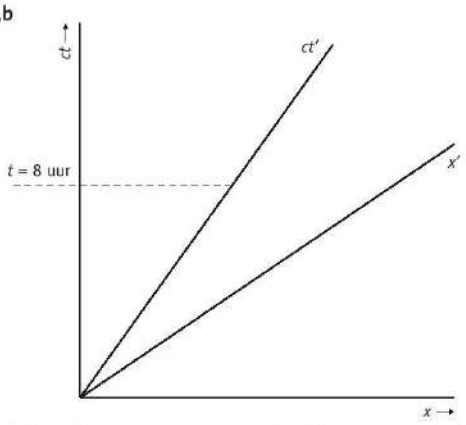
b $x' = \gamma(x - \beta ct) = 0$
$\gamma x = \gamma\beta ct \rightarrow ct = \frac{x}{\beta}$

c Voor de x'-as geldt $ct' = 0$. Hieruit volgt:
$ct' = \gamma(ct - \beta x) = 0 \rightarrow ct = \beta x$

d Voor O' geldt $x' = 0$. De vergelijking voor de ct'-as is dan $ct = \frac{x}{\beta}$. De tangens van de hoek tussen de ct-as en de ct'-as is dan β. Voor de x'-as geldt $t' = 0$ zodat de vergelijking daarvoor gegeven wordt door $ct = \beta x$. De tangens van de hoek tussen de x-as en de x'-as is dan ook β.

36 $x' = \gamma(x - \beta ct) = \gamma x - \gamma vt \approx x - vt$ omdat $\gamma \approx 1$.
$ct' = \gamma(ct - \beta x) = \gamma ct - \gamma\beta x \approx ct - 0$ omdat $\gamma \approx 1$ en $\beta \approx 0$. Dus $ct' = ct \rightarrow t' = t$.

37 a,b



De hoek tussen de ct- en de ct'-as (en de x- en x'-as) is gelijk aan $\theta = \tan^{-1}\beta = \tan^{-1} 0{,}7 = 35°$.

c De afstand is $x = v \cdot t = \beta ct =$
$x = 0{,}70 \times 2{,}998 \cdot 10^8 \times 8{,}0 \times 3600 = 6{,}0 \cdot 10^{12}$ m.

d Voor de beweging van het ruimtevaartuig geldt
$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1{,}4$.

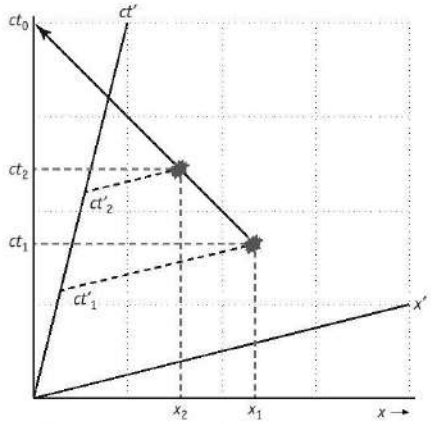
De tijdsduur van 8,0 h op aarde is in het ruimtevaartuig dan $\frac{8{,}0}{1{,}4} = 5{,}7$ h.

38 a $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}25^2}} = 1{,}033$

b We gebruiken hier de inverse lorentztransformatie:
$c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x)$
Hierin vullen we de tijd in jaren en de afstand in lichtjaar in.
$c\Delta t' = 1{,}033 \times (c \times 0 - 0{,}25 \times 0{,}5)$

$\Delta t' = \frac{-1{,}033 \times 0{,}25 \times 0{,}5}{c} = -0{,}13$ jaar.

39 a,b



c Aangezien $\Delta x = x_1 - x_2 = 1$ lichtjaar, is $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta x}{c} = 1$ jaar.

d $c\Delta t' = \gamma(ct_2 - \beta x_2) - \gamma(ct_1 - \beta x_1) = \gamma c\Delta t - \gamma\beta\Delta x$
Met $\Delta x = 1$ en $\Delta t = \frac{\Delta x}{c} = 1$ volgt hieruit:
$\Delta t' = \gamma(1 - \beta)$
$\beta = 0{,}25$ dus $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}25^2}} = 1{,}033$

Hieruit volgt: $\Delta t' = 0{,}77$ jaar.

