Minimum Spreiding van Diatonische Onreinheid

Korte Inhoud
Er wordt een temperament bepaald, met een minimum spreiding van de zwevingen van kwinten, en grote en kleine tertsen, binnen de C-groot diatonische toonladder. Hieruit blijkt dat een gelijkheid van de zwevingsfrequenties een primordiale kwaliteitsfactor is bij het auditief stemmen van een klavier. Vallotti en een nieuw ontwikkelde Welgetemperde Middentoon hebben afgetekend de laagste spreiding van interval zwevingsfrequenties. In het algemeen kan er gelukkig geen significant verschil vastgesteld worden tussen de toonhoogtes van noten bekomen bij het stemmen op basis van verdeling van komma's, verhoudingen of cents, en deze bekomen op basis van gelijke interval zwevingsfrequenties. Het is daarom waarschijnlijk correct om te veronderstellen dat het auditief stemmen van een klavier aan de basis lag van de ontwikkeling van historische temperamenten, alhoewel de stemresultaten meestal mathematisch beschreven werden op basis van interval verhoudingen, in plaats van interval zwevingen.

Keywords : keyboard ; auditory ; tuning ; diatonic ; interval ; beating rate ; spread ; circular ; temperament ; Vallotti ; meantone ;

Sleutelwoorden : klavier ; auditief ; stemmen ; diatonisch ; interval ; zwevingsfrequenties : spreiding ; circulair ; temperament ; Vallotti ; middentoon ;

Deze tekst dient gezien te worden als een minieme maar hopelijk interessante en specifieke aanvulling bij belangrijke publicaties betreffende muzikale temperamenten, zoals deze van Kelletat (1981, 1982); Rasch (1984, 1983); Jedrzejewski (2002); Sethares (2005), … en ook meer recente zoals die van Di Veroli (2009), Calvet (2020).

Heel wat historische steminstructies publiceren eerder subjectieve informatie betreffende de auditief waarneembare interval kwaliteit, met weinig of geen kwantitatieve informatie, maar men heeft anderzijds veel meer publicaties met instructies geformuleerd op basis van interval verhoudingen, komma verdelingen of cents, waarbij de auditieve aspecten van het stemmen ontbreken of niet altijd duidelijk zijn. Er is een soort van "kip of ei" probleem ; wat komt het eerst : de auditieve waarneming, of de meetbare instructie ? Hier wordt in feite met twee maten en twee gewichten gewerkt. Veel historische en meetbare instructies zijn gebaseerd op het monochord. von Helmholtz (1863) steunde nog op fysieke resonanties van flessen voor zijn geluidsanalyses. Het is vandaag duidelijk dat de precisie van deze oudere historische apparatuur nogal beperkt was. De inharmoniciteit van een snaar, bij voorbeeld, kan approximatief berekend worden op basis van een differentiaal vergelijking van de vierde orde, en de partiëlen overschrijden zeer snel een inharmoniciteitsfactor 1,001, wat overeenkomt met 1,7 cents, en dit stijgt verder voor hogere partiëlen. Onderstaande formule laat toe om de inharmoniciteit van een snaar te voorspellen (Fletcher H., 1962, vol. 34, p. 749-761).

$$f(n)=f(0).n.\sqrt{1+B.n^2} \quad \text{waarbij} \quad B=\frac{\pi^3.E.d^4}{64.l^2.T}$$

met E = Elasticiteitsmodulus (Young) en T = snaarspanning

Op basis van de factor < B > in deze formule is het duidelijk, dat een goede harmonische snaar karakteristiek gepaard gaat met een grote lengte, een kleine diameter, en een hoge spanning.

Een Fourier analyse op een staal van meer dan 50 periodes van de klank van een C♯3 snaar van een Bruckner buffetpiano vertoont op haar tweede partiële al een inharmoniciteit van vier cents, en meer op hogere partiëlen ; de tweede partiële van de G♯4 snaar van het middenoctaaf heeft al een inharmoniciteit van elf cents. Een Fourier analyse tot op de zesde partiële van een staal van een halve seconde van de klank van een A3 snaar, van een Hanlet piano (België), - de zes eerste partiëlen zijn van belang voor het stemmen van de initiële F3-F4 partitie -, staat in onderstaande tabel :

1	2	3	4	5	6
1,00000	1,00076	1,00171	1,00227	1,00576	1,00630

Inharmoniciteit : Hanlet A3 snaar

Ook het menselijk oor heeft een invloed op het stemmen van een klavier, gezien de gevoeligheid ervan sterk afhankelijk is van de toonhoogte Fletcher H. (1933, vol, 5, p. 82-108), waardoor de partiëlen die buiten de band van 300 tot 3.000 Hz. liggen minder invloed hebben, … partiëlen met zeer lage frequentie krijgen best een gewicht toegekend om hun invloed te beperken, indien ze betrokken worden bij metingen of berekeningen. Combinatie van alle bovenstaande factoren leidt bij het auditief stemmen tot een verlenging van het octaaf Railsback (1938, vol. 9, p. 274).

Ingevolge al het bovenstaande, en dit tot een zeer recent verleden, werd een klavier meestal op auditieve wijze gestemd, er bestond geen andere soepel toepasbare werkwijze.

Het is pas recent dat betere elektronische toonhoogte meetapparatuur beschikbaar werd, wat metingen met zeer hoge precisie mogelijk maakt, en dus ook een zeer precieze toonhoogte instelling, met een nogal ongelukkig gevolg dat het (12TET) gelijkzwevend temperament helaas ergens enige vorm van bevoordeling geniet, … - wegens onwetendheid of onkunde - ? Maar zelfs zo, en op zijn minst om een goede consonantie bij hoge tonen te bekomen, zou men met deze instrumenten ook de partiëlen moeten meten, om te kunnen komen tot een correcte instelling van intervallen. Ook bij de zeer lage tonen heeft men een probleem over de wijze waarop de partiëlen in rekening moeten worden gebracht, rekening houdend met de gevoeligheid van het oor, de hoge harmonische inhoud, en de zware inharmoniciteit, … condities die typisch en essentieel zijn voor deze tonen.