40 a $\beta_s = \frac{\beta + \beta_{s'}}{1 + \beta\beta_{s'}} = \frac{0{,}1 + 0{,}1}{1 + 0{,}1 \cdot 0{,}1} \cong 0{,}2$

b $\beta_s = \frac{\beta + \beta_{s'}}{1 + \beta\beta_{s'}} = \frac{0{,}1 + 0{,}9}{1 + 0{,}1 \times 0{,}9} = \frac{1{,}0}{1{,}09} = 0{,}92$

c $\beta_s = \frac{\beta + \beta_{s'}}{1 + \beta\beta_{s'}} = \frac{0{,}9 + 0{,}9}{1 + 0{,}9 \times 0{,}9} = \frac{1{,}8}{1{,}81} = 0{,}99$

41 a $\frac{1}{2}v_0$ en $-\frac{1}{2}v_0$

b $\frac{1}{2}v_0$

c $v_2' = -\beta' c$.

d $v_{zp} = +\beta' c$

e Uit $\beta_1 = \frac{\beta_1' + \beta_{zp}}{1 + \beta_1' \cdot \beta_{zp}}$ volgt dat
$v_1 = \beta_1 c = 0{,}8c = \frac{\beta' + \beta'}{1 + (\beta')^2} c$

zodat $0{,}8 + 0{,}8(\beta')^2 = 2\beta'$. Dit is een kwadratische vergelijking met als enige oplossing ($\beta' < 1$)

$\beta' = \frac{2 - \sqrt{4 - 4 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8}}{2 \cdot 0{,}8} = \frac{1 - 0{,}6}{0{,}8} = 0{,}5$

20.5 Relativistische mechanica

42 a $F = E \cdot q = 1{,}3 \cdot 10^6 \times 1{,}602 \cdot 10^{-19} = 2{,}1 \cdot 10^{-13}$ N

b $a = \frac{F}{m} = \frac{2{,}1 \cdot 10^{-13}}{1{,}673 \cdot 10^{-27}} = 1{,}3 \cdot 10^{14}$ m/s²

c 281 m
Met deze versnelling duurt het

$t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{0{,}90 \times 2{,}998 \cdot 10^8}{1{,}3 \cdot 10^{14}} = 2{,}08 \cdot 10^{-6}$ s

De afstand die dan wordt afgelegd is te berekenen met bijvoorbeeld:
$x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \times 1{,}3 \cdot 10^{14} \times (2{,}08 \cdot 10^{-6})^2 = 281$ m
of $x = \bar{v}t = 0{,}5 \times 0{,}90 \times 2{,}998 \cdot 10^8 \times 2{,}08 \cdot 10^{-6} = 281$ m

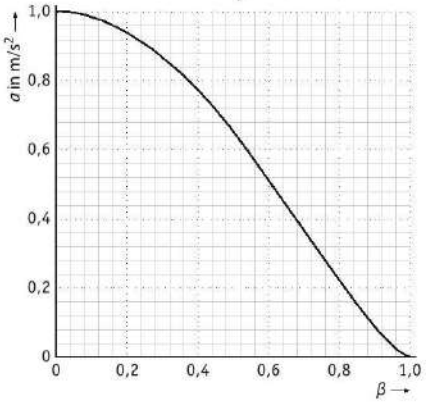
© Noordhoff Uitgevers bv

d 12
$v = 0{,}90c \rightarrow \beta = 0{,}90$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}90^2}} = 2{,}29$$

Voor de relativistische versnelling geldt: $a = \frac{F}{\gamma^3 m}$
De factor waarmee de versnelling dus wordt verkleind is $\gamma^3 = 2{,}29^3 = 12$.

43 a De versnelling is $a = \frac{1}{\gamma^3} = \left(\sqrt{1-\beta^2}\right)^3$



b Vanaf $\beta = 0{,}9$ is de versnelling 10% van de oorspronkelijke versnelling (zie grafiek).
c Voor $\beta = 0{,}9$ geldt $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}9^2}} = 2{,}3$.

44 a 1000 m
Het proton moet dus een kinetische energie hebben van 1,0 GeV. Dat betekent dat het over een spanning van $U = 1{,}0$ GV versneld moet worden. De afstand die daarvoor afgelegd moet worden is:

$$\Delta x = \frac{U}{E} = \frac{1{,}0 \cdot 10^9}{1{,}0 \cdot 10^6} = 1{,}0 \cdot 10^3 \text{ m}.$$

b $\gamma = 2$ betekent $\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2} = 0{,}87$. De snelheid na 1 km is dan al $v = \beta c = 2{,}60 \cdot 10^8$ m/s. Een goede schatting voor de tijd van 1 omwenteling is dat het proton met de lichtsnelheid rondgaat.
Eén omwenteling duurt dan iets langer dan:

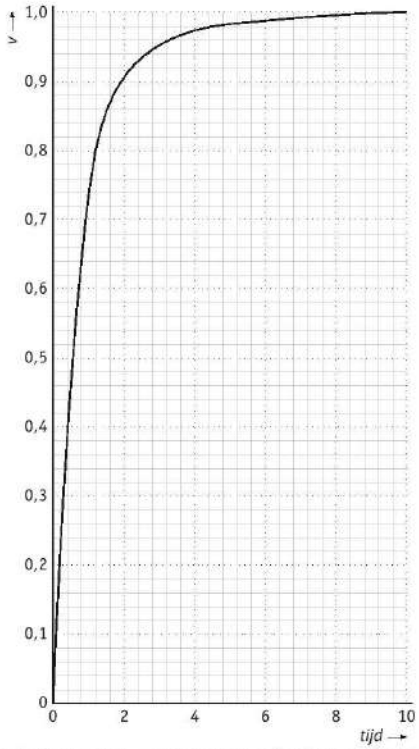
$$t = \frac{x}{v} = \frac{27 \cdot 10^3}{2{,}998 \cdot 10^8} = 9 \cdot 10^{-5} \text{ s}.$$

45 a $E_k = (\gamma - 1)mc^2$ met $E_k = 40$ keV en de massa van het elektron 0 = 0,511 MeV/c^2 = 511 keV/c^2. Daaruit volgt voor $\gamma = 1 + \frac{40}{511} = 1{,}078$.

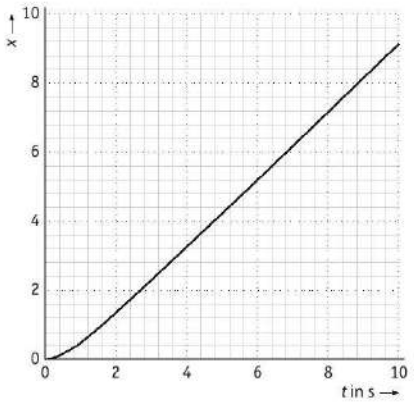
b $\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{1{,}078}\right)^2} = 0{,}374$

$v = \beta c = 1{,}1 \cdot 10^8$ m/s (circa 1/3 van de lichtsnelheid!)

46 a



b Met de formule $F = \gamma ma$ is de snelheid al snel groter dan de lichtsnelheid. Dan is γ niet meer te berekenen omdat dan de wortel uit een negatief getal getrokken moet worden. Het programma loopt dan vast.
c Het model kan je uitbreiden met de regels:
dx = v * dt
x = x + dx
en als startwaarde x = 0.
De grafiek van de afgelegde weg tegen de tijd wordt dan:



d Het begin van de grafiek is paraboolvormig. Maar omdat na enige tijd de snelheid bijna constant blijft (namelijk c), wordt x bij benadering een rechte lijn.

© Noordhoff Uitgevers bv

47 a $\Delta U = E \cdot \Delta x = 4{,}692 \cdot 10^6 \times 1{,}2 \cdot 10^3 = 5{,}630 \cdot 10^9$ V. Het proton heeft dan een energie van $5{,}630 \cdot 10^9$ eV. Een proton heeft een massa van 938,3 MeV/c^2.
Met $E_k = (\gamma - 1)mc^2$ volgt

$$\gamma = 1 + \frac{5{,}630 \cdot 10^9}{938{,}3 \cdot 10^6} = 7{,}00$$

b Het proton heeft bijna de gehele weg nagenoeg de lichtsnelheid. De looptijd is dan ongeveer (iets meer) $t = \frac{1200}{2{,}998 \cdot 10^8} = 4\ \mu s$.