1 Mogelijk determinerende factoren voor het auditief stemmen

Een oppervlakkige analyse van historische temperamenten volstaat, om vast te stellen dat de meeste voorgestelde temperamenten streven naar een betere kwaliteit voor de diatonische C-groot toonaard, en dat dit in het algemeen verwezenlijkt wordt door een verkleining van de diatonische kwinten, teneinde de kwaliteit van de diatonische tertsen te verbeteren, maar dit op een dusdanige wijze dat er een voldoende kwaliteit behouden blijft voor alle andere toonaarden. De band waarbinnen er kan gestemd worden, kan gaan van reine kwinten met Pythagoreïsche tertsen, tot verkleinde kwinten met reine grote tertsen. Vraag hierbij is : wat is de wijze waarop een stemmer de kwaliteit intuïtief evalueert ?

2 Hypothese op basis van een mogelijke historische ontwikkeling

De middentoon introduceerde de toepassing van betere, zelfs reine, diatonische grote tertsen. De chronologie betreffende de invoering van enkele middentoon alternatieven kan revelerend zijn over de wijze waarop er gestemd werd, al moet toegegeven worden dat deze chronologie kan verschillen voor verschillende regio's, en dat de hier voorgestelde chronologie daarom voorwerp van discussie kan zijn.

De middentoon begon met de kwart komma middentoon versie (Aaron, 1523), later kwam de 1/5 komma versie (Sauveur, 1701 ; Rossi, 1666), en nog later de 1/6 komma versie (Romieu, 1758). De hier voorgestelde hypothese, is dat deze temperamenten niet werden uitgewerkt op basis van een proportionele verdeling van de syntonische komma, met gebruik van een monochord, maar mogelijk op de hieronder beschreven auditieve wijze.

2.1 De kwart komma middentoon (Di Veroli, 2018 ; Fogliano 1529)

2.1.1 De komma verdeling met A als stemvork zou mogelijk kunnen geweest zijn, als volgt

(1) Stem een reine grote terts F A
(2) Stem reine kwinten F-C en D-A
(3) Stem G, zodat de kwinten C-G en G-D gelijk verkleind zijn ; de verkleining bedraagt dus een halve komma
(4) Stem C opnieuw, zodat de kwinten F-C en C-G gelijk verkleind zijn ; de verkleining bedraagt dus de helft van een halve komma, dit is dus één vierde van een komma
(5) Stem D opnieuw, zodat de kwinten G-D en D-A gelijk verkleind zijn ; ze zijn dus ook verkleind met één vierde van een komma.

2.1.1 De kwart komma verdeling met C als stemvork zou kunnen mogelijk geweest zijn, als volgt

(1) Stem een reine grote terts C E
(2) Stem reine kwinten C-G en A-E
(3) Stem D, zodat de kwinten G-D en D-A gelijk verkleind zijn ; de verkleining bedraagt dus een halve komma
(4) Stem G opnieuw, zodat de kwinten C-G en G-D gelijk verkleind zijn ; de verkleining bedraagt dus de helft van een halve komma, dit is dus één vierde van een komma
(5) Stem A opnieuw, zodat de kwinten D-A en A-E gelijk verkleind zijn ; ze zijn dus ook verkleind met één vierde van een komma.

Beide procedures leiden indien de verdeling van de komma zou hebben plaatsgehad op basis van gelijkheid van zwevingsfrequenties, tot vier gelijkzwevende kwinten, - letterlijk -, en een reine grote terts.
Latere toepassingen bij het auditief stemmen, nu de zwevingen gekend zijn, zouden vermoedelijk eerder kunnen gebeurd zijn door het stemmen van vier gelijkzwevende kwinten, waarvan de gewenste zweving dus vooraf gekend was, gevolgd door een controle op de reinheid van de hierdoor bekomen grote terts.

Het verder stemmen binnen de middentoon, kon worden afgewerkt door het stapsgewijs verder stemmen van zeven bijkomende reine grote tertsen.

De toonhoogtes bekomen bij de “klassieke” komma verdeling met gelijke cents, en deze bekomen bij een gelijkzwevende auditieve komma verdeling, worden in de tabel hieronder vergeleken.

Noot	F3	C4	G3	DA	A3	E4		Zwevingen
Klassiek	176,00	263,18	196,53	294,06	220,00	329,18		-
Zwevingen	176,00	263,12	196,78	294,07	220,00	328,89		2,21

1/4 komma middentoon

2.2 De 1/5 komma middentoon

De kwart komma middentoon heeft een zeer onreine wolfskwint. Het is mogelijk om de dissonantie van deze kwint te verminderen door de reine diatonische grote tertsen lichtjes te vergroten. Dit kan gedaan worden op basis van de onderstaande procedure, te beginnen met kwinten die lichtjes beter zijn dan de kwinten van de kwart komma middentoon.

Op basis van bovenstaande ervaring met de kwart komma middentoon, en in opeenvolgende benaderende stappen, kan op basis van kwinten die een kleinigheid groter zijn dan bij de kwart komma middentoon een grote terts bekomen worden, en wel zodanig dat deze kwinten en tertsen een gelijke absolute zwevingsffrequentie krijgen, en dus 1/5 van een syntonische komma afwijken van de reinheid (noteer : 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5).
Men verkrijgt de toonhoogtes in volgende tabel :

Noot	F3	C4	G3	DA	A3	E4		Zwevingen
Klassiek	175,56	262,69	196,53	294,06	220,0	329,18		-
Zwevingen	175,61	262,83	196,64	293,98	220,0	329,03		1,95

1/5 komma middentoon

2.3 De 1/6 komma middentoon

De 1/5 komma middentoon heeft nog steeds een redelijk onreine wolfskwint. Verdere reductie van deze dissonantie kan door de diatonische grote tertsen nog verder iets meer te vergroten.