48 Voor de kinetische energie geldt: $E_k = (\gamma - 1)mc^2$
Volgens opgave 9d geldt voor kleine waarden van β dat $\gamma = \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right)$
Hieruit volgt: $E_k = \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 - 1\right)mc^2$.
$E_k = \frac{1}{2}\beta^2 mc^2 = \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}mc^2 = \frac{1}{2}mv^2$

49 a Voor de energie geldt: $E = \gamma mc^2$

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} = \frac{5{,}0 \cdot 10^9}{938{,}3 \cdot 10^6} = 5{,}33$$

Hieruit volgt:

$$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5{,}33}\right)^2} = 0{,}98$$

De snelheid is dan $2{,}94 \cdot 10^8$ m/s.

b $p = \gamma\beta mc = \left(\frac{E}{mc^2}\right)\beta mc = \frac{\beta E}{c} = 0{,}98 \times 5{,}0$ GeV/c
$p = 4{,}9$ GeV/c

50 a Voor de totale energie geldt:
$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$
$E^2 = (0{,}511\text{ MeV})^2 + (1{,}0\text{ MeV})^2$
$E^2 = 1{,}26\text{ (MeV)}^2$
$E = 1{,}1$ MeV

b $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$
$E^2 = (0{,}510\text{ MeV})^2 + (1{,}0 \cdot 10^3\text{ MeV})^2$
$E^2 = 1{,}00 \cdot 10^6\text{ (MeV)}^2$
$E = 1{,}0$ GeV

c De impuls is zo groot (1 GeV/c) ten opzichte van de massa 0,511 MeV/c^2 dat het elektron met vrijwel de lichtsnelheid gaat. Dus $\beta \cong 1$. Dan is $E = \frac{pc}{\beta} \cong pc = 1$ GeV.

51 a $\beta = 0{,}99$ geeft $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}99^2}} = 7{,}09$
Hieruit volgt dat de energie gelijk is aan:
$E = \gamma mc^2 = 7{,}09 \times \left(\frac{1{,}0\text{ eV}}{c^2}\right) \times c^2 = 7{,}1$ eV
Dus bij een energie vanaf 7,1 eV gaan neutrino's met een snelheid groter dan 99% van de lichtsnelheid.

b Bij de processen waarbij neutrino's vrijkomen is er vrijwel altijd sprake van hoge energieën. Neutrino's hebben daardoor altijd vrijwel de lichtsnelheid. En deeltjes met de lichtsnelheid zijn massaloos.

52 a Voor de impuls geldt $p = \gamma\beta mc = Ft$. Omdat m, F en c constant zijn is $\gamma\beta$ dus recht evenredig met de tijd, met evenredigheidsconstante $\frac{F}{mc}$.

b Uit de definitie van $\gamma\left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right)$ volgt dat $\gamma^2 = 1 + (\gamma\beta)^2$. Met de relatie tussen $\gamma\beta = \alpha \cdot t$ volgt dan: $\gamma^2 = (\alpha \cdot t)^2 + 1$.
Uit $\gamma\beta = \alpha \cdot t$ volgt ook $\beta = \frac{\alpha \cdot t}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot t}{\sqrt{(\alpha \cdot t)^2 + 1}}$.

c Uit de formule in b volgt dat als t oneindig groot wordt, dan:

$$\beta = \frac{\alpha \cdot t}{\sqrt{(\alpha \cdot t)^2 + 1}} \approx \frac{\alpha \cdot t}{\sqrt{(\alpha \cdot t)^2}} = \frac{\alpha \cdot t}{\alpha \cdot t} = 1$$

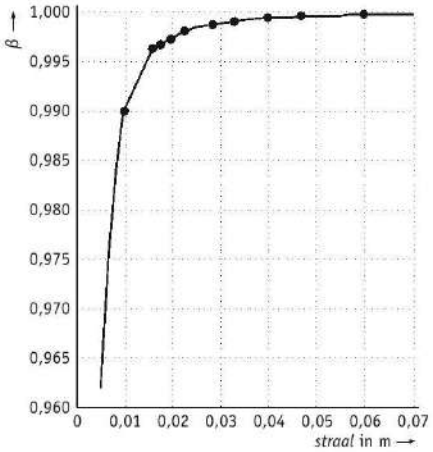
53 a $p = \gamma\beta mc = BqR$

$$\gamma\beta = \frac{BqR}{mc}$$

b Uit de figuur is de straal te bepalen. Met de formule uit a, $\gamma\beta = \frac{BqR}{mc}$, is de waarde van $\gamma\beta$ te bepalen. Gebruik hiervoor $B = 1{,}2$ T, $q = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C, $m = 9{,}109 \cdot 10^{-31}$ kg en $c = 2{,}998 \cdot 10^8$ m/s.

c,d

R in m	$\gamma\beta$	γ	β
0,06	42,2	42,3	0,9997
0,047	33,1	33,1	0,9995
0,04	28,2	28,2	0,9994
0,033	23,2	23,3	0,9991
0,0285	20,1	20,1	0,9988
0,0225	15,8	15,9	0,9980
0,0195	13,7	13,8	0,9974
0,0175	12,3	12,4	0,9967
0,016	11,3	11,3	0,9961
0,01	7,0	7,1	0,9901



De waarde van γ vindt je uit $\gamma = \sqrt{1 + (\gamma\beta)^2}$ en β is te berekenen uit $\beta = \frac{\gamma\beta}{\gamma}$; zie de tabel. Je ziet dat de snelheid amper verandert. Het elektron beweegt vrijwel de hele baan met de lichtsnelheid.

54 $F = \frac{dp}{dt}$ en $p = \gamma\beta mc$

Hieruit volgt: $F = \frac{d}{dt}(\gamma\beta mc) = mc \cdot \frac{d}{dt}(\gamma\beta)$

$$\frac{d}{dt}(\gamma\beta) = \gamma\frac{d}{dt}\beta + \beta\frac{d}{dt}\gamma$$

$$\frac{d}{dt}\beta = \frac{a}{c}$$

$$\frac{d}{dt}\gamma = \frac{d\gamma}{d\beta} \cdot \frac{d\beta}{dt} = \frac{d\gamma}{d\beta} \cdot \frac{a}{c}\text{ (kettingregel)}$$

$$\frac{d\gamma}{d\beta} = \frac{d}{d\beta}(1 - \beta^2)^{-1/2} = -\frac{1}{2}(1 - \beta^2)^{-3/2} \cdot -2\beta$$

zodat $\frac{d\gamma}{d\beta} = \beta\gamma^3$

De uitdrukking voor de kracht wordt dan:
$F = mc \cdot \frac{d}{dt}(\gamma\beta) = mc \cdot \left(\gamma\frac{d}{dt}\beta + \beta\frac{d}{dt}\gamma\right)$
$F = mc \cdot \left(\gamma \cdot \frac{a}{c} + \beta \cdot \beta \cdot \gamma^3 \cdot \frac{a}{c}\right) = ma\,(\gamma + \gamma^3\beta^2)$
$F = \gamma(1 + \gamma^2\beta^2)ma = \gamma(\gamma^2)ma = \gamma^3 ma$

© Noordhoff Uitgevers bv

20.6 Het relativistische dopplereffect

55 $E' = \gamma(E - \beta pc)$
en
$p'c = \gamma(pc - \beta E)$

56 a Omdat de waargenomen golflengte groter is dan in het stelsel van de nevel, is de energie van het ontvangen foton kleiner dan in het stelsel van de nevel. Dus $E < E'$. In de relatie $E = \gamma(E' + \beta p'c)$ is p' negatief. Dan is is $\beta > 0$ en dus beweegt de nevel zich af van de waarnemer.

b Uit $E = \gamma(E' + \beta p'c)$ volgt $\frac{hc}{\lambda} = \gamma\left(\frac{hc}{\lambda'} - \beta\frac{h}{\lambda'}c\right)$

Daaruit volgt $\frac{\lambda'}{\lambda} = \gamma(1-\beta) = \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$

c $\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \frac{\lambda'}{\lambda} = 0{,}999985$; daaruit volgt $\beta = 3{,}0 \cdot 10^{-5}$.
De snelheid van de emissienevel ten opzichte van de aarde is dan 9,1 km/s.

57 a $\lambda' = 122$ nm
$\beta = 0{,}976$
$\lambda = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\lambda' = \sqrt{\frac{1+0{,}976}{1-0{,}976}} \times 122 = 1107$ nm

b 1107 nm ligt in het infrarode gedeelte van het spectrum.

58 a 93,7 Mhz
Voor de frequentie geldt: $f = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}f'$

Als de bron naar de waarnemer toe komt dan is β negatief. Als de bron zich verwijdert is β positief.
Er geldt dus:
$135 = \sqrt{\frac{1-(-\beta)}{1+(-\beta)}}f'$ en $65 = \sqrt{\frac{1-(+\beta)}{1+(+\beta)}}f'$.