Dit is mogelijk op basis van onderstaande procedure, door te starten met kwinten die een kleinigheid groter zijn dan deze van de 1/5 komma middentoon. In opeenvolgende stappen en controles kan men een grote terts bekomen op basis van vier kwinten, waarbij deze vier kwinten een zwevingsfrequentie hebben die gelijk is aan de helft van de zwevingsfrequentie op de grote terts die ze opbouwen, de zwevingsfrequentie van deze kwinten is dan 1/6 van een syntonische komma (noteer : 1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 6).

De bekomen toonhoogtes worden in onderstaande tabel vergeleken :

Noot	F3	C4	G3	DA	A3	E4		Zwevingen
Klassiek	175,27	262,37	196,37	293,94	220,0	329,32		-
Zwevingen	175,30	262,61	196,52	293,91	220,0	329,13		1,74

1/6 komma middentoon

2.4 Bemerking

De hierboven besproken drie middentoon temperamenten zijn gemakkelijk auditief te stemmen.
De kwart komma middentoon : vier gelijk zwevende kwinten en acht reine grote tertsen ;
de 1/5 komma middentoon : vier kwinten en acht grote tertsen, met gelijke absolute zwevingsfrequentie ;
de 1/6 komma middentoon : vier gelijk zwevende kwinten, en acht grote tertsen die dubbel zo snel zweven.

Een monochord nameting van de bekomen toonhoogteverhoudingen, kan zonder probleem leiden tot de “klassiek” afgeleide verhoudingen, zonder dat men zich van meetfouten bewust kan zijn.

Op basis van bovenstaande redenering, met onopgemerkte meetfouten, kan bijna de gehele en klassieke proportionele komma theorie in twijfel worden getrokken, indien niet verworpen, op zijn minst wat betreft middentoon temperamenten.

3 Minimalisatie van de Globale Onreinheid

Het natuurlijk harmonisch systeem is opgebouwd op basis van reine kwinten, en grote en kleine tertsen. Dit is ideaal, ware het niet dat dit systeem twee belangrijke onreine intervallen bevat : een kwint en een kleine terts op D, die beiden een gehele syntonische komma afwijken ; 21,5 cents. Deze toonladder dient dus getemperd te worden, en het lijkt logisch om te streven naar een minimum van de som van alle onreinheden : deze over de zes kwinten F-C, C-G, G-D, D-A, A-E, E-B, drie grote tertsen F-A, C-G, G-B, en vier kleine tertsen D-F, A-D, E-G, B-D. Bij het auditief stemmen komt dit overeen met een minimalisatie van de som van de zwevingsfrequenties van al deze intervallen.

Het gewenst temperament kan redelijk gemakkelijk analytisch berekend worden, maar de bekomen zwevingsfrequenties van de diatonische kwinten liggen vrij hoog, tussen ongeveer twee en vijf zwevingen per sec., de diatonisch grote tertsen zijn kleiner dan rein, en de kwinten op B en de gewijzigde noten zijn vergroot en hebben één zweving per seconde, en dit leidt ook tot grote tertsen die groter dan Pythagoreïsch zijn. Het is ook duidelijk dat een auditief stemmer, die geen meetinstrument of stemtabel gebruikt, over geen middelen beschikt om te weten of hij een minimum heeft bereikt.

Een gelijkaardige berekening is mogelijk, waarbij men de kleine tertsen niet mee in rekening brengt, maar de diatonische kwinten hebben dan vrij uiteenlopende zwevingsfrequenties gaande van ongeveer 0,9 tot 3,2 zwevingen per seconde, waardoor er een berekende tabel met zwevingen van de intervallen vereist is ter ondersteuning van het auditief stemmen. De vergrote kwinten op B en de gewijzigde noten zweven op ongeveer 0,2 zwevingen per seconde.

Er werden geen gepubliceerde historische of voorafgaande stemtabellen ter ondersteuning van bovenstaande procedures gevonden.

4 Minimalisatie van de Spreiding van Onreinheden

Bij het auditief stemmen kan men gemakkelijk een gelijkheid van lage zwevingsfrequenties vaststellen, zonder dat daartoe enig meetinstrument vereist is. Heel wat steminstructies stellen een proportioneel gelijke verdeling van de komma voor, en dit is inderdaad een gemakkelijke mathematische vereiste. Maar het is niet eenvoudig om een komma proportioneel te verdelen op een klavier. Dit is mogelijk bij middel van een monochord, maar ten koste van veel tijd en arbeid, inclusief auditieve vergelijkingen voor de transpositie van de verkregen toonhoogtes tussen het monochord en de snaar van het klavier. Bovendien heeft het monochord op zich al een gebrek aan voldoende precisie, omwille van de inharmoniciteit van haar snaar. Een mogelijk alternatief bestaat dus uit het verdelen van de komma door te stemmen naar gelijke zwevingsfrequenties voor elk deel van de komma. Het is redelijk eenvoudig om historische temperamenten te herberekenen op basis van dit voorstel. Herberekeningen werden gemaakt voor een aantal temperamenten, waaronder enkele zeer bekende zoals Werckmeister III, Neidhardt (4 varianten), Kirnberger III, Vallotti, de gelijkzwevende stemming, en ook een aantal middentonen, zoals de kwarttoon middentoon, Silbermann, enz. … Er kon worden vastgesteld dat de toonhoogtes die aldus werden bekomen, en deze volgens de klassieke berekeningen zeer vergelijkbaar zijn : bijna alle resultaten vertonen verschillen die liggen onder één cent, met gemiddelde verschillen die veel lager liggen, waarbij er slechts enkele zijn met licht hogere waarden, met uitzonderlijk een maximum gaande tot twee cents. De bekomen resultaten tonen dus aan dat de verschillen tussen het stemmen op basis van aanvaardbare zwevingsfrequenties of het stemmen op basis van cent verhoudingen, of komma's of cents verwaarloosbaar zijn. Dit is niet verrassend, de vastgestelde verschillen tussen aanvaardbare zwevingsfrequenties en cents afwijkingen betreffen kleine verschillen van kleine deviaties ; men kan deze zien als afwijkingen van de “tweede orde”. De meetfouten van de toegepaste meetapparatuur, - i.e. het monochord -, zijn ook van dezelfde grootte-orde, wat leidt tot de onmogelijkheid om de bovenvermelde verschillen te kunnen vaststellen. Gezien gelijkheden belangrijk waren bij gelijke verdeling van de komma, en gezien er geen significante verschillen kunnen vastgesteld worden tussen het bepalen van temperamenten op basis van gelijke zwevingsfrequenties of deze op basis van komma verdelingen, blijkt het logisch te kunnen zijn om te streven naar een temperament met een minimale spreiding van de zwevingsfrequenties.