Uit de eerste vergelijking volgt: $f' = 135 \cdot \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$

Uit de tweede vergelijking volgt: $f' = 65 \cdot \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$

Vermenigvuldigen van beide vergelijkingen levert $f'^2 = 135 \times 65$ zodat $f' = 93{,}7$ MHz.

b $0{,}35c$
Delen van beide vergelijkingen in a levert:

$1 = \frac{135}{65} \cdot \frac{1-\beta}{1+\beta}$ zodat $\beta = \frac{135-65}{135+65} = 0{,}35$

Dus de snelheid $= 0{,}35c = 1{,}0 \cdot 10^8$ m/s.

59 40 dagen
In plaats van naar de frequentie kunnen we ook naar de periode kijken:

$f = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}f'$ met $T = \frac{1}{f}$ volgt

$T = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \cdot T' \rightarrow T = \sqrt{\frac{1+0{,}60}{1-0{,}60}} \times 20 = 40$ dagen

60 a Het foton heeft een golflengte λ'. Het proton (de bron van het foton) beweegt naar de spiegel toe. De spiegel neemt dus een andere golflengte (λ) waar als gevolg van het dopplereffect.
Omdat het proton op de spiegel afkomt is er een blauwverschuiving; de golflengte wordt korter. Er geldt dan $\lambda = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\lambda'$.

Voor de energie E_1 geldt $E_1 = \frac{hc}{\lambda'}$ dus $\lambda' = \frac{hc}{E_1}$.
Natuurlijk geldt ook: $\lambda = \frac{hc}{E_2}$.

Daarom geldt: $\frac{hc}{E_2} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \cdot \frac{hc}{E_1}$ zodat

$E_2 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \cdot E_1$.

b De spiegel (de bron van het weerkaatste foton) komt nu op het proton af. We kunnen dus dezelfde stappen toepassen:

$E_3 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \cdot E_2 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \cdot \left(\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \cdot E_1\right) = \frac{1+\beta}{1-\beta} \cdot E_1$

c $\frac{1+\beta}{1-\beta} = \frac{E_3}{E_1} = 1{,}1 \rightarrow \beta = \frac{1{,}1-1}{1{,}1+1} = 0{,}048$

Toepassing

Opgave 1 Verval van pi-mesonen

1 $N(t') = N(0)e^{-t'/\tau} \rightarrow \frac{N(t')}{N(0)} = \frac{2}{3} = e^{-t'/\tau}$
$\ln\left(\frac{2}{3}\right) = -t'/\tau$
$t' = -\tau \cdot \ln\left(\frac{2}{3}\right) = -2{,}6 \cdot 10^{-8} \cdot \ln\left(\frac{2}{3}\right) = 1{,}05 \cdot 10^{-8}$ s

2 Uit de lengtecontractie volgt: $L' = \frac{L}{\gamma} = \frac{30}{\gamma}$.

3 $v = 2{,}83 \cdot 10^8$ m/s
De snelheid van het pion is $v = \beta c = \frac{L'}{t'} = \frac{L}{\gamma t'}$.
Dus: $\beta\gamma = \frac{L}{ct'} = \frac{30}{2{,}998 \cdot 10^8 \times 1{,}05 \cdot 10^{-8}} = 9{,}49$
Met $\gamma = \sqrt{1 + (\gamma\beta)^2} = 9{,}54$ en $\beta = 0{,}994$. De snelheid is dan $v = 0{,}994c = 2{,}98 \cdot 10^8$ m/s.

4 $L' = \frac{30}{\gamma} = \frac{30}{9{,}54} = 3{,}1$ m

Opgave 2 Mössbauer-spectroscopie

5 $\frac{\Delta E}{E} = \frac{f'-f}{f} = \frac{f'}{f} - \frac{f}{f} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - 1 =$
$\sqrt{(1+\beta)(1+\beta)} - 1 = 1 + \beta - 1 = \beta$

6 $v = 7{,}36 \cdot 10^{-7}$ m/s
$\beta = \frac{\Delta E}{E} = \frac{gx}{c^2} = \frac{9{,}81 \times 22{,}5}{(2{,}998 \cdot 10^8)^2} = 2{,}46 \cdot 10^{-15}$

De snelheid van de bron is dan:
$v = \beta c = 7{,}36 \cdot 10^{-7}$ m/s

7 12 nm
Een (harmonische) trilling met amplitude A en frequentie f heeft een maximale snelheid van $v_{max} = 2\pi fA = 7{,}36 \cdot 10^{-7}$ m/s.
Daaruit volgt dat $A = \frac{v}{2\pi f} = \frac{7{,}36 \cdot 10^{-7}}{2\pi \times 10} = 12$ nm.