5 Berekening van een minimale spreiding van zwevingsfrequenties

Het professioneel auditief stemmen vangt normaal aan bij het instellen van de F3-F4 partitie van een klavier (Calvet A., 2020), op basis van de zwevingen van de kwinten en sommige tertsen, in een streven naar een goede kwaliteit voor de C-groot toonladder. Er kunnen historische redenen bestaan om de F3-F4 partitie te kiezen, maar er bestaan ook technische redenen, want deze snaren zijn de laagste niet omwonden snaren, en daarom ook deze met de beste kwaliteit, en de zwevingen binnen deze partitie zijn laag in frequentie en daardoor gemakkelijk vergelijkbaar zonder meetapparatuur. Een aanvaardbare kwaliteit van alle toonaarden buiten deze in C-groot wordt bereikt door een controle op de overblijvende kwinten op B3 en de gewijzigde noten. De belangrijke interval-zwevingsfrequenties voor controle over de diatonische C-groot intervallen, binnen de F3-F4 partitie, kunnen berekend worden op basis van onderstaande formules, alhoewel het duidelijk is dat deze formules niets meer voorstellen dan enkele primitieve benaderingen betreffende initiële lage onreinheden, want ze geven geen maat voor het consonantie-venster (Plomp and Levelt, 1965), en houden ook geen rekening met mogelijke inharmoniciteitsfactoren van snaren.

$q_{\mathrm{F}} = 2C4-3F3$	$q_{\mathrm{C}} = 4G3-3C4$	$q_{\mathrm{G}} = 2D4-3G3$	$q_{\mathrm{D}} = 4A3-3D4$
$q_{\mathrm{A}} = 2E4-3A3$	$q_{\mathrm{E}} = 4B3-3E4$	$q_{\mathrm{B}} = 4F\sharp3-3B3$	$q_{\mathrm{F}\sharp} = C\sharp4-3F\sharp3$
$q_{\mathrm{C}\sharp} = 4G\sharp-3C\sharp4$	$q_{\mathrm{G}\sharp} = 2E\flat-3G\sharp3$	$q_{\mathrm{E}\flat} = 4B\flat3-3E\flat4$	$q_{\mathrm{B}\flat} = 4F3-3B\flat3$

Tabel 1 : Zwevingsfrequenties van kwinten binnen de F3-F4 partitie

$p_{\mathrm{F}} = 4A3-5F3$	$p_{\mathrm{C}} = 4E4-5C4$	$p_{\mathrm{G}} = 4B3-5G3$

Tabel 2 : Zwevingsfrequenties van grote tertsen binnen de F3-F4 partitie

$r_{\mathrm{D}} = 10F3-6D4$	$r_{\mathrm{A}} = 5C4-6A3$	$r_{\mathrm{E}} = 10G3-6E4$	$r_{\mathrm{B}} = 5D4-6B3$

Tabel 3 : Zwevingsfrequenties van kleine tertsen binnen de F3-F4 partitie

Het is mogelijk om een optimale diatonische C-groot te bepalen, zonder dat de gewijzigde noten hierbij betrokken worden, en de evolutie van de onreinheden is zo, dat kwinten en grote tertsen kunnen evolueren in de richting van een gelijkheid van absolute waarden van hun onreinheden, terwijl de kleine tertsen grotere absolute afwijkingen vertonen en behouden. De spreiding kan daarom best berekend worden met gebruik van verschillende gemiddelde waarden voor de volgende groepen : (1) de groep van diatonische kwinten en grote tertsen ; (2) de groep van diatonische kleine tertsen ; (3) de groep van de kwinten op B3 en de gewijzigde noten. Daartoe is het weliswaar vereist dat de absolute waarde van de onreinheden in rekening worden gebracht, want kwinten hebben negatieve onreinheidswaarden, en de onreinheidswaarden van grote tertsen zijn positief. Aldus kunnen de afwijkingen van de absolute waarden van de onreinheden ten overstaan van hun gemiddelde onreinheid bekomen worden op basis van de onderstaande vergelijkingen :

(1a) Kwinten binnen C-groot : $\varphi_{Noot} = -q_{Noot} - \dfrac{-q_{F3}-q_{C4}-q_{G3}-q_{D4}-q_{A3}-q_{E4}+p_{F3}+p_{C4}+p_{G3}}{9}$

(1b) Grote tertsen binnen C-groot : $\theta_{Noot} = p_{Noot} - \dfrac{-q_{F3}-q_{C4}-q_{G3}-q_{D4}-q_{A3}-q_{E4}+p_{F3}+p_{C4}+p_{G3}}{9}$

(2) Kleine tertsen binnen C-groot : $\vartheta_{Noot} = r_{Noot} - \dfrac{r_{D4}+r_{A3}+r_{E4}+r_{B3}}{4}$

(3) Kwinten op B3 en gewijzigde noten : $q_{\mathrm{Noot}} = q_{\mathrm{B3}} = q_{\mathrm{F\sharp3}} = q_{\mathrm{C\sharp4}} = q_{\mathrm{G\sharp3}} = q_{\mathrm{E\flat4}} = q_{\mathrm{B\flat3}}$

Op basis van de hierboven bepaalde afwijkingen van de onreinheden van een gemiddelde onreinheid, is de som van kwadraten van deze afwijkingen binnen de diatonische toonladder op C-groot gelijk aan :

$$\Sigma(kwadraten) = \varphi_{F3}^2+\varphi_{C4}^2+\varphi_{G3}^2+\varphi_{D4}^2+\varphi_{A3}^2+\varphi_{E3}^2+\theta_{F3}^2+\theta_{C4}^2+\theta_{G3}^2+\vartheta_{D4}^2+\vartheta_{A3}^2+\vartheta_{E4}^2+\vartheta_{B3}^2$$

De hierboven bepaalde $\sum(kwadraten)$, uitgedrukt in functie van de noten binnen de F3-F4 partitie wordt :

$$\begin{aligned}
&1296.\Sigma(kwadraten) = 140688.F_3^2+71244.C_4^2+156816.G_3^2+95436.D_4^2+86832.A_3^2+68976.E_4^2\\
&+76464.B_3^2-50256.F_3.C_4-68256.F_3.G_3-148464.F_3.D_4-11232.F_3.A_3-41760.F_3.E_4\\
&+38880.F_3.B_3-70416.C_4.G_3+4392.C_4.D_4-54864.C_4.A_3-26640.C_3.E_4+19440.C_4.B_3\\
&-7344\,G_3.D_4+44064.G_3.A_3-10800.G_3.E_4-12960.G_3.B_3-35856.D_4.A_3-5328.D_4.E_e\\
&-81648.D_4.B_3-43200.A_3.E_4-23328.A_3.B_3-54432.E_4.B_3
\end{aligned}$$

De aan nul gelijkgestelde partiële afgeleiden, worden na vereenvoudiging van de coëfficiënten :

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial F_3}=0 \rightarrow 1954.F_3-349.C_4-474.G_3-1031.D_4-78.A_3+290.E_4+270.B_3=0$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial C_4}=0 \rightarrow -698.F_3+1979.C_4-978.G_3+61.D_4-762.A_3-370.E_4+270.B_3=0$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial G_3}=0 \rightarrow -158.F_3-163.C_4+726.G_3-17.D_4+102.A_3-250.E_4-30.B_3=0$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial D_4}=0 \rightarrow -2062.F_3+61.C_4-102.G_3+2651.D_4-498.A_3-74.E_4-1134.B_3=0$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial A_3}=0 \rightarrow -290.F_3-185.C_4-750.G_3-37.D_4-300.A_3+958.E_4-378.B_3=0$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial E_4}=0 \rightarrow 30.F_3+15.C_4-10.G_3-63.D_4-18.A_3-42.E_4+118.B_3=0$$

Met A3 = 220, heeft men zes veranderlijken in de bovenstaande zes vergelijkingen, en we komen dus tot een enige oplossing, volgens Cramer (1750, p. 59-60, App. No 1, p. 657-659).

Bijkomende zwevingsgelijkheid voor de kwinten op B3 en de gewijzigde noten leidt tot de oplossing in de tabel hieronder.

Noot	F3	F♯#	G3	G♯3	A3	B♭3	B3	C4	C♯4	D4	E♭4	E4	F4
Toonhoogte	175,66	184,67	196,56	207,94	220,00	234,12	246,13	262,63	277,16	293,94	312,06	328,79	351,32
Δ cents	10,33	−3,03	4,95	2,40	0,00	7,66	−5,67	6,65	−0,16	1,65	5,17	−4,41	10,33
q	−1,71	0,29	−1,78	0,29	−2,42	0,29	0,29	−1,66	0,29	−1,83	0,29	−1,83	−3,43
p	1,70	13,09	1,75	10,83	8,63	5,20	17,55	1,99	19,49	7,68	12,19	19,58	3,41
r	−14,25	−8,04	−8,77	−16,97	−6,84	−18,91	−7,09	−15,51	−19,00	−7,07	−25,60	−7,15	−28,51

Tabel 4 : Temperament met minimale spreiding van diatonische onreinheden
Δ cents : toonhoogte afwijkingen in cents, ten overstaan van het gelijkzwevend temperament
q, p, r : interval zwevingsfrequenties (kwinten, grote tertsen, kleine tertsen)

De diatonische kwinten en grote tertsen hebben bijna gelijke zwevingsfrequenties : deze zijn ≈ 1,85, met een spreiding die slechts = 0,15. Er kan daarom verondersteld worden dat een professionele stemmer dit temperament auditief kan instellen, waarbij de zwevingsfrequenties van diatonische kwinten en grote tertsen approximatief gelijk zou zijn aan 1,85, natuurlijk rekening houdend met het teken van de zwevingen. Ook de kleine tertsen hebben bijna gelijke zwevingsfrequenties, maar aan een hoger tempo dan de kwinten en grote tertsen. Er kan vastgesteld worden dat er zes gelijke en licht vergrote kwinten zijn op B3 en de gewijzigde noten.

6. Beste diatonische spreiding van onreinheden uitgedrukt in cents

Een belangrijke kritiek tegen de hierboven uitgewerkte welgetemperde stemming, die steunt op een minimum spreiding van de zwevingen van de intervallen, kan het feit zijn dat er geen rekening werd gehouden met de toonhoogte van de noot waarop een interval is gebouwd. Het zou inderdaad beter en meer logisch zijn dat intervallen op hogere noten een proportioneel hogere zwevingsfrequentie zouden mogen hebben. Om deze reden is het nuttig om het reinheidscriterium qua spreiding ook uit te werken op basis van “klassieke” in cents uitgedrukte onreinheden. Dank zij de proportionaliteit van de onreinheden, zijn de berekeningen zeer eenvoudig. Onafgezien van hun toonhoogte, staat het vast dat gelijke proportionele diatonische onreinheden van kwinten leiden tot gelijkheid van de verhoudingen van de onreine kwinten, en daardoor ook tot gelijke verhoudingen van de bij deze kwinten betrokken grote en kleine tertsen. De enige voorwaarde die op basis hiervan moet uitgewerkt worden, kan dus beperkt worden tot de vereiste dat de absolute waarde van de onreinheden van kwinten en grote tertsen gelijk zouden zijn.