Opgave 3 Quasars

8 Voor een grote dopplerverschuiving is een grote snelheid nodig ten opzichte van de aarde. Hoe verder een stelsel weg staat ten opzichte van de aarde, hoe sneller het van ons af beweegt (de wet van Hubble). De Quasar moet dus wel heel ver weg staan.

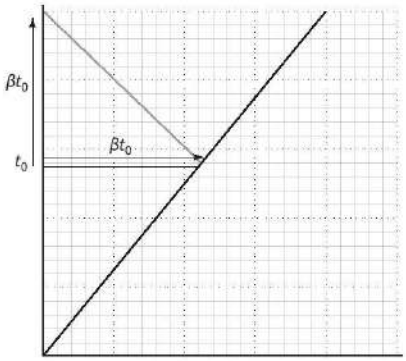
© Noordhoff Uitgevers bv

9 $v = 0{,}438 \cdot 10^8$ m/s

Uit $\lambda = \lambda' \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$ volgt $\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{140{,}8}{121{,}6} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$ zodat

$\beta = 0{,}146$ en $v = \beta c = 0{,}436 \cdot 10^8$ m/s.

10 6,13 miljard jaar



Uit de roodverschuiving volgt $\beta = 0{,}6$. Stel dat de quasar 3C-9 in het aardse stelsel ontstaan is op het tijdstip t_o, dan heeft het licht van de quasar er βt_o over gedaan om op de aarde aan te komen. De huidige leeftijd van het heelal is dan $t_o + \beta t_o$ = 13,8 miljard jaar, zodat t_o = 8,63 miljard jaar. De quasar is dan βt_o = 5,2 miljard jaar geleden ontstaan.

11 1,7 miljoen jaar

Uit $\beta = 0{,}6$ volgt $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1{,}25$. Vanwege de tijdrek is quasar 3C-9 nog $\gamma \times 1{,}0 = 1{,}25$ miljoen jaar op aarde zichtbaar.

Opgave 4 Gasstromen sneller dan het licht?

12 De gasstroom beweegt naar de aarde toe; er is dus sprake van blauwverschuiving: $f = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\, f'$

dus $\Delta t = \frac{1}{f}$ volgt dan $\Delta t' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\, \Delta t$.

13 $\Delta x = \beta \cdot \gamma c \Delta t' = \gamma\beta c \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\, \Delta t$ zodat

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \gamma\beta c \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \frac{\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \frac{\beta c}{1-\beta}$$

14 groter dan 0,5

Als $\frac{\beta}{1-\beta} > 1$, dus als $\beta > 1 - \beta$; dus $2\beta > 1$ zodat $\beta > 0{,}5$.

15 We willen dus de waarde van β weten.

Uit $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\beta}{1-\beta} c$ volgt

$$\beta c = (1-\beta)\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} - \beta\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\beta c + \beta\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\beta\left(c + \frac{\Delta x}{\Delta t}\right) = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$v = \beta c = c \cdot \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t}}{c + \frac{\Delta x}{\Delta t}}$ en dit is kleiner dan c voor alle waarden van $\frac{\Delta x}{\Delta t}$.

Opgave 5 Laserkoeling

16 De massa van een natriumatoom is 22,99 u, dus $22{,}99 \times 1{,}66 \cdot 10^{-27} = 3{,}82 \cdot 10^{-26}$ kg.

$E_k = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \times 1{,}38 \cdot 10^{-23} \times (273{,}15 + 20)$

$E_k = 6{,}07 \cdot 10^{-21}$ J

$6{,}07 \cdot 10^{-21} = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \cdot (3{,}82 \cdot 10^{-26}) \cdot v^2$

$v = 564$ m/s

17 $\Delta\lambda = 1{,}11 \cdot 10^{-3}$ nm

De bewegende atomen hebben een foton met een energie van 2,1 eV nodig. Dit komt overeen met een golflengte van $\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \times 2{,}998 \cdot 10^8}{2{,}1 \times 1{,}602 \cdot 10^{-19}}$

$\lambda = 591$ nm

Dit betekent dat het bewegende atoom een golflengte van 591 nm moet waarnemen. De golflengte van het licht dat uitgezonden wordt is dan:

$591 = \lambda' \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$

Hierbij is $\beta = \frac{564}{2{,}998 \cdot 10^8} = 1{,}88 \cdot 10^{-6}$

Omdat β zo klein is kan de formule uit *Binas* tabel 35, E1 gebruikt worden:

$v = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} c$

$564 = \frac{\Delta\lambda}{591} \times 2{,}998 \cdot 10^8$

$\Delta\lambda = 1{,}11 \cdot 10^{-3}$ nm

Proefwerkopgaven

1 a De heenreis duurt voor de bemanning in het stelsel van de ruimtecapsule 30 jaar, dan is $ct' = 30$ lichtjaar. De overeenkomende tijdsduur op aarde is dan $\gamma t' = 30\gamma/c$ jaar. De afstand die de capsule dan heeft afgelegd is in het stelsel van de aarde $4{,}22 = \beta c \cdot \gamma t' = 30\gamma\beta$ lichtjaar.

b Uit a volgt dat $\gamma\beta = \frac{4{,}22}{30} = 0{,}14$. Voor deze kleine waarde is $\gamma \equiv 1$.
Nauwkeuriger: uit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ volgt $\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0{,}14$ zodat $\beta = 0{,}14$ en $\gamma = 1{,}01$.

c Aangezien $\gamma \equiv 1$ is er - vrijwel - geen tijdrek. Als de bemanning in het stelsel van de capsule 30 jaar ouder is geworden, is dat op aarde ook het geval.

d De gemiddelde snelheid is $v = \beta c = 4{,}2 \cdot 10^7$ m/s.

e $v = at$ levert $t = \frac{4{,}2 \cdot 10^7}{9{,}8} = 4{,}3 \cdot 10^6$ s. Dit is ongeveer 49,6 dagen.

f Nadat de capsule de eindsnelheid heeft gekregen is de massa m_1 geworden. De kinetische energie komt dan overeen met 40% van de energie uit het massaverlies. $m_1c^2(\gamma - 1) = 0{,}4 \cdot (m_o - m_1)c^2$ zodat $m_1 = \frac{0{,}4}{\gamma - 0{,}6} m_o$. Het relatieve massaverlies is dan $\frac{m_o - m_1}{m_o} = 1 - \frac{m_1}{m_o} = \frac{\gamma - 1}{\gamma - 0{,}6} = 0{,}024$; dat is 2,4%.

2 a Vanwege de lengtecontractie is $L' = \frac{L}{\gamma}$.

b Vanwege het dopplereffect is

$$\lambda = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\, \lambda' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \cdot \frac{2L}{\gamma} = 2(1-\beta)L$$

c $E_k = (\gamma - 1)\, mc^2$ dus 100 MeV = $(\gamma - 1) \cdot 0{,}511$ MeV. Dus $\gamma = 197$.

d Omdat γ erg groot is, is $\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \equiv 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$

zodat $\lambda = 2(1-\beta)L \equiv \frac{L}{\gamma^2} = \frac{1{,}7 \cdot 10^{-2}}{197^2} = 4{,}4 \cdot 10^{-7}$ m = 440 nm

© Noordhoff Uitgevers bv

Hoofdstuk 21
Examenvoorbereiding

Introductie

1 Zie de laatste blz. van dit hoofdstuk.

2 www.examenblad.nl
www.nvon.nl

3 **a** 2
b $16 = 2 \cdot 10^1$ (1 significant cijfer)
c Het geluid legt in 0,12 s een afstand af van $0{,}12 \times 341 = 40{,}9$ m af.
Heen en weer: afstand is $40{,}9/2 = 20{,}46$ m.
2 significante cijfers: 20 m.

4 1 punt. Want de tweede reden is fout, omdat er nergens sprake is van een kolengestookte centrale. Er zijn wel twee goede redenen genoemd, maar omdat alleen de eerste twee beoordeeld worden, is het antwoord slechts één punt waard.

21.1 Problemen oplossen

1 t/m 3 Eigen antwoorden

21.2 Golven en trillingen

1 en 5 De uitwerking staat in de paragraaf.
6 Eigen antwoord

21.3 Straling en medische beeldvorming

7 en 8 Eigen antwoord

21.4 Quantumfysica

9 t/m 11 Eigen antwoorden

21.5 De temperatuur op aarde

14 en 15 Eigen antwoorden

© Noordhoff Uitgevers bv