Binnen de C-groot diatonische toonaard kan dit bekomen worden door het vervullen van onderstaande gelijkheid :

$$1200 \times \log_2(kwint \times 2/3) = -1200 \times \log_2(grote\,terts\,4/5)$$

Deze voorwaarde, kan worden gecombineerd met de onderstaande voorwaarde dat vier opeenvolgende kwinten min twee octaven leiden tot een grote terts ; eenvoudiger gesteld : een grote terts wordt bekomen bij middel van vier opeenvolgende kwinten.

$$4 \times \log_2(kwint) - 2 = \log_2(grote\,terts)$$

Of, na vereenvoudiging van bovenstaande twee uitdrukkingen :

$$\log_2(kwint) + \log_2(grote\,terts) = -3 + \log_2(3) + \log_2(5)$$

$$4 \times \log_2(kwint) - \log_2(grote\,terts) = 2$$

Bijgevolg :

$$\log_2(kwint) = \frac{-1 + \log_2 3 + \log_2 5}{5} \qquad \text{zodat} \qquad kwint = 1{,}49627787\ldots$$

$$\log_2(grote\,terts) = \frac{-14 + 4 \times \log_2 3 + 4 \times \log_2 5}{5} \qquad \text{zodat} \qquad grote\,terts = 1{,}25610949\ldots$$

De zes overblijvende kwinten, die hier benoemd worden als < $kwint_{gewijzigd}$ >, kunnen gelijk zijn, en moeten daardoor voldoen aan de vereiste :

$$kwint^6 \times kwint^6_{gewijzigd} = 2^7 \qquad \text{zodat} \qquad kwint_{gewijzigd} = \frac{2^{\frac{7}{6}}}{kwint} = 1{,}500339036\ldots$$

Al het bovenstaande leidt tot de volgende toonladder :

Noot	F3	F♯#	G3	G♯3	A3	B ♭ 3	B3	C4	C♯4	D4	E ♭ 4	E4	F4
cents	175,56	184,75	196,53	207,93	220,00	234,03	246,27	262,69	277,18	294,06	311,97	329,18	351,13
zwevend	175,66	184,67	196,56	207,94	220,00	235,12	246,13	262,63	277,16	293,94	312,06	328,79	351,32
Δ cents	9,39	−2,35	4,69	2,35	0,00	7,04	−4,69	7,40	0,00	2,35	4,69	−2,35	9,39
q	−4,30	0,39	−4,30	0,39	−4,30	0,39	0,39	−4,30	0,39	−4,30	0,39	−4,30	−4,30
p	4,30	23,07	4,30	18,38	13,69	8,99	23,07	4,30	23,07	8,99	13,69	18,38	8,60
r	−22,68	−13,30	−13,30	−22,68	−8,60	−22,68	−8,60	−17,99	−17,99	−8,60	−22,68	−8,60	−22,68

Tabel 6 : Temperament met minimum spreiding van interval onreinheden uitgedrukt in cents, vergeleken met dit uitgedrukt in zwevingsfrequenties
q, p, r : interval onreinheden uitgedrukt in cents (kwinten, grote tertsen, kleine tertsen)

Beide minimum spreidingsmodellen, “cents” en “zwevend”, blijken zeer sterk gelijkend te zijn.

7 Evaluatie van de spreiding van de onreinheden van historische temperamenten

Het is niet gemakkelijk om een alomvattend criterium te bedenken voor het evalueren van temperamenten (Hall, 1973. p. 275-277). Een alomvattend criterium kan alleen maar multidimensioneel zijn. De spreiding van de diatonische interval onreinheden kan worden berekend op basis van onderstaande formule, en dit is niets meer dan het specifiek criterium dat gebruikt werd om een temperament met minimum onreinheids spreiding te berekenen.

$$Spreiding = \frac{220}{stemvork} \sqrt{\frac{\Sigma\left(onreinheidsverschillen\right)^2}{19}}$$

Bemerkingen :

- Om een “gestandaardiseerde” waarde van de spreiding van de zwevingen op de intervallen te berekenen voor een andere toonaard dan C-groot, moet de < *stemvork* > ingesteld worden op de toonhoogte van de sixt van de betrokken toonaard.
- De term $\frac{220}{stemvork}$ moet verwijderd worden, voor berekeningen in cents

De onderstaande tabel werd bekomen. Bijkomende berekeningen voor andere temperamenten zijn indien gewenst gemakkelijk uit te voeren en toe te voegen.

Spreiding van zwevingen		Spreiding van cents	
Minimale zwevingsspreiding	0.161	**Minimale cent spreiding**	0.000
Welgetemperde middentoon (bach)	0.436	Vallotti - Tartini	0.922
Minimale cent spreiding	0.696	Welgetemperde middentoon (bach)	1.304
Vallotti bps	0.940	**Minimale zwevingsspreiding**	1.388
Vallotti - Tartini	0.960	Vallotti bps	1.738
Barca (Devie)	1.247	Barca (Devie)	1.840
Mercadier bps	1.268	Mercadier bps	2.792
Kirnberger III bps (bach)	1.427	Neidhardt-1	3.351
Kellner bps (bach)	1.450	Jobin (bach)	3.488
Kirnberger III (bach)	1.457	Kirnberger III (bach)	3.740
Jobin (bach)	1.504	Kirnberger III bps (bach)	3.862
Neidhardt-1	1.582	Kellner bps (bach)	3.933
Werckmeister III	2.208	Vincentio Galilei 12-TET	5.530
Werckmeister III bps	2.247	Werckmeister III	5.672
Vincentio Galilei 12-TET	2.724	Werckmeister III bps	5.954

Tabel 6 : Onreinheidsspreidingen van temperamenten.
Noot : Temperamenten gemerkt met “bps”, zijn herberekende temperamenten, op basis van interval zwevingsfrequenties

Uit beide kolommen van de tabel blijkt duidelijk dat Vallotti en de welgetemperde middentoon afgetekend aan het hoofd van de tabel staan.

8 Nawoord

De analyse van temperamenten, op basis van interval zwevingsfrequenties heeft een aantal karakteristieken blootgelegd en uitgediept. Het ondersteunt de hypothese dat het auditief stemmen van een klavier vooral steunt op de “subjectieve” beoordeling, - niet gemeten met apparatuur -, van gelijkheden van zwevingsfrequenties op de belangrijkste diatonische intervallen. Gelukkig blijkt dat de frequentieverschillen en verschillen in karakteristieken in het algemeen, tussen temperamenten die berekend zijn op basis van verhoudingen, en deze berekend op basis van zwevingen niet significant zijn . De verschillen zijn zo klein dat ze met zekerheid niet kunnen vastgesteld worden bij middel van een monochord, reden waarom ze in het verleden onopgemerkt bleven, maar ook vandaag nog blijven ze moeilijk vast te stellen, ook met de meest moderne toonhoogtemeetapparatuur. Gelukkig betekent dit, dat er in het algemeen geen revisie vereist is van publicaties die op verhoudingen steunen, alhoewel er soms minieme fouten kunnen geobserveerd worden, omwille van bijvoorbeeld de impliciete onwetendheid of vergetelheid in verband met de schismatische komma ; zie ook Vallotti (1950, p. 192) en Werckmeister (1691, p. 78), - nochtans zeer belangrijke temperamenten -, en zeer vermoedelijk ook nog anderen.

Naast het rationele van deze tekst, blijft het feit dat de keus van een temperament artistiek gesproken volledig vrij is en vrij blijft, en dat, indien er een bewuste keus moet worden gemaakt, deze gewoonlijk zal steunen op artistieke beschouwingen, zoals de periode of de natuur van het stuk, het bespeeld instrument, gewenste affecten, componist, uitvoerend muzikant, enz. …

Het wordt misschien ook altijd maar moeilijker om te blijven bij een normale en algemene aanvaarding van het gelijkzwevend temperament als zijnde het meest gepast voor persoonlijke private muziekpraktijk van een breed muziek repertorium. Een goede welgetemperde stemming, Vallotti bij uitstek, is waarschijnlijk beter of meest geschikt, … de welgetemperde middentoon is haast niet gekend of aanvaard, en een ietsje moeilijker te stemmen, … alhoewel er misschien een kleine kans bestaat, dat de welgetemperde middentoon ooit een gewenst temperament zou kunnen worden voor speciale didactische demonstraties ?

Het Vallotti temperament kan naar wens toegepast worden, waarbij men het naar wens auditief, - met een zwevingsrequentie = 1,59 -, of bij middel van meetapparatuur kan aanbrengen : enig verschil zal maar zeer moeilijk te meten zijn, … en met zekerheid auditief niet vast te stellen.

Dankwoord

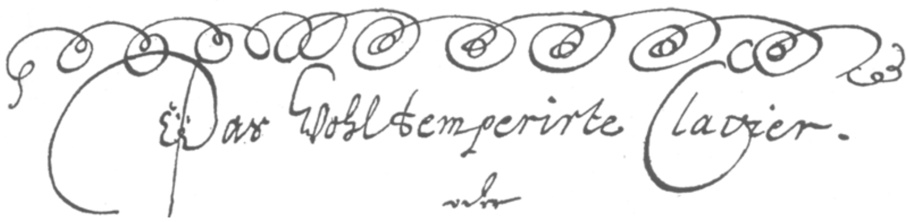
Mijn meest oprechte dank aan prof. Amiot E., Calvet A., auditief klavierstemmer en lector aan het IRCAM, en Ir. Paintoux T.
Hun open houding maakte het mogelijk om intens van gedachten te wisselen, wat leidde to beter begrip en evolutie van inzichten wat betreft muzikale temperamenten en het stemmen, wat de ontwikkeling van de gedachten en concepten in deze tekst mogelijk heeft gemaakt.
Dank ook aan Dr. Baroin G., die samen met de hierboven vernoemden een didactieve video betreffende de Welgetemperde Middentoon heeft samengesteld, die kan bekeken worden op :
< https://www.youtube.com/watch?v=lwfESoMxd8Y >,

Dank aan mijn dochter Hilde: zij trok er mijn aandacht op om te zoeken naar wat muzikanten wensen - reinheid van diatonische intervallen -, en niet naar wat de voorkeur voor een muzikaal temperament zou kunnen zijn, bij een bepaald muzikant.

Suggestie voor verdere lezing : De Welgetemperde Middentoon

Heel wat publicaties betreffende krullen op een partitie van “Das wohltemperirte Clavier” worden controversieel beoordeeld, maar kunnen desondanks misschien leiden tot verdere inspiratie. In lijn met talloze eerdere publicaties, en binnen de voor het auditief stemmen gebruikte partitie F3-F4, met een tegenklokwijze volgorde van kwinten op de kwintencirkel, kunnen de karakteristieken van de kwinten gepaard worden aan de karakteristieken van krullen, volgens onderstaande tabel.

Noot	F3	B♭3	E♭4	G♯3	C♯4	F♯3	B3	E4	A3	D4	G3	C4	F4
Kwint type	-	A	A	A	0	0	0	B	B	B	B	B	-



Originele figuur : Bach (1722) ; verbeterd aangepaste titel en figuur : Amiot (2009).

Men kan, een gelijke absolute waarde van zwevingsfrequentie stellen voor alle kwinten van het type B, en de grote terts op C. Dit leidt onverwacht ook tot een gelijke zwevingsfrequentie voor de grote terts op G. In lijn met de middentoon, wordt dan ook de grote terts op F op een gelijke zwevingsfrequentie ingesteld.
Het stelsel vergelijkingen daartoe is :
(de eerste lijn aan vergelijkingen is redundant, maar oplosbaar)

$$q = -p = q_{E4} = q_{A3} = q_{D4} = q_{G3} = q_{C4} = -p_{F3} = -p_{C4} = -p_{G3}$$
$$0 = q_{C\sharp4} = q_{F\sharp3} = q_{B}$$
$$q_{B\flat3} = q_{E\flat4} = q_{G\sharp3}$$

Bemerking : Doordat F3 niet inbegrepen is in de initiële instelling van C4-G3-D4-A3-E4, kan het mogelijk zijn dat het stemmen zou gebeurd zijn met een C4 stemvork. Dit zou kunnen de reden zijn dat op de tekening, de letter C gepaard gaat met een krul. De volgende stemtabel wordt bekomen :

Noot	F3	F♯3	G3	G♯3	A3	B♭3	B3	C4	C♯4	D4	E♭4	E4	F4
Toonhoogte	175,61	184,71	196,64	207,80	220,00	234,02	246,28	262,83	277,07	293,98	311,90	329,03	351,22
Δ cents	9,85	− 2,67	5,64	1,24	0,00	6,94	− 4,62	7,96	− 0,71	1,87	4,27	− 3,16	9,85
q	− 1.17	0,00	− 1.95	0,39	− 1.95	0,39	0,00	− 1.95	0,00	− 1.95	0,39	− 1.95	− 2,34
p	1,95	12,51	1,95	12,32	8,27	5,84	16,17	1,95	19,54	7,79	13,62	17,28	3,89
r	− 14,66	− 8,27	− 9,73	− 15,39	− 5,84	− 18,77	− 7,79	− 17,51	− 17,28	− 7,79	− 24,25	− 7,79	− 29,31

De Welgetemperde Middentoon

Er kan vastgesteld worden dat de natuurlijke noten identiek zijn met deze van de 1/5 komma middentoon van par. 2.2

Bibliografie

Aaron, P. 1523. : “Thoscanello de la Musica”. Marchio Sessa, Venezia, Italy.
Amiot, E. 2009. : “Discrete Fourier Transform and Bach's Good Temperament." Music Theory Online 15 (2).
Bach, J. S. 1722. : “Das wohltemperirte Clavier”, BWV 846-893. Handwritten partition, Anhalt-Kothen.
Calvet, A. 2020. : “Le Clavier Bien Obtempéré”. Montpellier; piano e forte editions, France.
Cramer, G. 1750. : “Introduction a l'Analyse des Lignes Courbes Algebriques”. Freres Cramer and Cl.Philibert, Geneve, Switzerland.
Di Veroli, C. 2009. : “Unequal Temperaments: Theory, History and Practice”. Bray Baroque, e-book.
Di Veroli, C. 2018. : “Accurate Meantone Tuning based on Fogliano". Harpsichord and Fortepiano, Vol. 23, no. 1, pp. 16-20, United Kingdom.
Fletcher H., Munson W.A. 1933. : “Loudness, its Denition, Measurement and Calculation". The Journal of the Acoustical Society of America 5: 82-108. http://dx.doi.org/10.1121/1.1915637.
Fletcher H., Stratton Richard, Blackham E. Donnell. 1962. : “Quality of Piano Tones". The Journal of”the Acoustical Society of America 34: 749-761. http://dx.doi.org/10.1121/1.1918192.
Fogliano, L. 1529. : “Musica Theorica”. G. A. Nicolini da Sabbio, Venezia, Italy.
Hall, D. 1973. : “The Objective Measurement of Goodness-of-Fit for Tunings and Temperaments". Journal of Music Theory; Duke University Press 17 (2): 274-290.
Jedrzejewski, F. 2002. : “Mathematiques des Systemes Acoustiques, Temperaments et Modeles Contemporains”. l'Harmattan, Paris.
Kelletat, H. 1981, 1982. : “Zur musikalischen Temperatur, band I, band II”. Verlag Merseburger, Berlin,Germany.
Plomp, R., and W. Levelt. 1965. : “Tonal Consonance and Critical Bandwidth". The Journal of the Acoustical Society of America 38: 548-560. http://dx.doi.org/10.1121/1.1909741.
Railsback, O. L. 1938. : “A Study of the Tuning of Pianos". The Journal of the Acoustical Society of America 10 (86): 548-560. http://dx.doi.org/10.1121/1.1902080.
Rasch, R. 1983. : “Description of Regular Twelve-Tone Musical Tunings". Journal of the Acoustical Society of America 73: 1023-1035. http://dx.doi.org/10.1121/1.359150.
Rasch, R. 1984. : “Approaches to Tuning and Temperament". Journal of the Acoustical Society of America 76: 40-41. http://dx.doi.org/10.1121/1.2021849.
Romieu, J. B. 1758. : “Memoire Theorique et Pratique sur les Systemes Temperes de Musique". Memoires de l'Academie Royale des Sciences, Paris 483-519.
Rossi, L. 1666. : “Sistema Musico ouero Musica Speculativa”. Stampa Episcopala, Perugia Italy.
Sauveur, J. 1701. : “Principes d'Acoustique et de Musique ou Systeme General des Intervalles des Sons”. Inséré dans les Mémoires de l'Academie Royale des Sciences, Paris.
Sethares, W. 2005. : “Tuning, Timbre, Spectrum, Scale”. Springer, London. http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4471-4177-8.
Vallotti, F. 1950. : “Trattato della Moderna Musica”. Padova - Italy; Il Messagero di S. Antonio.
von Helmholtz, H. 1863. : “Die Lehre von den Tonempndungen”. Braunschweig; Druck und Verlag von Friedrich und Sohn.
Werckmeister, A. 1691. : “Musicalische Temperatur”. Quedlinburg; Theodorus Phil. Calvisius, Buchhandl in Quedlinburg.